

Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

MBING-4.3.11 Nichtlineare Berechnungsverfahren

Vorlesung 8

Plastizität

Die klassische Plastizitätstheorie



menum

Vorbemerkung

Die Materialmodellierung inelastischer Werkstoffe stellt ein großes und komplexes Gebiert dar. Für eine halbwegs erschöpfende Behandlung würde man leicht ein ganzes Semester mit Stoff füllen können, ohne in nicht relevante Bereiche abzuschweifen. Es gibt ganze Bücher, die sich auf hunderten von Seiten ausschließlich der Plastizitätstheorie widmen.

Wir haben an dieser Stelle nicht so viel Zeit – das Thema Plastizitätstheorie stellt nur den Abschluss dieser Lehrveranstaltung dar, die sich primär mit geometrischer Nichtlinearität und den damit verbundenen Phänomenen und notwendigen Algorithmen beschäftigt. Somit sind die Ziele hier durchaus bescheiden. Es geht nur darum, einen Einblick in die Konzepte, die bei der Formulierung von inkrementellen Materialgesetzen zum Tragen kommen, zu geben.

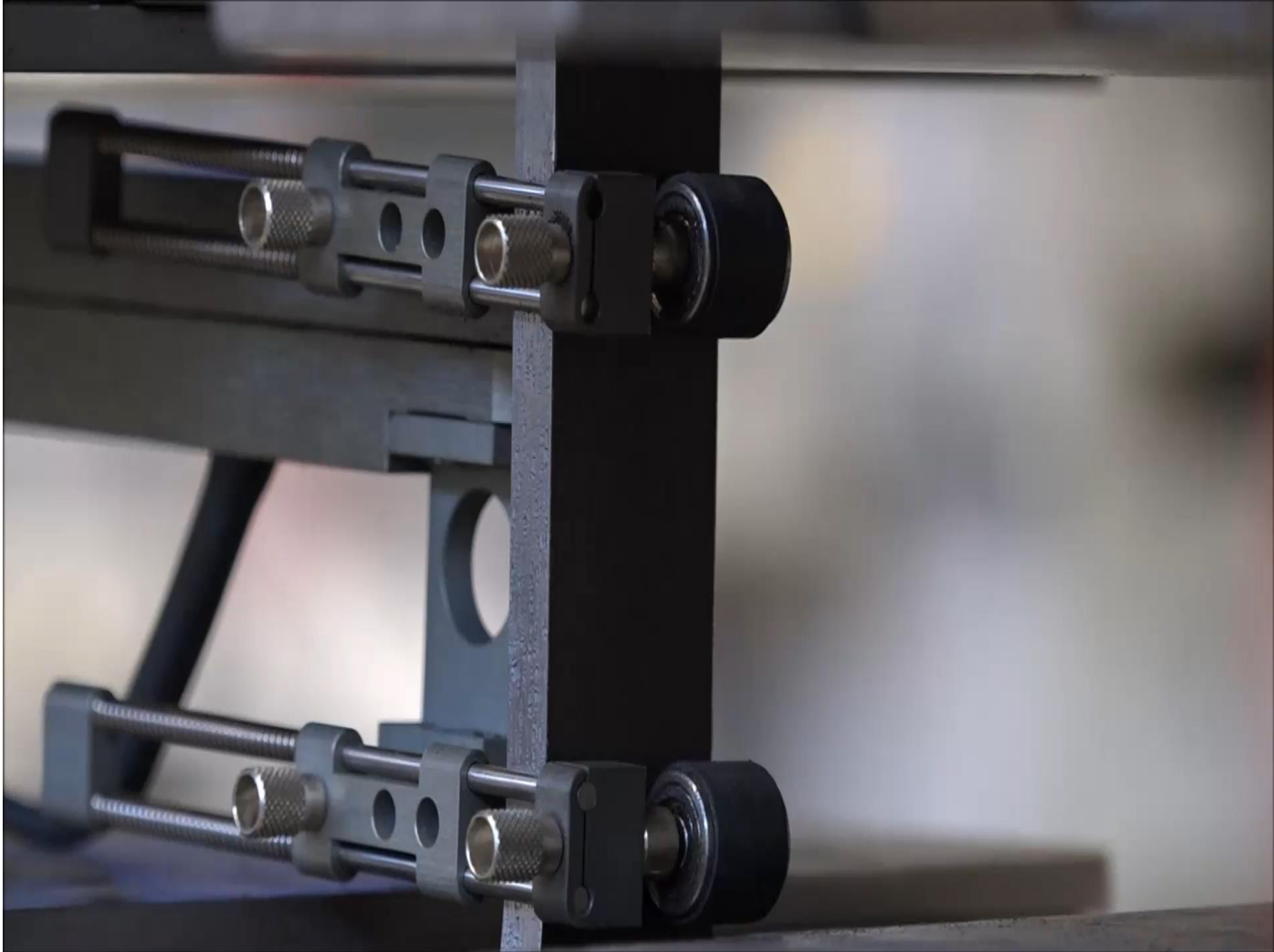
Damit bleiben wir an der Oberfläche und sparen zahlreiche an sich wichtige Aspekte aus. Alles, was im Folgenden entwickelt wird, stellt mittlerweile klassisches Wissen dar. Nichts stammt vom Verfassen, auch wenn auf die Angabe der Quellen, in denen die ursprünglichen Ideen entwickelt wurden, verzichtet wird.

Der interessierte Teilnehme sei an die einschlägige Literatur verwiesen. Der Verfasser empfiehlt aus rein subjektiver Sicht das folgende Buch: **Herbert A. Mang & Günter Hofstetter: „Festigkeitslehre“, 4. erweiterte Auflage, Springer Vieweg 2013.**



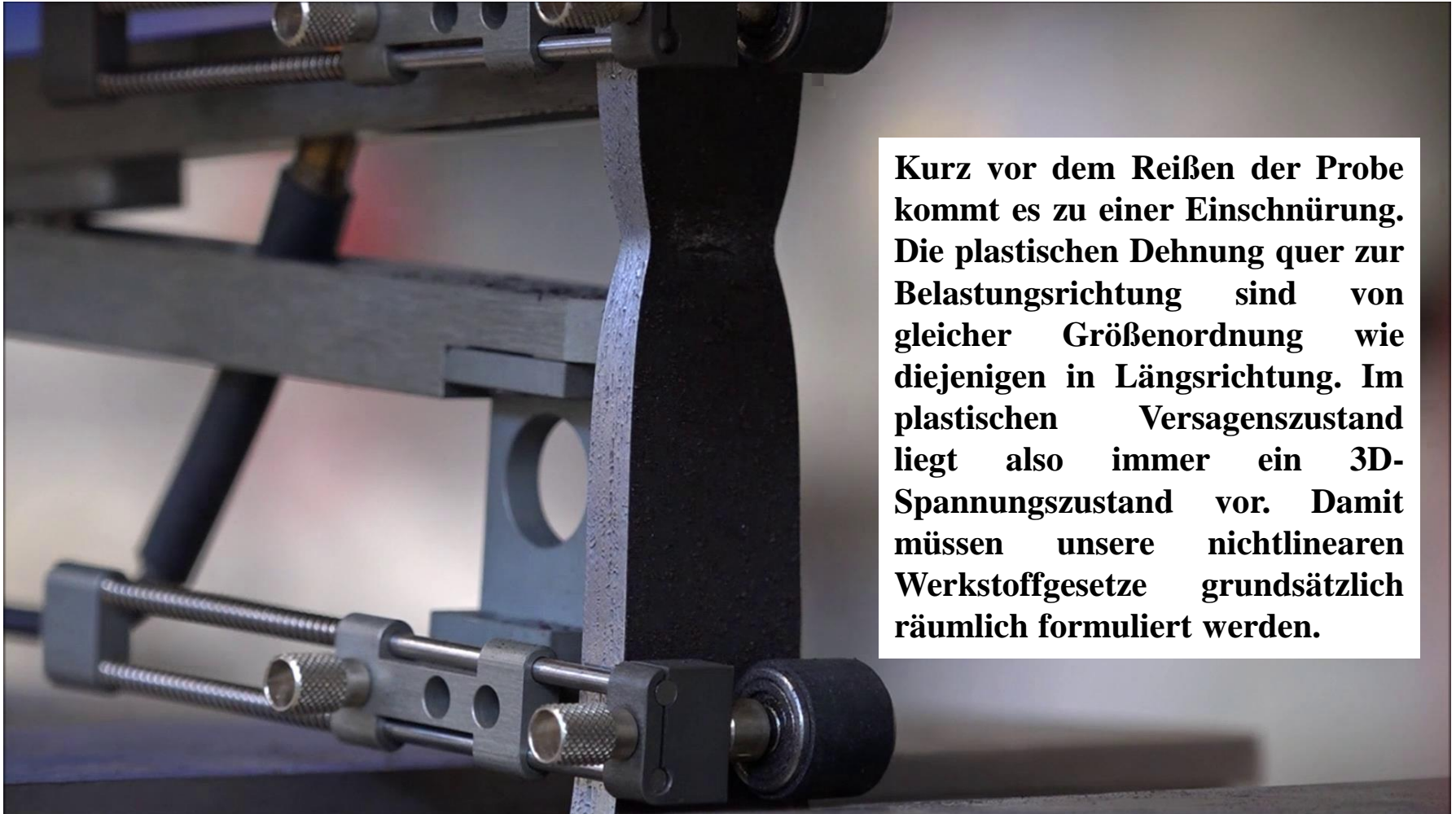
menum

Beispiel: Versuch im IKIB der BUW



menum

Beobachtung im Versagenszustand

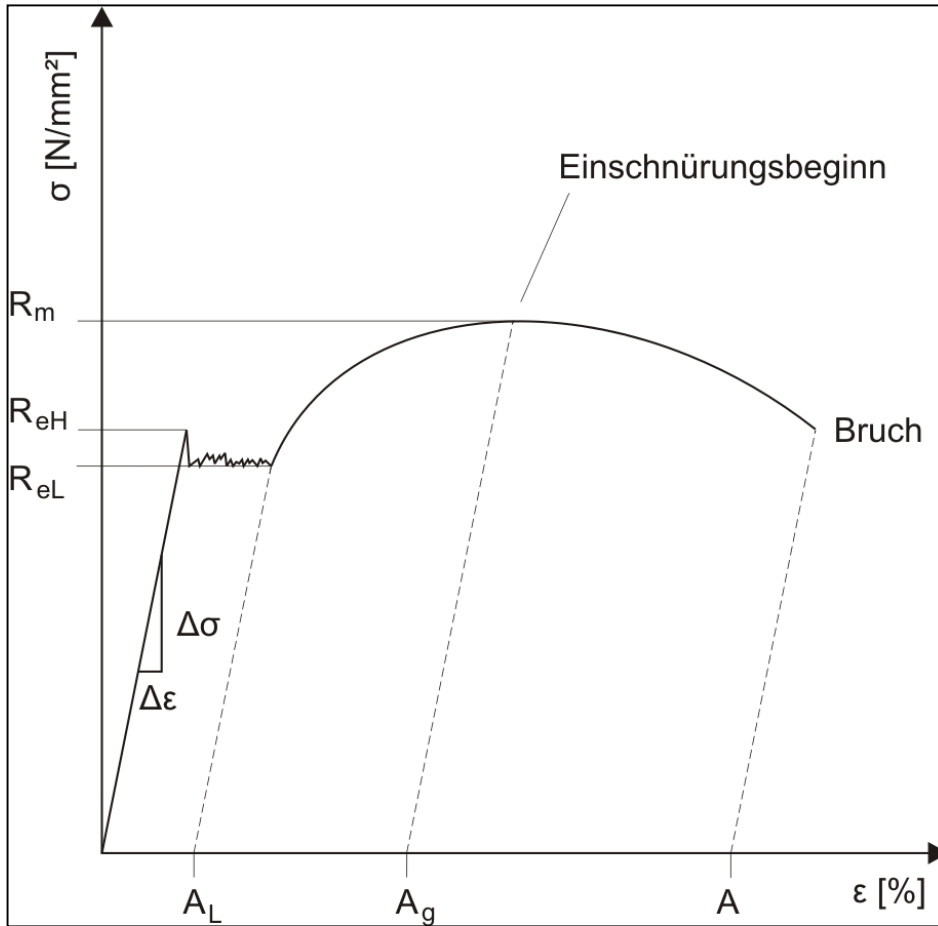


Kurz vor dem Reißen der Probe kommt es zu einer Einschnürung. Die plastischen Dehnung quer zur Belastungsrichtung sind von gleicher Größenordnung wie diejenigen in Längsrichtung. Im plastischen Versagenszustand liegt also immer ein 3D-Spannungszustand vor. Damit müssen unsere nichtlinearen Werkstoffgesetze grundsätzlich räumlich formuliert werden.



menum

Was wissen wir?



By Smily1306, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6923873>

Einfach durchzuführen sind **einaxiale** Zugversuche, aus denen einaxiale **Spannungs-Dehnungs-Kurven** resultieren. Ein typisches Versuchsergebnis sehen wir links. Auffallend ist das nahezu **linear-elastische** Verhalten bis zum Erreichen einer kritischen Spannung, der Fließgrenze σ_F . Danach flacht die Kurve stark ab, zeigt aber trotzdem (eventuell nach einem fast horizontalen Bereich) einen weiteren Anstieg.

Das Diagramm zerfällt also in einen elastischen und einen post-elastischen Bereich. Entlastet man aus dem post-elastischen Bereich, gewinnt das Material seinen ursprünglichen E-Modul zurück – die Entlastung verläuft wieder elastisch. Nach vollständiger Entlastung verbleibt eine dauerhafte „**plastische**“ Dehnung. Deshalb heißt der post-elastische Bereich auch **elasto-plastischer** Bereich.



MENUM

Was wissen wir noch?

Bei einer elastischen Verformung wird potentielle Energie im Material gespeichert. Diese ergibt sich aus der Arbeit, die die Spannungen mit den Verzerrungen leisten. Das elastische Gesamtpotential π ergibt sich zu:

$$\sigma = E\varepsilon \longrightarrow \pi = \int_0^{\varepsilon} \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon} E\bar{\varepsilon} d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \longrightarrow \frac{d\pi}{d\varepsilon} = E\varepsilon = \sigma$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \longrightarrow \pi^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma} = \int_0^{\sigma} \frac{1}{E} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{1}{E} \sigma^2 \longrightarrow \frac{d\pi^*}{d\sigma} = \frac{1}{E} \sigma = \varepsilon$$

Wir stellen fest:

- Das Potential hängt quadratisch von der Verzerrung bzw. der Spannung ab.
- Die Ableitung des Potentials nach der Spannung liefert die Verzerrung und umgekehrt.



menum

Was wissen wir noch?

Im einaxialen Fall stellen unsere mechanischen Variablen (Kräfte, Verformungen, Dehnungen, Spannungen) *skalare Variablen* dar. Das bedeutet, dass sie durch jeweils einen einzigen *koordinatensystemunabhängigen* Zahlenwert definiert werden.

Im mehrdimensionalen Fall reicht ein einziger Zahlenwert nicht aus. Die Variablen sind durch *Tensoren* oder *Vektoren* (Sonderfall eines Tensors 1. Stufe) gegeben und benötigen zu ihrer Beschreibung *mehrere Komponenten*.

Kraftvektor

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Spannungstensor

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Die Komponenten dieser Variablen höherer Stufe sind jedoch abhängig von dem gewählten Koordinatensystem. Innerhalb der Tensorrechnung gibt es Regeln, wie sich Tensorkomponenten bei Koordinatentransformationen verhalten. Darauf gehen wir hier nicht näher ein.



menum

Rückblende: Elastostatik, ebener Spannungszustand

Transformationsregeln für den ebenen Spannungszustand

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi + \sigma_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi - \sigma_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \sigma_{xy}\cos 2\varphi$$

Situation 1: Ausgangslage

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 10.0000 \\ \sigma_{yy} &= 20.0000 \\ \sigma_{xy} &= 15.0000\end{aligned}$$



Summe σ_{kk}

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 30.0000$$

Situation 2: $\varphi = 30^\circ$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= 25.4904 \\ \sigma_{\eta\eta} &= 4.5096 \\ \sigma_{\xi\eta} &= 11.8301\end{aligned}$$



Summe σ_{kk}

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = 30.0000$$

Situation 3: $\varphi = 54.2175^\circ$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 30.8114 \\ \sigma_{22} &= -0.8114 \\ \sigma_{\xi\eta} &= 0.0000\end{aligned}$$



Summe σ_{kk}

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 30.0000$$



Invarianten

Die Komponenten des ebenen Spannungstensors ändern sich bei Drehung des Koordinatensystems. Die Summe der beiden Hauptspannungen ist hingegen für alle Koordinatensysteme gleich. Eine derartige koordinatenunabhängige Größe nennen wir eine **Invariante**. Eine Invariante stellt offensichtlich einen Skalar dar.

Das **gleichzeitige Zusammenwirken** aller Spannungskomponenten kann zur Plastizierung des Materials führen. Dieses ist als physikalischer Vorgang nicht vom Koordinatensystem abhängig. Es wäre offensichtlich Unsinn, wenn das Material in einem KS plastisch würde, in einem anderen jedoch elastisch bliebe. Da die Komponenten jedoch in jedem Koordinatensystem andere Werte annehmen, kann die Entscheidung über die Plastizierung nicht anhand einzelner Spannungskomponenten erfolgen. Geeignet sind jedoch invariante Größen, da diese in jedem KS den gleichen Wert annehmen.

Somit stellt sich die Frage, wie viele Invarianten z.B. der Spannungstensor besitzt und wie man diese berechnet. Mit diesen Invarianten kann man dann eine ebenfalls invariante Funktion definieren, deren Wert dann mit der einaxialen Festigkeit σ_F verglichen werden kann. Für die weitere Betrachtung ist die **Einstein'sche Summenkonvention** hilfreich.



Indizierte Variablen - Tensorkomponenten

Ein Vektor wird durch seine 3 Vektorkomponenten definiert; zur Festlegung des Spannungszustandes benötigen wir bereits 9 Spannungskomponenten (wegen der Symmetrie sind nur 6 unterschiedlich, aber es existieren formal alle 9). Ein Materialtensor (4 Indizes) wird durch 81 Komponenten beschrieben. Zur kompakten Darstellung verwenden wir *indizierte Variablen*. Der Name der Variablen beschreibt ihren Inhalt, also σ für eine Spannung, und die Indizes legen fest, wie viele Komponenten die Variable enthält.

Vektorkomponenten: Stufe 1

$$F_i \quad V_i$$

Spannungen & Verzerrungen: Stufe 2

$$\sigma_{ij} \quad \varepsilon_{ij}$$

Materialtensor: Stufe 4

$$E_{ijklm}$$

Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



menum

Die Einstein'sche Summenkonvention

Räumlicher Vektor

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i}_x + F_y \mathbf{i}_y + F_z \mathbf{i}_z \longrightarrow \mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3 \longrightarrow \mathbf{F} = F_k \mathbf{i}_k$$

Die Einstein'sche Summenkonvention besagt, dass über gleiche Indizes von 1 bis 3 zu summieren ist. Damit schrumpfen ausgeschriebene Summen ohne Verwendung des Summensymbols Σ zu einem kompakten Ausdruck zusammen. Ein Summenindex wird als *stummer Index* bezeichnet.

Materialgesetz

$$\sigma_{11} = E_{1111} \varepsilon_{11} + E_{1112} \varepsilon_{12} + E_{1113} \varepsilon_{13} + E_{1121} \varepsilon_{21} + \dots + E_{1133} \varepsilon_{33}$$



$$\sigma_{11} = E_{11km} \varepsilon_{km} \longrightarrow \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Diese superkompakte Darstellung beschreibt 9 Gleichungen (alle Kombinationen von i und j), wobei jede Gleichung 9 Summanden enthält (alle Kombinationen von k und m)



menum

Invariante eines Tensors 1. Stufe

Tensoren 1. Stufe treten als **Vektorkomponenten** auf. Einen Vektor können wir uns als Pfeil im Raum visualisieren. Dieser Pfeil ist, wenn wir ihn zeichnen, immer gleich, egal in welchem KS wir die Komponenten ausdrücken. Damit ist der Vektor als abstrakte Größe invariant und als Folge auch seine Länge. Diese Länge lässt sich mittels der Komponenten ausdrücken und stellt damit die Invariante der Tensorkomponenten 1. Stufe dar.

Räumlicher Vektor

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3$$

Skalarprodukt = Quadrat der Länge

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = (F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3) \cdot (F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3)$$

Die Basisvektoren sind orthonormiert!

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_k = \delta_{ik}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = F_i F_k \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_k$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = F_i F_k \delta_{ik}$$

Das Skalarprodukt führt dazu, dass alle Indizes zu stummen Indizes werden und wir keinen Index übrig behalten. Alle Indizes werden „wegsummiert“. Als Ergebnis erhalten wir einen Skalar, welcher per Definition invariant ist. Operationen der Tensorkomponenten untereinander oder mit dem Kronecker-Delta liefern damit Invarianten.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = F_i F_i$$



menum

Beispiel: Virtuelle Arbeiten

Arbeit bzw. Energie sind koordinatenunabhängig von damit Skalare. Also muss die Definition der virtuellen Arbeit als das Produkt von Kraftgröße mit zugeordneter virtueller Weggröße Ausdrücke ergeben, welche nur stumme Indizes erhält. Die Summation über die stummen Indizes liefert dann den Wert der virtuellen Arbeiten.

Äußere virtuelle Arbeit

$$\mathbf{P} = P_i \mathbf{i}_i \quad \delta \mathbf{V} = \delta V_k \mathbf{i}_k \quad \longrightarrow \quad \delta W = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{V} = P_i \delta V_k \delta_{ik} = P_i \delta V_k$$

Innere virtuelle Arbeit

Die Spannungskomponenten leisten Arbeit mit den zugeordneten Verzerrungskomponenten. Es wird über alle Komponenten addiert.

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad \longrightarrow \quad \delta W = E_{ijkl} \varepsilon_{km} \delta \varepsilon_{ij} \quad \longleftarrow \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{km}$$



menum

Invarianten von Tensoren 2. Stufe

Wir können uns einen räumlichen Tensor 2. Stufe t_{ij} als 3x3-Matrix darstellen. Eine solche Matrix besitzt **drei Eigenwerte**. Analog besitzt der Tensor **drei Invarianten**: eine **lineare**, eine **quadratische** und eine **kubische** Invariante.

Lineare Invariante

$$T_1 = t_{ij} \delta_{ij} = t_{ii}$$

Quadratische Invariante

$$T_2 = \frac{1}{2} t_{ik} t_{im} \delta_{jk} \delta_{im} = \frac{1}{2} t_{ij} t_{ij}$$

Kubische Invariante

$$T_3 = \frac{1}{3} t_{ij} t_{ik} t_{jk}$$



menum

Invarianten des Spannungstensors

Die Invarianten des Spannungstensors werden mit I bezeichnet. Die beiden ersten Invarianten können hinsichtlich ihrer mechanischen Bedeutung interpretiert werden. Sie sind für die klassische Plastizitätstheorie von Bedeutung.

Lineare Invariante

$$I_1 = \sigma_{ij} \delta_{ij} = \sigma_{ii}$$

Teilt man die 1. Invariante durch drei, erhält man die mittlere Normalspannung. Diese korrespondiert zu einem sog. „*hydrostatischen Spannungszustand*“, der unter Wasser wirken würde, wo ein allseitig identischer Druck herrscht.

Quadratische Invariante

$$I_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}$$

Die 2. Invariante hängt quadratisch von den Spannungen ab und ähnelt damit dem Gesamtpotential. Für Energiebetrachtungen wäre damit I_2 geeignet.

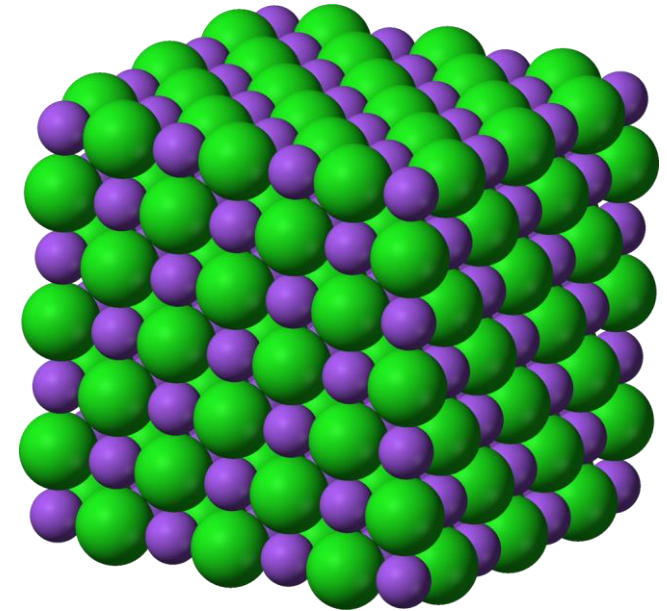


Plastische Inkompressibilität

Die Gesamtverzerrungen können in Längenänderungen und Winkeländerungen aufgespalten werden. Aus den Längenänderungen resultiert die Volumenänderung (Dilatation).

Metallatome sind in einem dichtgepackten Gitter angeordnet, wie rechts gezeigt (dort dargestellt ist NaCl, aber es geht hier ums Prinzip). Es zeigt sich, dass Metalle zwar eine elastische Volumenänderung erleiden können, aber keine plastische. Man könnte einen Metallwürfel bis auf den Grund des Marianengrabens absenken, ohne dass irgendwelche plastischen Effekte sichtbar werden. Das bedeutet: ein hydrostatischer Spannungszustand trägt nicht zur Plastizierung bei.

Damit müsste man diesen hydrostatischen Anteil aus der Betrachtung entfernen. Das führt auf die Definition des sog. *Spannungsdeviators*, der den um den hydrostatischen Anteil bereinigten Spannungszustand enthält



By Benjah-bmm27 (talk · contribs) - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=702423>



menum

Der Spannungsdeviator

Jeder Tensor 2. Stufe kann in einen *deviatorischen* und einen *kugelsymmetrischen* Anteil aufgespalten werden. Der kugelsymmetrische Anteil entspricht bei den Spannungen dem hydrostatischen Spannungszustand p_{ij} .

Mittlere Spannung

$$p = \frac{1}{3} I_1$$



Hydrostatischer Anteil

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = p \delta_{ij}$$



Spannungsdeviator

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij}$$

Die Invarianten des Spannungsdeviators werden mit J anstelle von I bezeichnet. Durch Entfernen des hydrostatischen Anteils gilt: $J_1 = 0$.

Quadratische Invariante J_2 des Spannungsdeviators

$$J_1 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$$



menum

Fließbedingung nach von Mises I

Die klassische Plastizitätstheorie geht davon aus, dass bis zum Erreichen eines bestimmten Grenzzustandes ein rein linear-elastisches Verhalten vorliegt. Der Grenzzustand ist durch eine **Grenz-funktion** f , die sog. **Fließbedingung**, beschrieben. Diese Fließbedingung darf nur eine Funktion von **Invarianten** sein, damit ihre Aussage **koordinateninvariant** wird. Neben den Spannungen hängt die Fließbedingung von Parametern k_M ab, die materialspezifisch sind und zusätzlich von den bisherigen plastischen Verzerrungen abhängen können.

Allgemeiner Fall

$$f = f(I_1, I_2, I_3, k_M) = 0$$



Metallplastizität

$$f = f(J_2, J_3, k_M) = 0$$

Die noch heute im Stahlbau gebräuchliche Fließbedingung geht auf **Richard von Mises** (Richard Edler von Mises (* 19. April 1883 in Lemberg; † 14. Juli 1953 in Boston) zurück. Er nahm an, dass Plastizität bei Erreichen einer kritischen Grenze der gespeicherten elastischen Energie eintritt. Da die 2. Invariante des Spannungsdeviators aufgrund ihrer quadratischen Abhängigkeit von der Spannung ein Maß für die Verzerrungsenergie ist, basiert die von-Mises-Fließbedingung nur auf J_2 , man spricht auch von einer **J_2 -Fließbedingung**.



menum

Fließbedingung nach von Mises II

Fließen tritt ein, wenn J_2 einen kritischen Wert erreicht. Beim einaxialen Spannungszustand ist der kritische Wert durch die Fließgrenze σ_F gegeben. Im mehraxialen Fall nennen wir den kritischen Wert zunächst k . Dieser muss so bestimmt werden, dass sich der einaxiale Sonderfall korrekt ergibt.

Ansatz

$$f = J_2 - k^2 = 0$$

Einaxialer Zustand

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$I_1 = \sigma_{xx}$$



$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{xx} \end{bmatrix}$$



menum

Fließbedingung nach von Mises II

Wir berechnen die 2. Invariante J_2 für den einaxialen Zustand.

$$J_2 = \frac{1}{2} \{ \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 \} \longrightarrow J_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{9} \sigma_{xx}^2 \{ 4 + 1 + 1 \} = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^2$$

Im Fließpunkt nimmt σ_{xx} den Wert σ_F an.

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_F^2 \longrightarrow J_2 = \frac{1}{3} \sigma_F^2 = k^2 \longrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_F \longrightarrow f = J_2 - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0$$

Fließbedingung nach von Mises

In der Praxis ist es günstiger, mit der physikalischen Fließgrenze σ_F zu rechnen als mit dem daraus abgeleiteten Wert k . Das führt auf die Definition einer **Vergleichsspannung** σ_V , die dann direkt mit σ_F verglichen werden kann.

Vergleichsspannung nach von Mises

$$\sigma_V = \sqrt{3J_2}$$



menum

Vergleichsspannung im Stahlbau

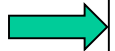
Beim Nachweis von Blechen im Stahlbau liegt ein *ebener Spannungszustand* vor. Für diesen wird der Spannungsdeviator und aus diesem die Vergleichsspannung berechnet.

Biaxialer Zustand

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$



$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{yy} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \frac{2}{3}\sigma_{yy} - \frac{1}{3}\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Vergleichsspannung nach von Mises

$$\sigma_v^2 = 3J_2 = 3 \frac{1}{2} \{ \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\tau_{xy}^2 \} = \frac{3}{2} \frac{1}{9} \{ 6\sigma_{xx}^2 + 6\sigma_{yy}^2 - 6\sigma_{xx}\sigma_{yy} \} + \frac{3}{2} 2\tau_{xy}^2$$



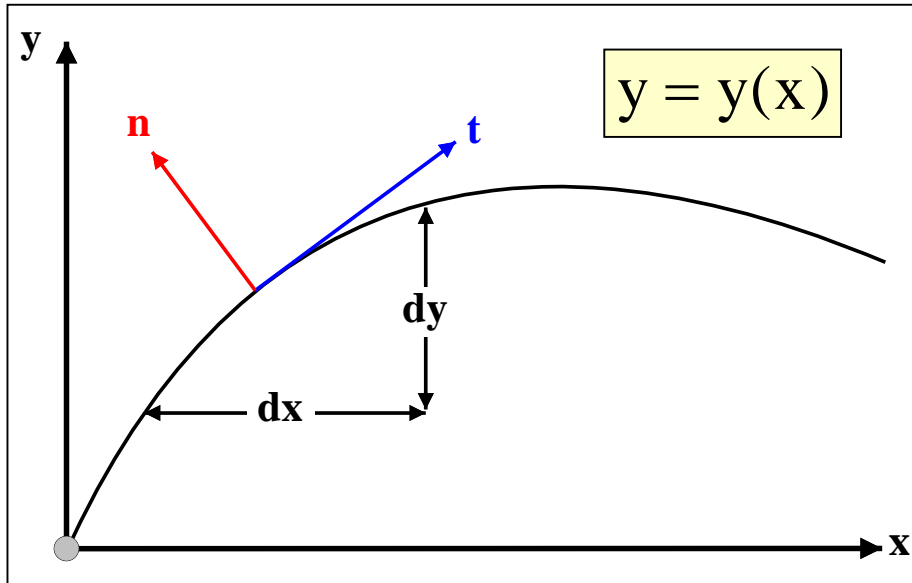
$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2}$$

Das ist die bekannte Formel aus Lehrbüchern oder den Stahlbaunormen.



menum

Interludium: Eigenschaft des Gradienten



Die Steigung einer Funktion wird durch deren Ableitung beschrieben. Mit ihr kann der Tangentenvektor \mathbf{t} festgelegt werden.

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ y' \end{bmatrix}$$

Der funktionale Zusammenhang $y=y(x)$ kann auch implizit dargestellt werden.

$$f(x, y) = y - y(x) = 0$$

Der **Gradient** $\text{grad } f$ der Funktion f ist der Vektor mit den beiden partiellen Ableitungen.

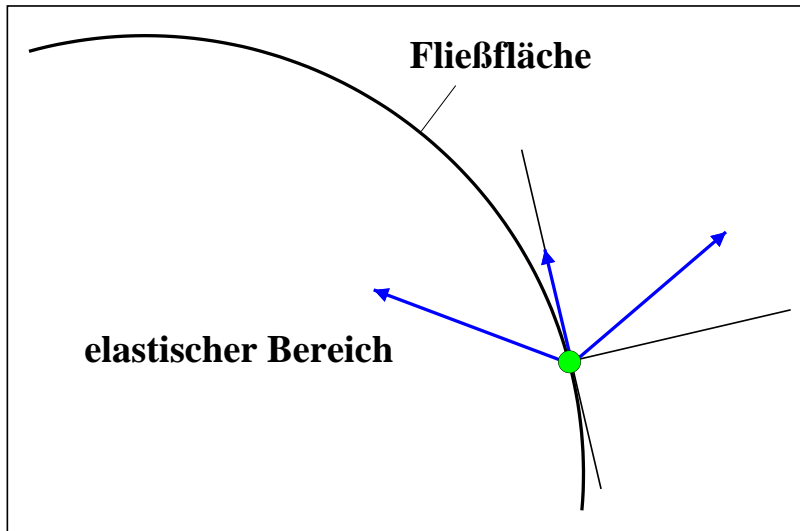
$$\text{grad } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{grad } f \cdot \mathbf{t} = -y' \cdot 1 + 1 \cdot y' = 0 \Rightarrow$$

Der Gradient steht senkrecht auf der Tangente \mathbf{t} und ist damit identisch zur Normalen \mathbf{n} .



Was geschieht nach Erreichen des Fließpunktes?



Wir starten von einem Null-Zustand und bringen eine Verzerrungsgeschichte auf. Die zugehörige Spannungsgeschichte ergibt sich aus dem elastischen Materialgesetz. Dann erreichen wir die Fließfläche. Bis jetzt sind keinerlei plastische Verzerrungen entstanden.

An dieser Stelle gibt es für ein weiteres Spannungsincrement, als blaue Pfeile dargestellt, drei Möglichkeiten.

- Der inkrementelle Spannungsvektor zeigt von der Fließfläche zurück in den elastischen Bereich. Das wäre eine **Entlastung**, die vollständig **elastisch** ablaufen würde.
- Der inkrementelle Spannungsvektor verläuft tangential zur Fließfläche. Dann wandert der Punkt auf der Fließfläche. Man spricht von einer **neutralen Spannungsänderung**, die ebenfalls **elastisch** abläuft und damit **keine plastischen Verzerrungen** erzeugt. Allerdings ist hierfür das linear-elastische Materialgesetz nicht mehr gültig-
- Der inkrementelle Spannungsvektor zeigt nach außen von der Fließfläche weg. Das wäre eine **Belastung**, die **elasto-plastisch** verläuft und damit **plastische Verzerrungen** erzeugt.



menum

Be-/Entlastungskriterium

Gradient

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

Die Frage nach Be- oder Entlastung hängt von der Richtung des Spannungskrements $d\sigma_{ij}$ relativ zur Fließfläche ab. Der Grenzfall ist durch die neutrale Spannungsänderung gegeben, die *tangential* zur Fließfläche verläuft. *Senkrecht* zur Fließfläche steht der Gradient, so dass bei der neutralen Spannungsänderung $d\sigma_{ij}$ senkrecht auf dem Gradienten steht. Da zwei Vektoren dann senkrecht auf einander stehen, wenn ihr Skalarprodukt Null ist, legt das Vorzeichen des Skalarprodukts von $d\sigma_{ij}$ mit $\text{grad } f$ fest, welcher Fall – Entlastung, neutrale Spannungsänderung oder Belastung – eintritt.

Entlastung

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$

Neutrale Spannungsänderung

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$$

Belastung

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

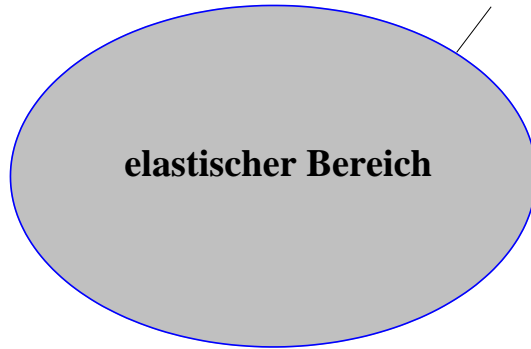


menum

Gibt es einen elasto-plastischen Spannungsraum?

elasto-plastischer Bereich

Fließfläche



Naheliegender ist eine statische Sicht auf die Fließfläche. Der gesamte Spannungsraum wird durch die Fließfläche in einen elastischen und einen elasto-plastischen Bereich aufgeteilt. Wird von der Fließfläche aus weiter belastet, verlassen wir den elastischen Bereich und der Spannungspunkt stößt in den elasto-plastischen Bereich von. Dann könnten wir von diesem auf die Fließfläche zurückblicken, so wie von einem Flugzeug auf die Erdoberfläche. Diese Vorstellung ist jedoch nicht zutreffend.

Ein Spannungspunkt kann bei Belastung die Fließfläche nicht verlassen. Er ist in dieser gefangen und zieht bei Belastung die Fließfläche gleichsam mit sich mit, so dass er stets auf dieser verharrt. Lage und Größe des elastischen Bereichs im Spannungsraum ändern sich also bei einer elasto-plastischen Belastung.

Wäre dies nicht der Fall, müssten wir zunächst elasto-plastisch entlasten, wir die Fließfläche erreichen und ab dann elastisch weiter entlasten könnten. Versuche zeigen jedoch, dass das nicht der Fall ist. Eine Entlastung ist von Beginn an elastisch. Das kann nur der Fall sein, wenn sich der Spannungspunkt direkt auf der Fließfläche befindet.

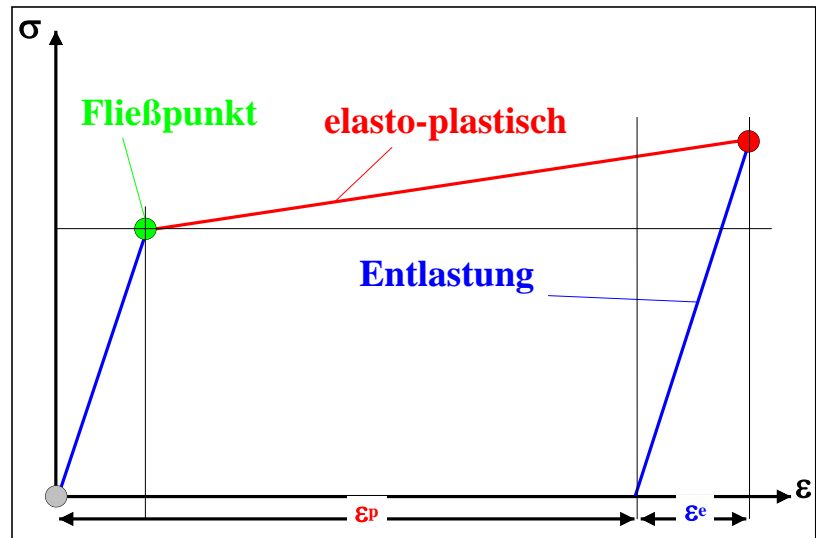
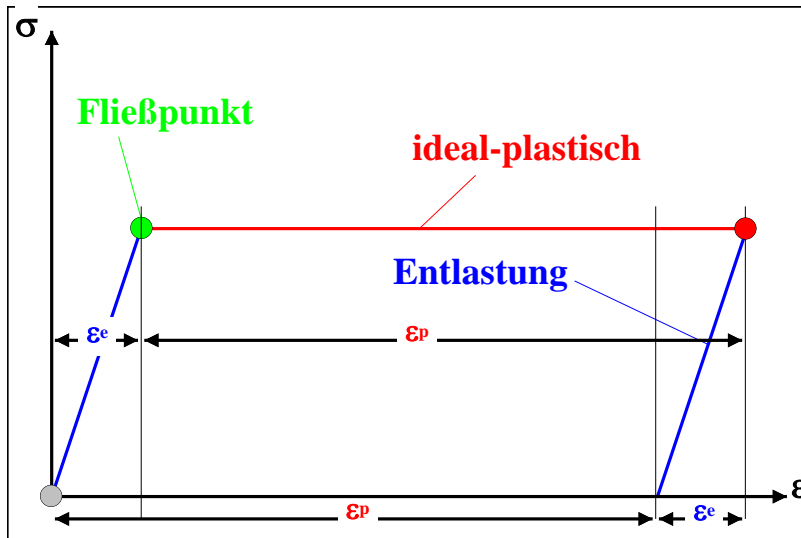


menum

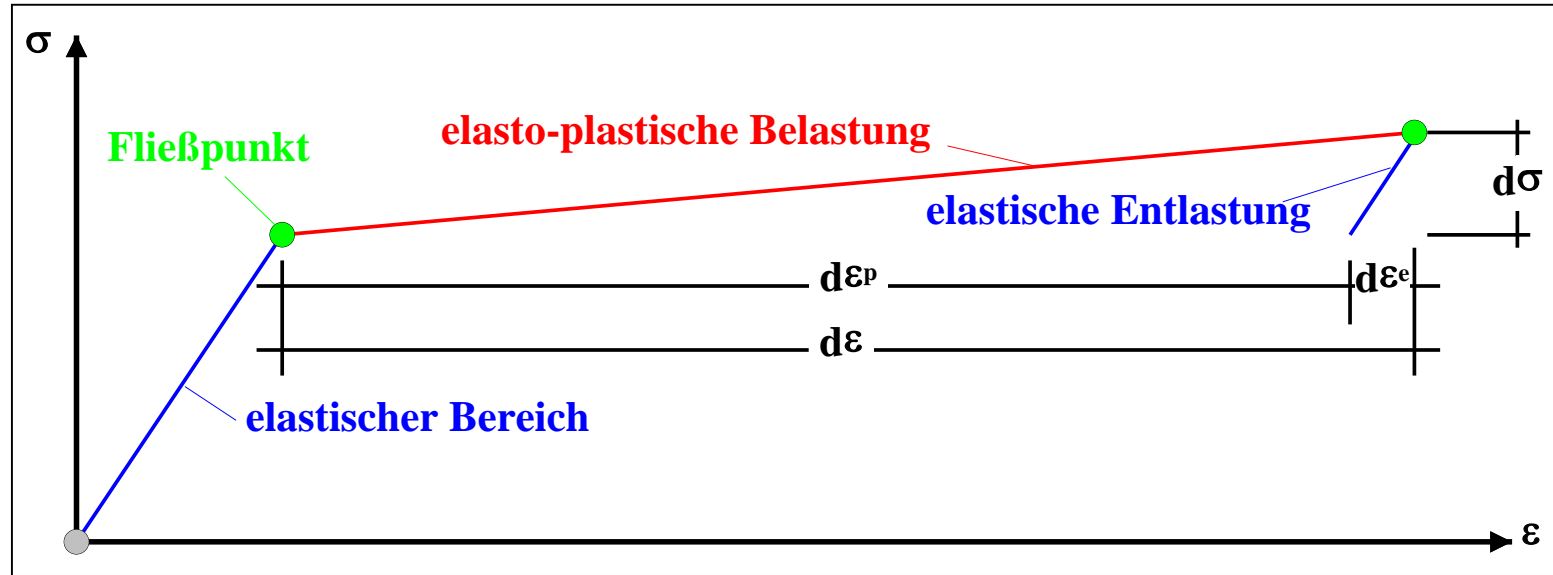
Idealplastisches und verfestigendes Verhalten

Im Einaxialen kann nach Erreichen des Fließpunktes das Material bei Belastung zwei Verhaltensweisen zeigen:

- Es ist keinerlei weitere **Spannungszunahme** möglich. Jede weitere Dehnung wäre rein **elastisch**. Diesen Fall nennt man **ideal-plastisch**. Im Mehraxialen ist eine **Spannungsumlagerung** mittels einer **neutralen Spannungsänderung** möglich.
- Es ist eine **Spannungssteigerung** möglich, wenngleich mit reduzierter Materialsteifigkeit. Weiter Dehnungsinckremente enthalten dann einen **elastischen** und einen **plastischen** Anteil. Man nennt das **elasto-plastisch** - das Material verfestigt.



Verfestigung: Eindimensionaler Fall



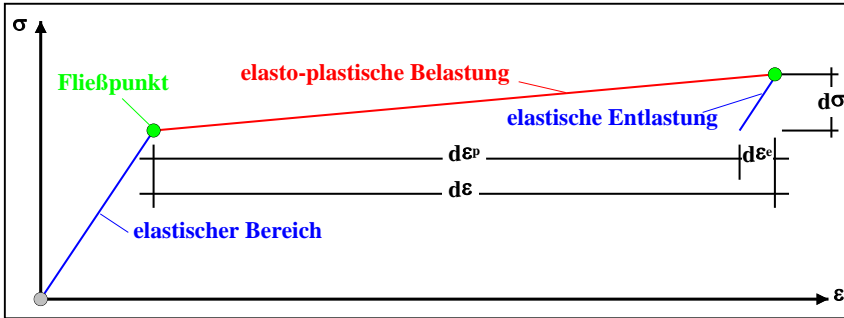
Nach Überschreiten des Fließpunktes σ_F kann im Falle eines verfestigenden Materials eine weitere Spannung aufgenommen werden. Allerdings sinkt der E-Modul von E_0 auf E_T ab.

Wir bringen ein Spannungskrement $d\sigma$ auf, welches zu einem elasto-plastischen Dehnungskrement $d\epsilon$ führt. Bei Entlastung verhält sich das Material wieder elastisch und der elastische Teil der Dehnung $d\epsilon^e$ wird wieder zurückgeführt. Der Rest der Dehnung $d\epsilon^p$ verbleibt als dauerhafte bleibende Dehnung. Bei erneuter Wiederbelastung wird das Material jedoch erst bei der zuletzt erreichten Maximalspannung plastisch und nicht bei dem ursprünglichen Wert von σ_F . Das Spannungskrement $d\sigma$ ist also gleichzeitig ein Inkrement der Fließgrenze $d\sigma_F$.



menum

Bestimmung des plastischen Moduls E_p



Die Gesamtdehnung wird in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

Elastische Entlastung

$$d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E_0}$$

Aus der Gesamtdehnung resultiert die Gesamtspannung mit E_T

$$d\sigma = E_T (d\varepsilon^e + d\varepsilon^p)$$

$$d\sigma = E_T \left\{ \frac{d\sigma}{E_0} + d\varepsilon^p \right\}$$

$$d\varepsilon^p = \frac{E_0 - E_T}{E_0 E_T} d\sigma = \frac{d\sigma}{E_p}$$

Bei Kenntnis der plastischen Dehnung ergibt sich das Spannungskrement aus der elastischen Dehnung mit dem elastischen E-Modul.

$$d\sigma = E_0 (d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

$$E_p = \frac{E_0 E_T}{E_0 - E_T}$$



menum

Verallgemeinerung auf den räumlichen Fall

Aufspaltung der Verzerrung

Materialgesetz

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$



$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e = E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)$$

Unbekannt ist der plastische Verzerrungsanteil. Für diesen wird zunächst die Richtung festgelegt. Im elastischen Fall ergab sich die Verzerrung aus der Ableitung des elastischen Potentials nach den Spannungen. Analog wird im hier ein sog. „**plastisches Potential**“ $g(\sigma_{ij})$, aus dem sich die **Richtung** der plastischen Verzerrungen ergibt, festgelegt. Deren Größe wird durch einen zunächst unbekanntem „**plastischen Multiplikator**“ $d\lambda$, auch **Konsistenzparameter** genannt, beschrieben.

Plastisches Verzerrungsinkrement

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

Mathematisch stellen die partiellen Ableitungen der skalaren Potentialfunktion g den Gradienten des plastischen Potentials dar. Geometrisch steht der Gradient und damit das plastische Verzerrungsinkrement senkrecht auf der 9-dimensionalen Potentialfläche.



MENUM

Plastisches Potential

Die plastischen Verzerrungen stehen senkrecht auf dem plastischen Potential. Bei der Wahl des plastischen Potentials gibt es zwei Optionen.

Wir haben gesehen, dass die 2. Invariante proportional zur Verzerrungsenergie ist und damit Ähnlichkeiten zum elastischen Potential aufweist. Somit liegt es nahe, die Fließfunktion selbst als plastisches Potential zu wählen. Man spricht dann von einem *assozierten Fließgesetz*.

Alternativ kann man ein von der Fließfunktion unterschiedliches plastische Potential wählen. Dieses führt auf *nicht-assozierte Fließtheorien*. Die Frage wäre dann, nach welchen Kriterien und wie man dieses dann zunächst unbekannte plastische Potential bestimmt.

Setzt man als plastisches Potential die Fließfläche an, enthält man die klassischen Fließregeln nach Prandtl/Reuss (Ludwig Prandtl (* 4. Februar 1875 in Freising; † 15. August 1953 in Göttingen), András Reuss (* 1. Juli 1900 in Budapest; † 10. Mai 1968 in Budapest)).

Assoziierte Fließregel

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$



Fließvektor

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}}$$



menum

Theorie nach Prandtl/Reuss: Bestimmung des Fließvektors: Vorarbeiten

Ableitung des Spannungstensors

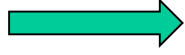
$$\sigma_{ij} = \sigma_{km} \delta_{ki} \delta_{mj}$$



$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\sigma_{km}} = \delta_{ki} \delta_{mj}$$

Ableitung der 1. Invarianten

$$I_1 = \sigma_{ij} \delta_{ij}$$



$$\frac{dI_1}{d\sigma_{km}} = \frac{d\sigma_{ij}}{d\sigma_{km}} \delta_{ij} = \delta_{ki} \delta_{mj} \delta_{ij} = \delta_{kj} \delta_{mj}$$



$$\frac{dI_1}{d\sigma_{km}} = \delta_{km}$$



menum

Bestimmung des Fließvektors:

2. Invariante des Spannungsdeviators

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{2}{3} I_1 \sigma_{ij} \delta_{ij} + \frac{1}{9} I_1^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \right)$$

$$\delta_{ij} \delta_{ij} = 3 \quad \sigma_{ij} \delta_{ij} = I_1 \quad \rightarrow \quad J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{6} I_1^2$$

Ableitung der Invarianten

$$\frac{dJ_2}{d\sigma_{km}} = \frac{d\sigma_{ij}}{d\sigma_{km}} \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{km}} I_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dJ_2}{d\sigma_{km}} = \delta_{ki} \delta_{mj} \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{km}$$

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\sigma_{km}} = \delta_{ki} \delta_{mj} \quad \frac{dI_1}{d\sigma_{km}} = \delta_{km} \quad \rightarrow \quad \frac{dJ_2}{d\sigma_{km}} = \sigma'_{km}$$



menum

Die Konsistenzbedingung

Ein Punkt auf der Fließfläche verharrt bei Belastung auf der Fließfläche. Das bedeutet, dass er auch während des Belastungsvorganges stets die Fließbedingung erfüllt. Das wiederum bedeutet, dass die Fließbedingung insgesamt keinerlei Änderung erfahren darf. Die Gesamtänderung einer Funktion mehrerer Veränderlicher ist durch ihr totales Differential gegeben.

Fließbedingung nach von Mises

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_F) = J_2 - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0$$

Totales Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_F} d\sigma_F$$

Konsistenzbedingung

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_F} d\sigma_F = 0$$



Konsistenzparameter: Ideal-plastisches Verhalten

Bei ideal-plastischen Verhalten kann das Material nie mehr Spannung aufnehmen als σ_F . Damit ist σ_F konstant und der Term mit σ_F in der Konsistenzbedingung entfällt.

Konsistenzbedingung

Elasto-plastisches Materialgesetz

Plastisches Verzerrungsinkrement

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$$

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)$$

$$d\varepsilon_{kl}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$



$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}) = 0$$



$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\lambda = 0$$



$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}$$



$$d\lambda = \frac{\sigma'_{ij} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\sigma'_{ij} E_{ijkl} \sigma'_{kl}}$$



$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}$$



Elasto-plastisches Materialgesetz I

Mittels des nun bekannten Konsistenzparameters können die plastischen Verzerrungen berechnet werden. Benötigt wird abschließend das elasto-plastische Materialgesetz.

Elasto-plastisches Materialgesetz

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)$$



$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl} d\lambda \sigma'_{kl}$$



$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl} \sigma'_{kl} \frac{\sigma'_{ab} E_{abop} d\varepsilon_{op}}{\sigma'_{ab} E_{abcd} \sigma'_{cd}}$$



Umbenennen der stummen Indizes im rechten Term:

$km \Rightarrow op, op \Rightarrow km$

Plastisches Verzerrungsinkrement

$$d\varepsilon_{km}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{km}} = d\lambda \sigma'_{km}$$

Konsistenzparameter

$$d\lambda = \frac{\sigma'_{ij} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\sigma'_{ij} E_{ijkl} \sigma'_{km}}$$



menum

Elasto-plastisches Materialgesetz II

Nach der Umbenennung

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - E_{ijop} \sigma'_{op} \frac{\sigma'_{ab} E_{abkm} d\varepsilon_{km}}{\sigma'_{ab} E_{abcd} \sigma'_{cd}}$$



Elasto-plastisches Materialgesetz

$$d\sigma_{ij} = \left\{ E_{ijkl} - \frac{E_{ijop} \sigma'_{op} \sigma'_{ab} E_{abkm}}{\sigma'_{ab} E_{abcd} \sigma'_{cd}} \right\} d\varepsilon_{km} = E_{ijkl}^{\text{el-pl}} d\varepsilon_{km}$$

Elasto-plastischer Materialtensor

$$E_{ijkl}^{\text{el-pl}} = E_{ijkl} - \frac{E_{ijop} \sigma'_{op} \sigma'_{ab} E_{abkm}}{\sigma'_{ab} E_{abcd} \sigma'_{cd}}$$



menum

Rückführung auf die Fließfläche

Wir haben in Teil A der Vorlesung gesehen, dass die Integration eines inkrementellen elasto-plastischen Materialgesetzes einen numerischen Fehler erzeugt. Die Größe dieses Fehlers ist bei einer einzigen Rechnung nicht angebbbar.

Die Abdrift der numerischen Lösung von der wahren Lösung bedeutet, dass der Spannungspunkt von der Fließfläche nach außen abdriftet. Damit ergibt sich eine Vergleichsspannung, die größer als die Fließgrenze σ_F ist. Das ist aber physikalisch unsinnig, da bei ideal-plastischem Verhalten das Material keine effektive Spannung größer als σ_F ertragen kann.

Diese Differenz zwischen der numerisch ermittelten Vergleichsspannung und der Fließgrenze kann beziffert werden und stellt einen objektiven Fehler dar. Dieser kann durch Projektion des Spannungspunktes auf die Fließfläche eliminiert werden. Diese Projektion eliminiert nicht den wahren Fehler – das Einfrieren der Richtung des Verzerrungsinkrements während der Gleichgewichtsiteration ist davon unberührt, aber es stellt die Konsistenz der Lösung her.

Die Frage erhebt sich jetzt nach der Projektionsrichtung. Man könnte beispielsweise auf dem kürzesten Weg, also senkrecht, auf die Fließfläche projizieren, oder auch in Richtung des Mittelpunkts der Fließfläche. Unterschiedliche Projektionsrichtungen liefern, obwohl sie alle Konsistenz herstellen, unterschiedliche Ergebnisse.



Verfestigendes Material

Bei verfestigendem Material ist die Fließgrenze veränderlich, so dass in der Konsistenzbedingung der mit der Fließgrenze verknüpfte Anteil nicht entfällt-

Fließbedingung nach von Mises

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_F) = J_2 - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0$$



Konsistenzbedingung

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_F} d\sigma_F = 0$$

Der 1. Term bleibt im Vergleich zur ideal-plastischen Lösung unverändert, der 2. Term muss zusätzlich betrachtet werden.

2. Term der Konsistenzbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_F} d\sigma_F = \frac{2}{3} \sigma_F d\sigma_F$$

Der Zuwachs der Fließgrenze $d\sigma_F$ wird analog zu $d\lambda$ aus dem Vergleich des allgemeinen Spannungszustandes zum einaxialen Zustand ermittelt. Er kann mittels des Verfestigungsparameters h mit $d\lambda$ verknüpft werden.

Verfestigungsparameter

$$d\sigma_F = h \cdot d\lambda$$



menum

Bestimmung des Verfestigungsparameters I

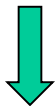
Wir fordern, dass die geleistete *dissipative Arbeit* der Spannungen an den plastischen Verzerrungen für den Sonderfall des einaxialen Spannungszustandes identisch wird zur der dissipativen Energie, die sich aus dem einaxialen Versuch ergibt. Die Spannung und die Vergleichsspannung betragen, da wir uns auf der Fließfläche befinden, beide σ_F .

Gleichheit der dissipativen Arbeit

$$\frac{1}{2} \sigma_F d\varepsilon^P = \frac{1}{2} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P$$

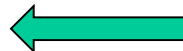


$$d\sigma_F = E_P d\lambda \frac{\sigma_{ij} \sigma'_{ij}}{\sigma_F}$$



Einaxialer Zustand

$$d\sigma_F = E_P d\varepsilon^P$$



Plastische Verzerrung

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \cdot \sigma'_{ij}$$

Nebenrechnung

$$\sigma_{ij} \sigma'_{ij} = \left\{ \sigma'_{ij} + \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right\} \sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + \frac{1}{3} I_1 \sigma'_{ij} \delta_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} \delta_{ij} = J_1 = 0$$

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2J_2 = \frac{2}{3} \sigma_F^2$$



menum

Bestimmung des Verfestigungsparameters II



$$d\sigma_F = E_P d\lambda \frac{\sigma_{ij} \sigma'_{ij}}{\sigma_F}$$

$$\sigma_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_F^2$$



$$d\sigma_F = \frac{2}{3} E_P \sigma_F d\lambda$$

Verfestigungsparameter

$$d\sigma_F = h \cdot d\lambda$$



$$h = \frac{2}{3} E_P \sigma_F$$

2. Term der Konsistenzbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_F} d\sigma_F = \frac{2}{3} \sigma_F d\sigma_F$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_F} d\sigma_F = \frac{4}{9} E_P \sigma_F^2 d\lambda$$



MENUM

Elasto-plastisches Materialgesetz

Der 2.Term der Konsistenzbedingung hängt von $d\lambda$ ab und erscheint damit zusätzlich im Nenner des elasto-plastischen Materialtensors, welcher aus der Vorfaktor von $d\lambda$ resultierte.

Elasto-plastisches Materialgesetz

$$d\sigma_{ij} = \left\{ E_{ijkl} - \frac{E_{ijop} \sigma'_{op} \sigma'_{ab} E_{abkm}}{\sigma'_{ab} E_{abcd} \sigma'_{cd} + \frac{4}{9} E_P \sigma_F^2} \right\} d\varepsilon_{km} = E_{ijkl}^{\text{el-pl}} d\varepsilon_{km}$$

Elasto-plastischer Materialtensor

$$E_{ijkl}^{\text{el-pl}} = E_{ijkl} - \frac{E_{ijop} \sigma'_{op} \sigma'_{ab} E_{abkm}}{\sigma'_{ab} E_{abcd} \sigma'_{cd} + \frac{4}{9} E_P \sigma_F^2}$$



menum

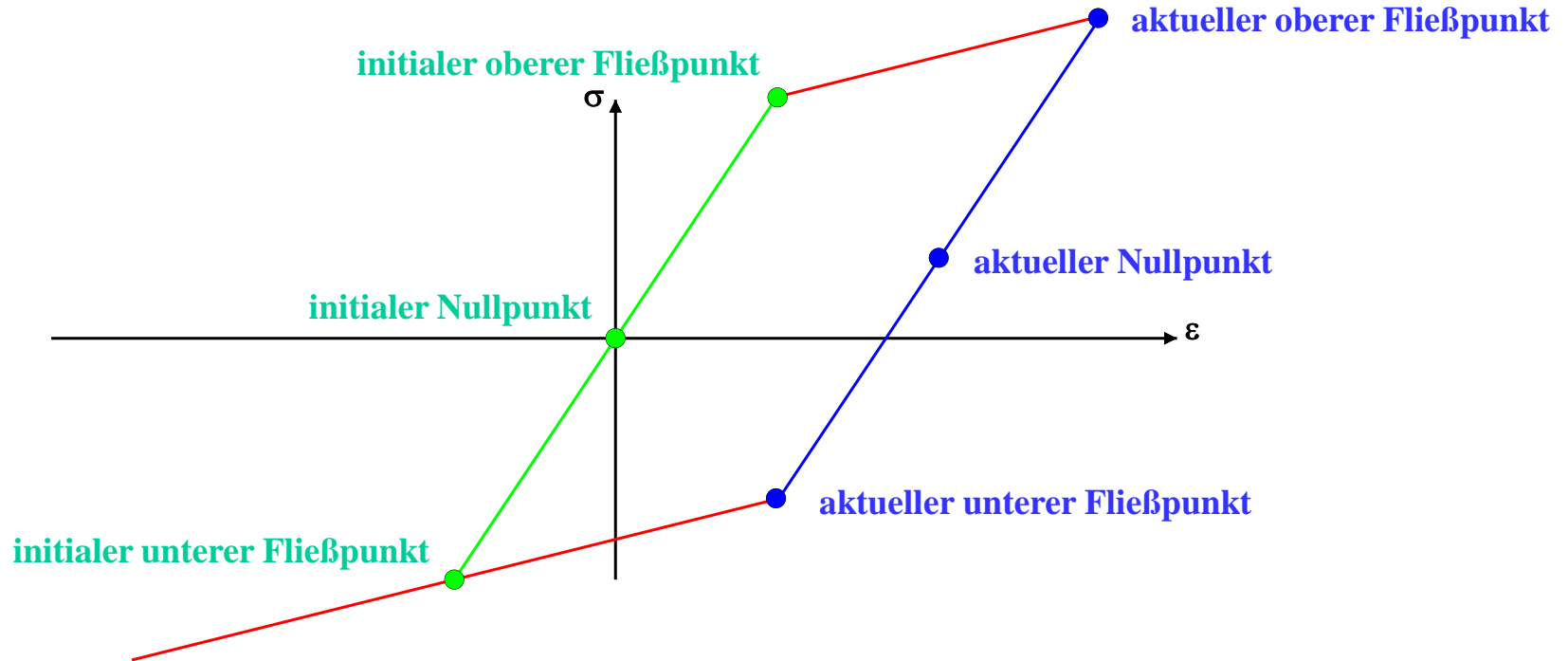
Isotrope Verfestigung

Der Zuwachs $d\sigma_F$ führt zu einer kontinuierlichen Aufweitung des elastischen Bereichs. Dieser behält sein Form bei, vergrößert sich aber gleichermaßen in alle Richtungen. Man spricht deshalb von **isotroper Verfestigung**. Im Prinzip würde dieser Prozess unendlich weiter gehen. Das Konzept der isotropen Verfestigung besitzt zwei Schwächen.

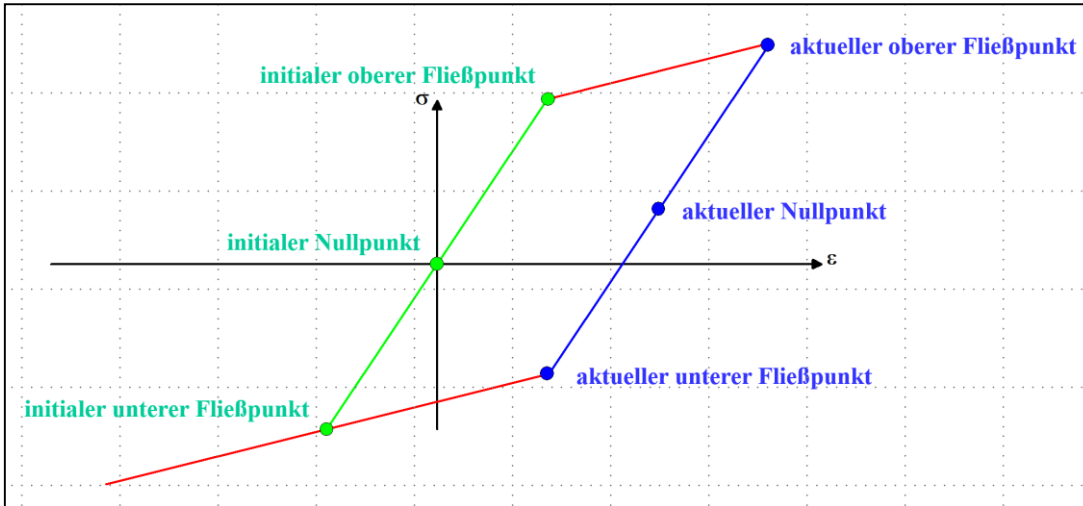
- a) Versuche zeigen, dass ein unendliches Anwachsen der plastischen Verzerrungen nicht möglich ist. Bei Erreichen einer maximal zulässigen Dehnung kommt es zur Einschnürung und danach zum Riss. Analog zur Fließfläche im Spannungsraum muss man also eine **Bruchfläche** im Verzerrungsraum definieren, der Vergleichsspannung entspricht dann eine **Vergleichsdehnung**. Nach Erreichen dieser stellt sich Entfestigung oder schlagartiger Bruch ein.
- b) Im einaxialen Versuch zeigt sich der sog. **Bauschinger-Effekt** (Johann Bauschinger (* 11. Juni 1834 in Nürnberg; † 25. November 1893)). Dieser steht im Widerspruch zu einer isotropen Verfestigung und zeigt eher eine Translation des elastischen Bereichs bei gleichbleibender Größe dieses. Diese Beobachtung führt auf das Konzept der **kinematischen Verfestigung**.



Bauschinger-Effekt I



Bauschinger-Effekt II

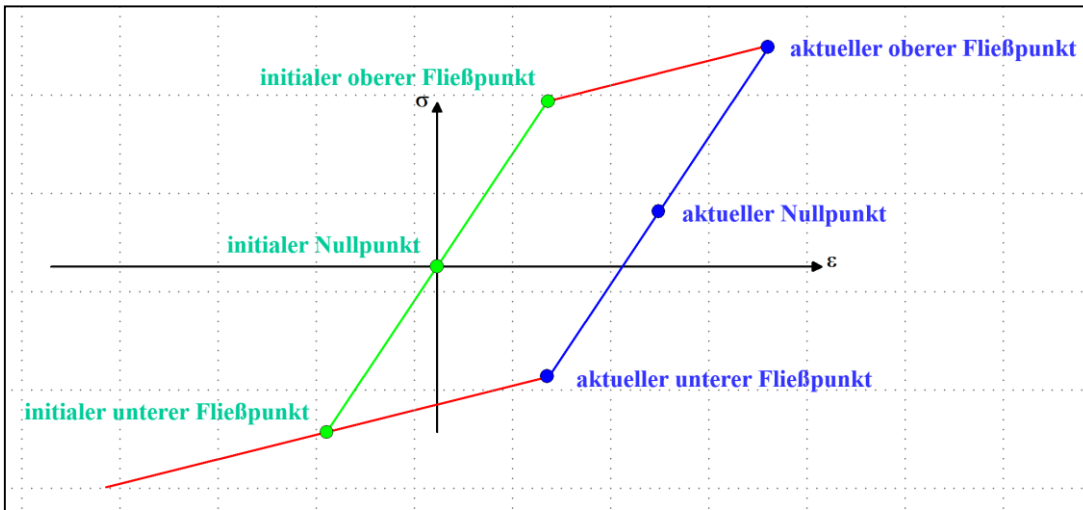


Zunächst ist der elastische Bereich symmetrisch: Fließen tritt bei gleicher absoluter Spannung im Druck- wie Zugbereich auf. Der obere und untere Fließpunkt liegen symmetrisch zum initialen Nullpunkt. Die Größe des elastischen Bereichs beträgt damit $2\sigma_F$.

- Bei Entlastung in den elastischen Bereich und Wiederbelastung tritt Fließen erst bei der angewachsenen Fließspannung (aktueller oberer Fließpunkt) ein – es liegt die bekannte Verfestigung vor.
- Erneutes Plastizieren tritt aber nicht bei der negativen Spannung des aktuellen oberen Fließpunktes ein, sondern bereits eher. Der elastische Bereich hat sich also nicht die Größe von $2\sigma_{F, \text{aktuell}}$ vergrößert. Es ist eher so, dass er fast gleich groß geblieben ist. Das Konzept der **kinematischen Verfestigung** nimmt deshalb an, dass er **exakt gleich groß** geblieben ist.



Bauschinger-Effekt III



Fließbedingung bei kinematischer Verfestigung

$$|\sigma - \rho| = \sigma_F$$

Update des Mittelpunktes

$$\rho_{\text{neu}} = \rho_{\text{alt}} + d\sigma_F$$

Der Bauschinger-Effekt führt zum Verlust der Symmetrie. Man kann das dergestalt erfassen, dass man eine obere und eine untere Fließgrenze definiert, die immer den Abstand besitzen $2\sigma_F$. Nach Eintritt einer elasto-plastischen Verzerrung wird immer die nicht betroffene Fließgrenze an die aktuell veränderte Fließgrenze angepasst. Das wäre aber nicht zur Verallgemeinerung auf den mehraxialen Fall geeignet.

Allgemeingültig wäre die Definition des Mittelpunktes ρ des elastischen Bereichs bei Beibehaltung der Fließgrenze.



menum

Reine Kinematische Verfestigung

Als neuer Parameter k_M wird der Mittelpunkt der Fließfläche eingeführt, der durch den Tensor ρ_{ij} beschrieben wird. Zu Beginn sind alle Komponenten ρ_{ij} von Null. Diese Mittelpunktspannungen werden bei der Bestimmung von J_2 von dem aktuellen Spannungszustand abgezogen. Die Fließgrenze σ_F ist jetzt konstant. Der Mittelpunkt ρ_{ij} ändert sich bei plastischen Verzerrungen, so dass der Spannungspunkt stets auf der Fließfläche verharret. Zur Berechnung der Änderung $d\rho_{ij}$ wird erneut die Konsistenzbedingung herangezogen.

Fließbedingung nach von Mises mit kinematischer Verfestigung

$$f(\sigma_{ij}, \rho_{ij}, \sigma_F) = J_2(\sigma_{ij} - \rho_{ij}) - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0$$



Konsistenzbedingung

$$df(\sigma_{ij}, \rho_{ij}, \sigma_F) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \rho_{ij}} d\rho_{ij} = 0$$

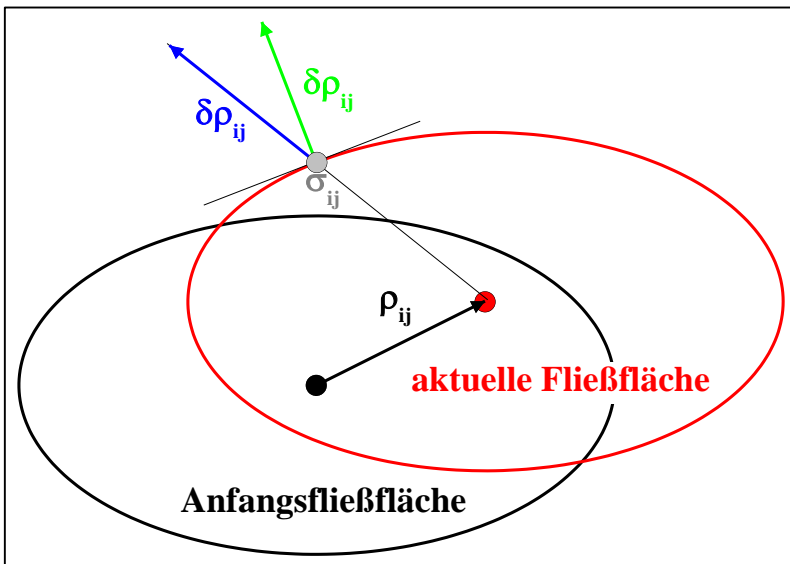


menum

Richtung der Mittelpunktverschiebung

Die Mittelpunktverschiebung ist, wie die plastische Verzerrung, ein Tensor mit entsprechenden Komponenten. Wie bei der plastischen Verzerrung stellt sich die Frage nach Größe und Richtung. Die Richtung wird angenommen, und die Größe erwächst aus der Konsistenzbedingung bei Abgleich mit dem einaxialen Verhalten.

Die Idee der allgemeinen kinematischen Verfestigung geht auf Prager (William Prager, (* 23. Mai 1903 in Karlsruhe; † 17. März 1980 in Savognin/Zürich)) zurück. Er nahm an, dass die Mittelpunktverschiebung $\delta\rho_{ij}$ in Richtung des plastischen Verzerrungsinkrements verläuft, also senkrecht auf der Fließfläche steht (grüner Pfeil).



Demgegenüber schlug Ziegler (Hans Ziegler (* 5. September 1910 in Winterthur; † 6. August 1985 in Glen Haven, Colorado)) vor, als Richtung den Vektor vom Mittelpunkt der aktuellen Fließfläche zum aktuellen Spannungspunkt zu wählen (blauer Pfeil).

Darüber hinaus gibt es weitere Ansätze für die Mittelpunktverschiebung, die hier nicht weiter diskutiert werden. Ebenso wird auf die weitere Herleitung verzichtet.



Ausblick: Geotechnik: Fließbedingung nach Drucker/Prager

Eine der zentralen Annahmen der Fließtheorien für metallische Werkstoffe ist deren plastische Inkompressibilität. Für geotechnische Probleme ist diese Annahme nicht zutreffend, da Boden u.A. durch seinen Porengehalt plastisch kompressibel ist. Zur Beschreibung des Verhaltens des Bodens sind die Theorien von Coulomb richtungsweisend. Eine damit kompatible Fließtheorie, die man als Erweiterung der von Mises-Theorie ansehen kann, wurde in den 1950er Jahren von Drucker (Daniel Charles Drucker (* 3. Juni 1918 in New York City; † 1. September 2001 in Gainesville, Florida)) und Prager entwickelt. Sie hängt neben J_2 von der 1. Invarianten I_1 ab und enthält zwei Materialparameter μ und τ_y .

Fließbedingung nach Drucker/Prager

$$f(\sigma_{ij}, \mu, \tau_y) = \sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} + \frac{\mu}{\sqrt{3}} I_1 - \sqrt{2}\tau_y = 0$$

Das Obige dient nur zu Illustrationszwecken und wird an dieser Stelle nicht weiter verfolgt.



menum