

# Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

MBING-4.3.11 Nichtlineare Berechnungsverfahren

Vorlesung 8

**Plastizität**

**Allgemeines**

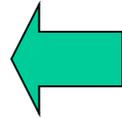


menum

# Physikalische Nichtlinearität

## Klassen von Materialien:

- **Beton**
  - Normalbeton
  - hochfester Beton
- **Stahl**
  - ...
- **Holz**
  - ...
- **Glas**
  - ....
- .....



Innerhalb jeder Klasse gibt es Unterarten mit speziellen Eigenschaften

- **großes Spektrum verschiedener Verhaltensweisen**
  - duktiles Verhalten
  - sprödes Verhalten
  - viskoses Verhalten
  - ...
- **zusätzliche Parameter können relevant sein:**
  - Temperatur
  - Feuchte
  - Dehnungsgeschwindigkeit
  - ....

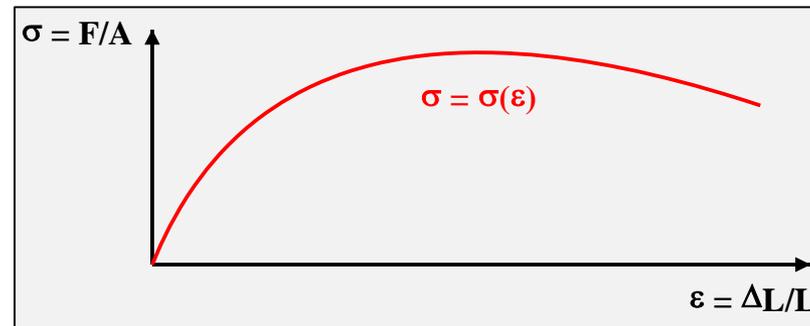
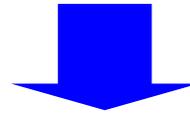
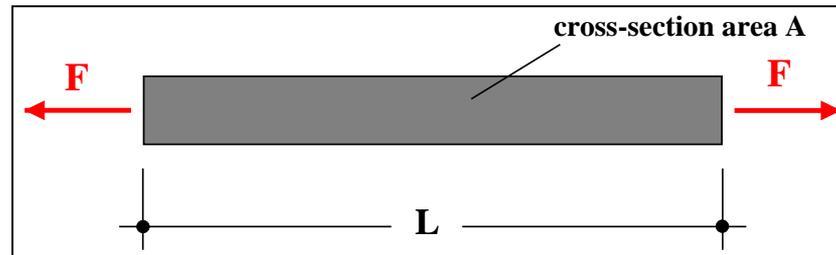


menum

# Einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

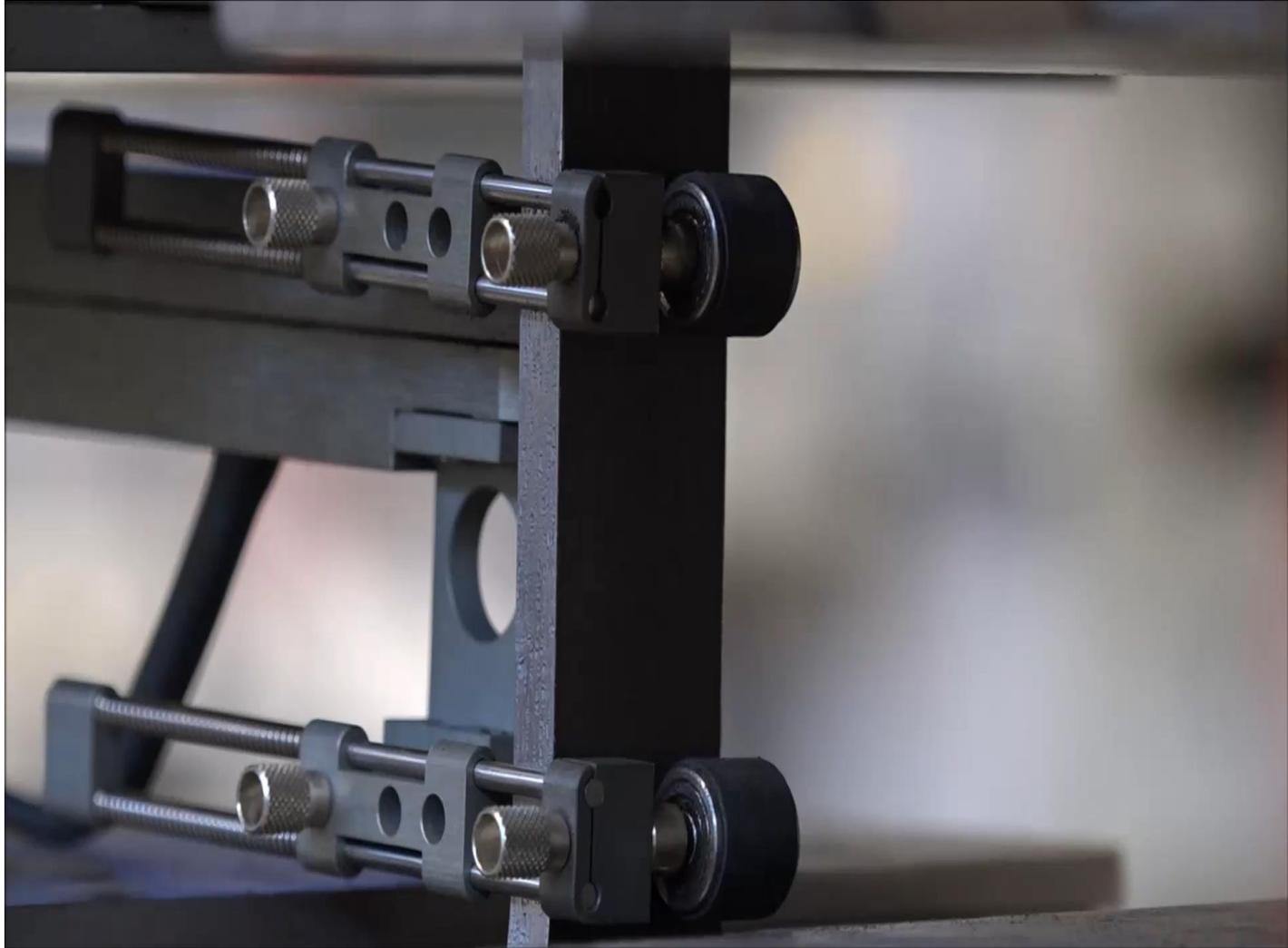
Materialversuche werden typischerweise an Probekörpern unter *einaxialer Belastung* durchgeführt. Als Ergebnis erhält man *einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen* und *einaxiale Festigkeiten*.

Beispiel: einaxiale Zugprobe



menum

# Beispiel: Versuch im IKIB der BUW

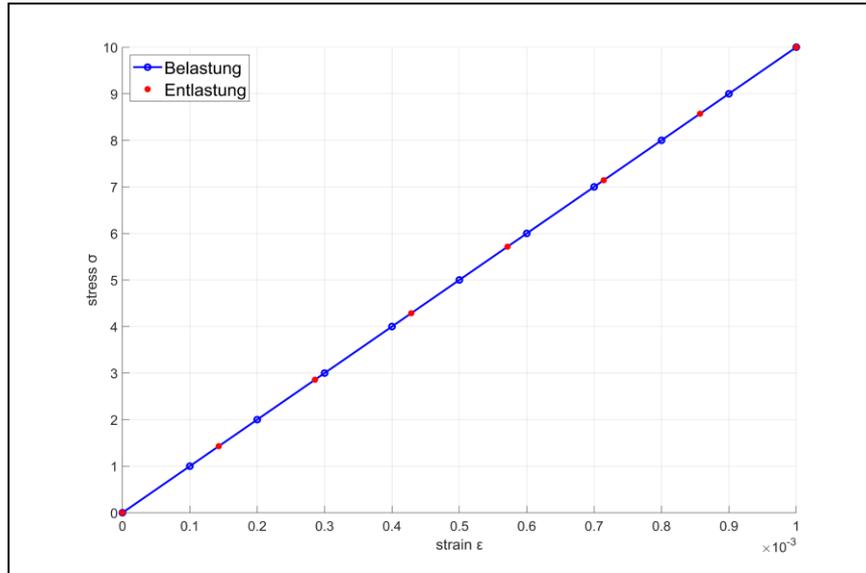


menum

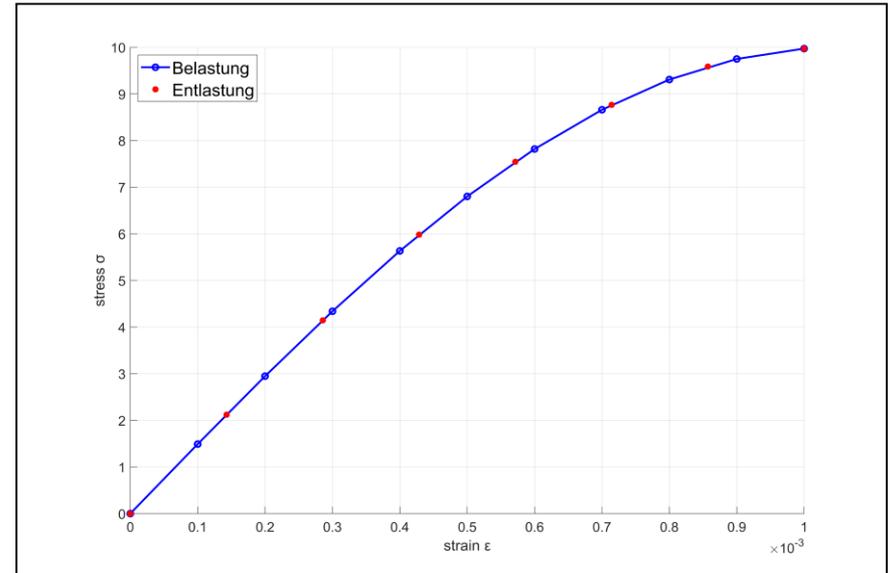
# Elastisches Verhalten I

Ein Material verhält sich *elastisch*, wenn eine Entlastung auf dem gleichen Pfad verläuft wie eine Belastung. Als Konsequenz bilden sich alle Verzerrungen vollständig zurück.

Linear-elastisches Verhalten



Nichtlinear-elastisches Verhalten



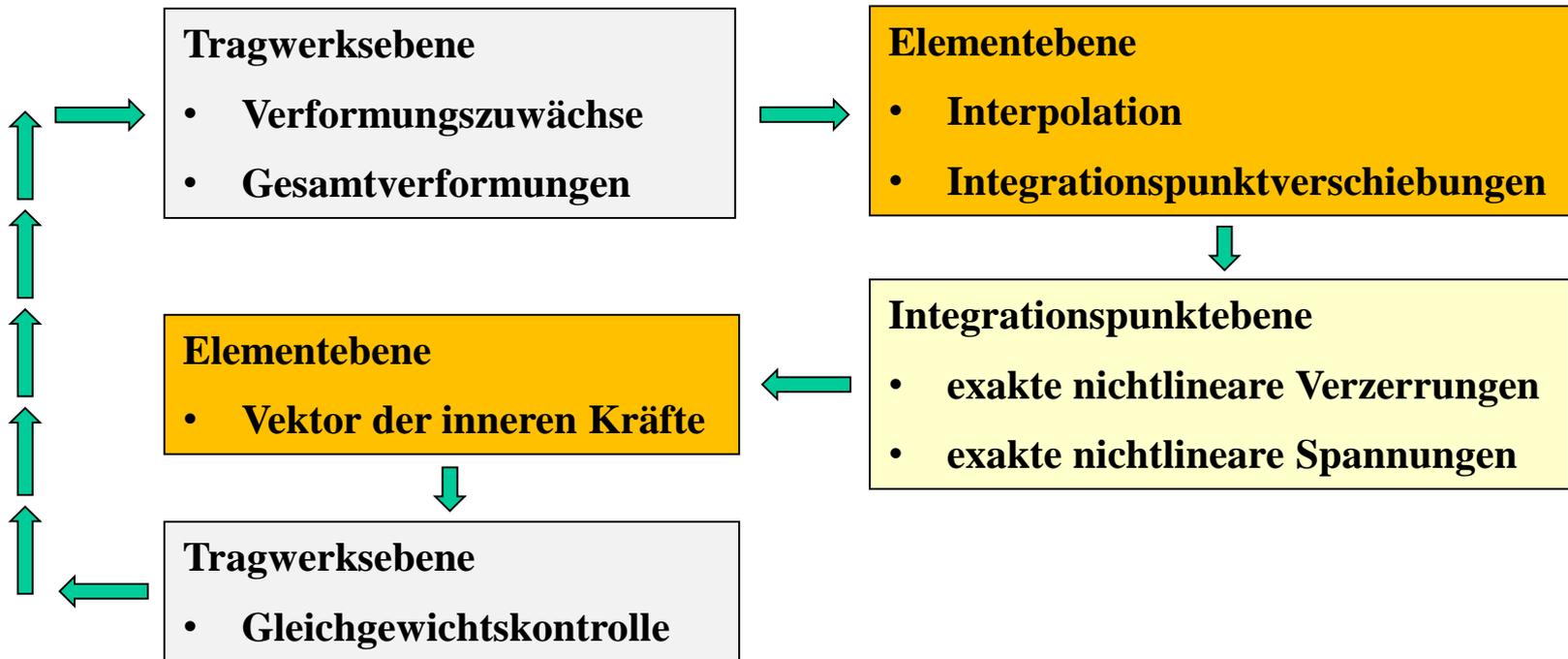
Es besteht ein eindeutiger funktionaler Zusammenhang zwischen der Verzerrung und der Spannung. Zu jedem Verzerrungszustand gehört genau ein einziger Spannungszustand.



menum

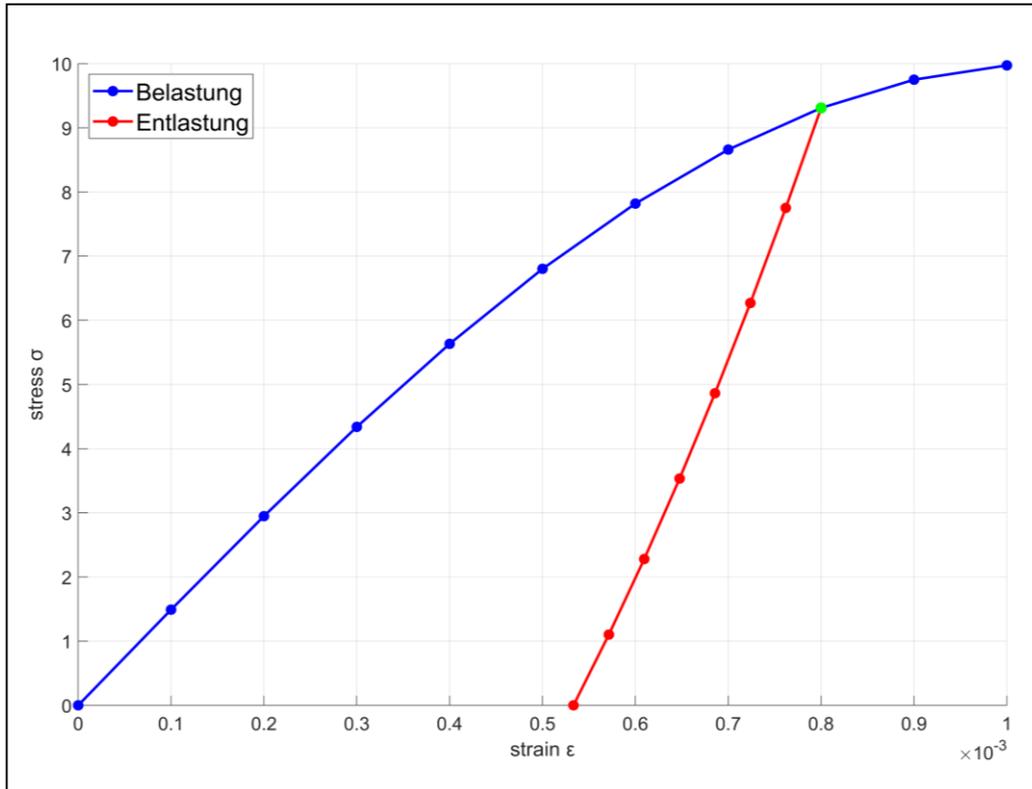
# Elastisches Verhalten II

Aus der Sicht der Berechnungsalgorithmen besteht bei elastischem Verhalten kein Unterschied zwischen geometrischer und physikalischer Nichtlinearität. Es liegen nichtlineare Gleichungen für die Kinematik und das Materialgesetz vor, die mathematisch exakt ausgewertet werden können. Wahlweise können auch lineare Gleichungen verwendet werden, so dass jede Kombination problemlos möglich ist.



menum

# Inelastisches Verhalten

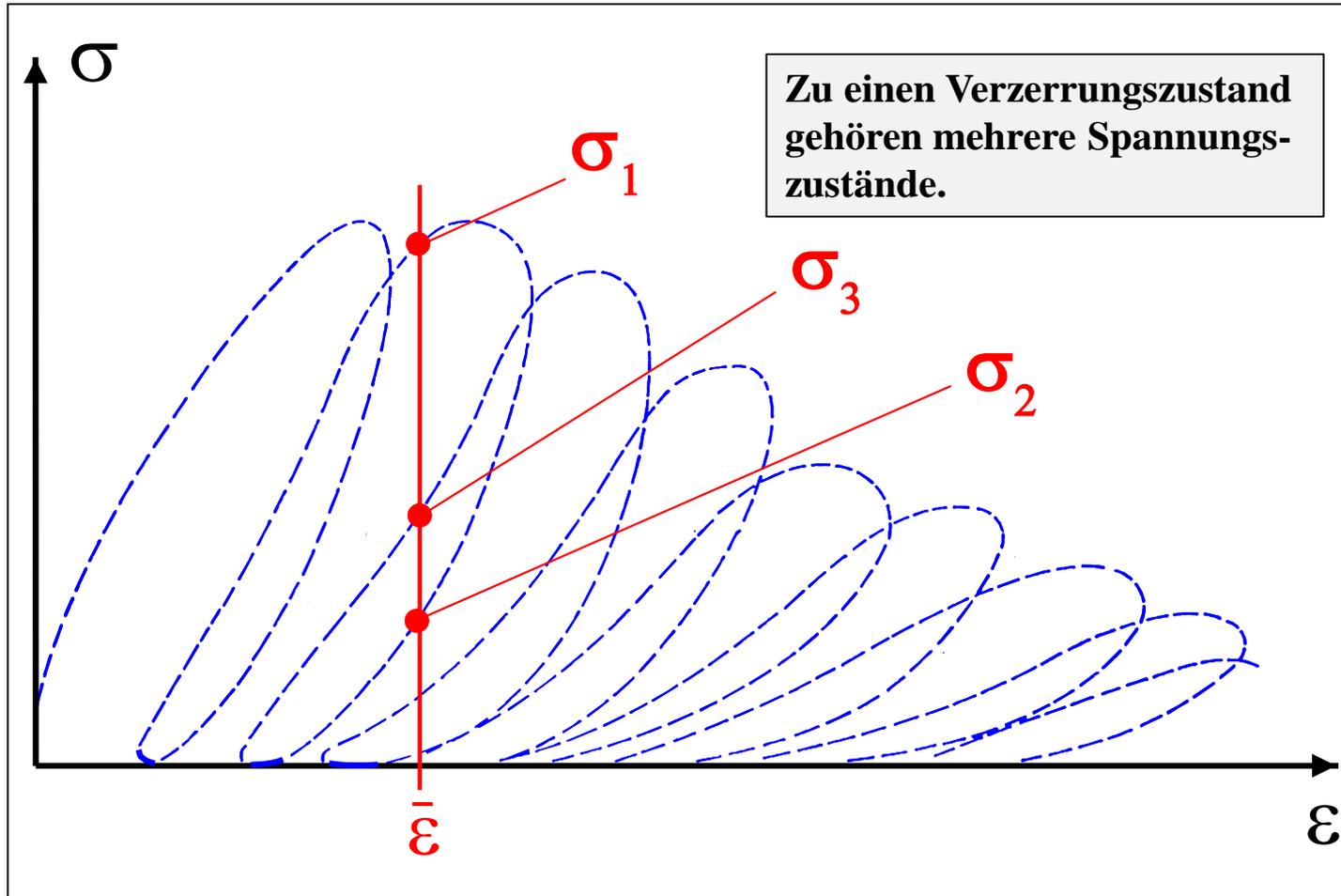


- Bei einem inelastischen Material verläuft der Entlastungsast steiler als der Belastungsast.
- Nach der vollständigen Entlastung verbleiben dauerhafte Verzerrungen: „*plastische Verzerrungen*“.
- Diese stellen ein Indiz für irreversible Änderungen im Materialgefüge dar. Wir sprechen von „*Schädigung*“.
- Schädigungen akkumulieren sich.
- Bei Erreichen einer kritischen Schädigungsgrenze versagt das Material.

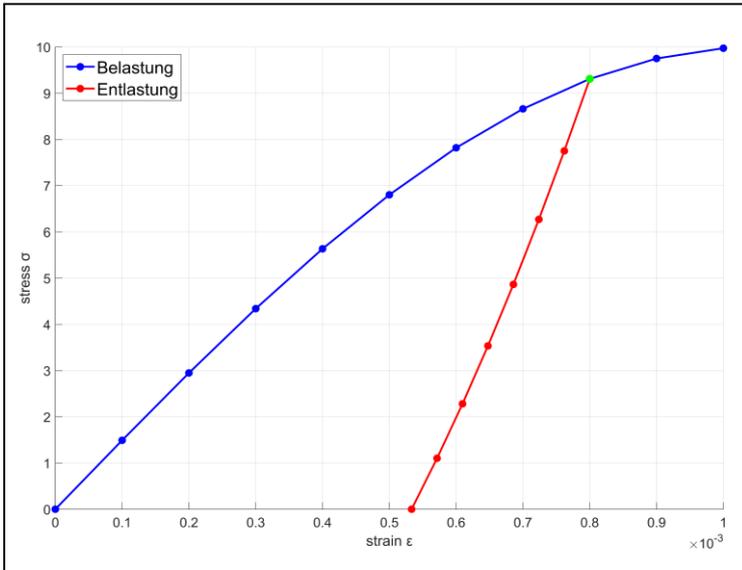
Das Materialgesetz ist nicht mehr eindeutig: der funktionale Zusammenhang geht verloren. Die Schädigung zieht die Notwendigkeit nach sich, die Verzerrungsgeschichte zu erfassen. Ein inelastisches Materialgesetz kann i.d.R. nur *inkrementell* formuliert werden.



# Beispiel: Zyklisches Verhalten von Beton



# Inkrementelles inelastisches Materialgesetz



In jedem Punkt gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Es wird weiter belastet,
2. Es wird entlastet.

Da beide Möglichkeiten bestehen, spaltet sich das Materialgesetz in zwei Äste auf: den Be- und den Entlastungsast. Je nach Vorzeichen des im grünen Punkt aufgetragenen Verzerrungsinkrements entsteht ein Spannungsinkrement nach der Gesetzmäßigkeit des Be- oder des Entlastungsastes. Diese Gesetzmäßigkeit existiert somit nicht für die Gesamtspannung, sondern nur für das Spannungsinkrement.

Inkrementelles Materialgesetz

$$d\sigma = E_T(\sigma, t) \cdot d\epsilon$$



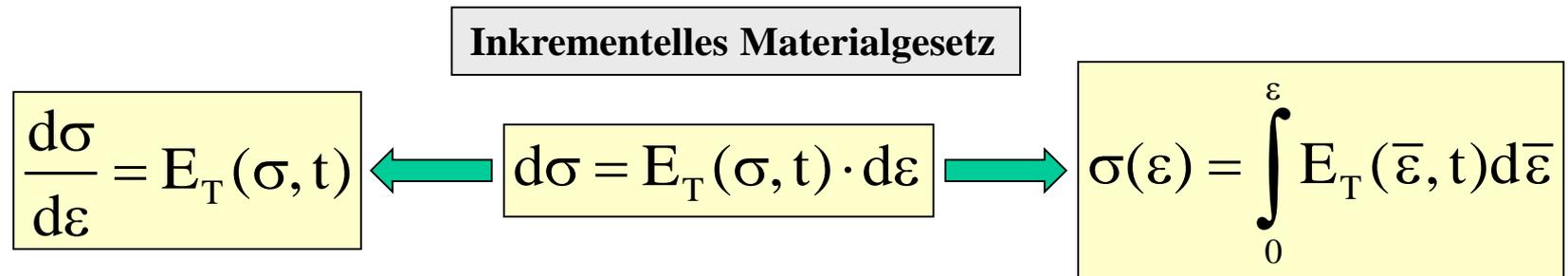
$$\sigma(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} E_T(\bar{\epsilon}, t) d\bar{\epsilon}$$

Die Gesamtspannung ergibt sich als Integral über die **Verzerrungsgeschichte**. Mathematisch handelt es sich um ein **Anfangswertproblem**.



MENUM

# Anfangswertproblem



Die Integration des differentiellen (inkrementellen) Materialgesetzes stellt ein **Anfangswertproblem** dar. Ausgangspunkt bildet ein bekannter Anfangszustand, i.d.R.  $\sigma=0$  für  $\varepsilon=0$ . Eine vorgegebene Lastgeschichte erzeugt eine Verformungsgeschichte, aus der eine Verzerrungsgeschichte resultiert. Die Lösung der Differentialgleichung links liefert die zugehörige Spannungsgeschichte. Anfangswertprobleme haben die Eigenschaft, dass die numerischen Fehler, die bei deren numerischer Lösung auftreten, akkumuliert werden.

Das Gleichgewichtsproblem auf Tragwerksebene stellt hingegen ein **Randwertproblem** dar. Numerische Fehler durch Linearisierungen können durch **Gleichgewichtssiterationen** eliminiert werden, so dass die numerische Lösung beliebig genau wird und damit als exakt anzusehen ist.

Bei Anfangswertproblemen gibt es derartige Korrekturiterationen nicht. Wir benötigen geeignete Algorithmen zur Lösung des Anfangswertproblems, können die Fehlerakkumulation aber nie vollkommen verhindern. Unsere Lösung wird **pfadabhängig**.



# Pfadabhängigkeit der Lösung

Wir lösen unser nichtlineares Problem grundsätzlich *inkrementell-iterativ*. Die Verwendung mehrerer Inkrementschritte hat zwei Vorteile:

1. Wir erhalten ein *Last-Verformungs-Diagramm*, welches uns Einblicke in das *nichtlineare Tragverhalten* gestatten. Die Berechnung nur des Endlastniveaus in einem einzigen Lastschritt ist nicht so aussagekräftig.
2. Bei einem einzigen großen Schritt benötigt man eventuell exzessiv viele Iterationen oder es kann sogar zu Konvergenzproblemen kommen. Die Aufteilung in mehrere Lastschritte ist oft numerisch stabiler und damit numerisch effizienter.

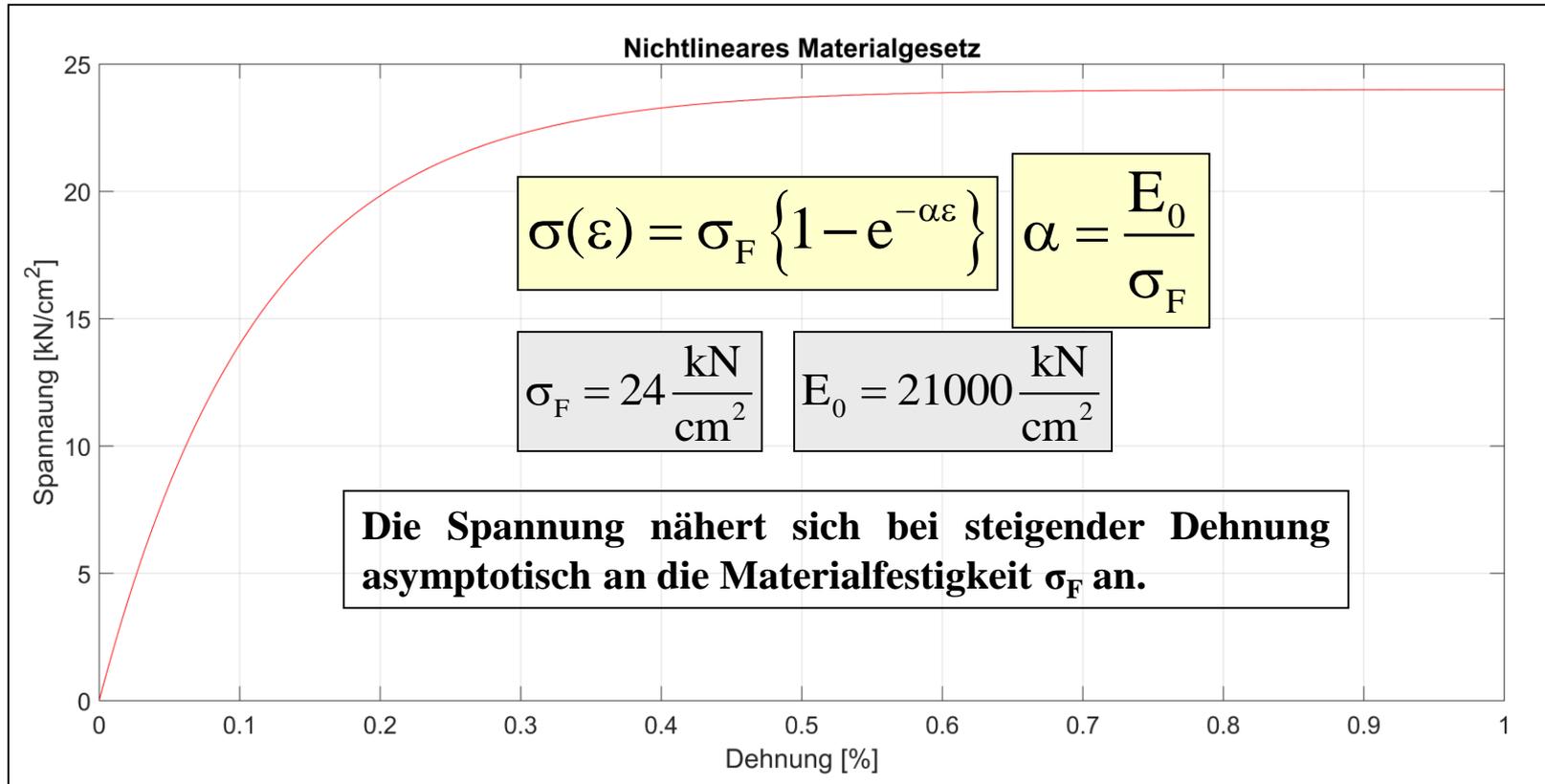
Dennoch gilt bei einer rein *geometrisch nichtlinearen* Berechnung: Das Ergebnis des Endlastniveaus ist immer das gleiche, egal wie viele Lastschritte man dazu benötigt. Man spricht von einer *pfadunabhängigen Lösung*.

Bei einer *physikalisch nichtlinearen* Berechnung erzeugen wir einen numerischen Fehler auf Materialpunktebene, den wir nicht durch Gleichgewichtsiterationen beseitigen können. Als Folge enthält unser Last-Verformungs-Diagramm einen Fehler, dessen Größe nicht ohne Weiteres angegeben werden kann. Eine unterschiedliche Anzahl von Lastschritten führt zu unterschiedlichen Last-Verformungs-Diagrammen. Die Endlösung hängt davon ab, auf welchem Weg wir zu dieser gelangt sind. Die Lösung ist *pfadabhängig*.



# Beispiel für ein nichtlineares Werkstoffgesetz

Wir nehmen ein nichtlineares Materialgesetz an, bei dem die Spannung exponentiell von der Dehnung abhängt. Da ein eindeutiger funktionaler Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\epsilon$  vorliegt, liegt **elastisches** Verhalten vor. An sich wäre hier keine inkrementelle Formulierung notwendig.



# Inkrementelle Formulierung des Materialgesetzes

Im vorliegenden nichtlinear-elastischen Fall können wir ohne numerischen Fehler die Gesamtspannung aus der Gesamtdehnung ermitteln. Im allgemeinen inelastischen Fall geht dies jedoch nicht: uns liegt nur ein inkrementelles Materialgesetz vor, bei dem ein Spannungsinkrement mit einem Dehnungsinkrement verknüpft wird.

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_F \left\{ 1 - e^{-\alpha\varepsilon} \right\}$$

$$\alpha = \frac{E_0}{\sigma_F}$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_T(\varepsilon) = \alpha\sigma_F e^{-\alpha\varepsilon}$$

$$E_T(\varepsilon = 0) = E_0$$

$$d\sigma = E_T(\varepsilon)d\varepsilon = \alpha\sigma_F e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon$$

$$\sigma(\varepsilon) = \int_{\bar{\varepsilon}=0}^{\bar{\varepsilon}=\varepsilon} E_T(\bar{\varepsilon})d\bar{\varepsilon}$$



# Lösung des Anfangswertproblems

Mathematisch stellt das inkrementelle Werkstoffgesetz ein **Anfangswertproblem** dar. Ausgehend von einer **Anfangsspannung** (i.d.R. Null) beschreibt die DGL die Entwicklung der Spannung in Abhängigkeit der Verzerrung. Der einfachste Algorithmus zur numerischen Lösung eines Anfangswertproblems 1. Ordnung ist die **Euler-Vorwärtsintegration**. Hierfür wird die Verzerrungsgeschichte in eine Anzahl  $N$  Verzerrungsinkremente endlicher Größe diskretisiert, wodurch das Integral in eine Summe übergeht. In jedem Inkrement wird angenommen, dass der tangentielle Elastizitätsmodul  $E_T$  konstant ist. Bei der **expliziten Vorwärtsintegration** wird als  $E_T$  der bekannte Wert am Anfang des Inkrements genommen, bei der **impliziten Rückwärtsintegration** der unbekannte Wert am Ende des Inkrements.

Summenformel zur Ermittlung der Gesamtspannung

$$\sigma = \sum_{k=1}^N E_T(\varepsilon_k) \Delta\varepsilon_k$$

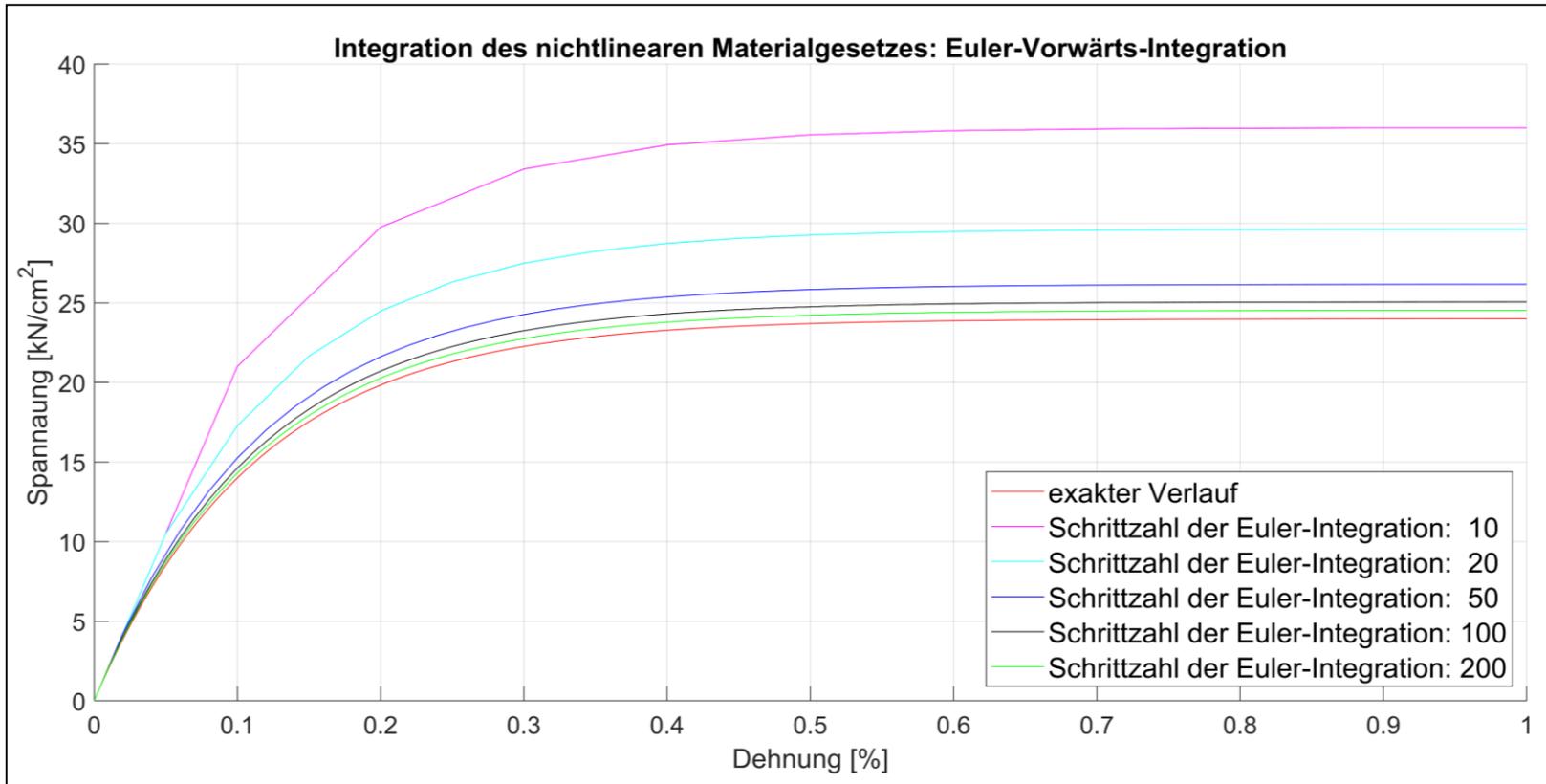
$$E_T(\varepsilon) = \alpha \sigma_F e^{-\alpha \varepsilon}$$

In dem vorliegenden Spezialfall, bei dem  $E_T$  eine Funktion der bekannten Verzerrung ist, kann  $E_T$  am Ende des Intervalls bestimmt werden, ebenso wie an jeder anderen Stelle innerhalb des Inkrements.



menum

# Euler-Vorwärts-Integration

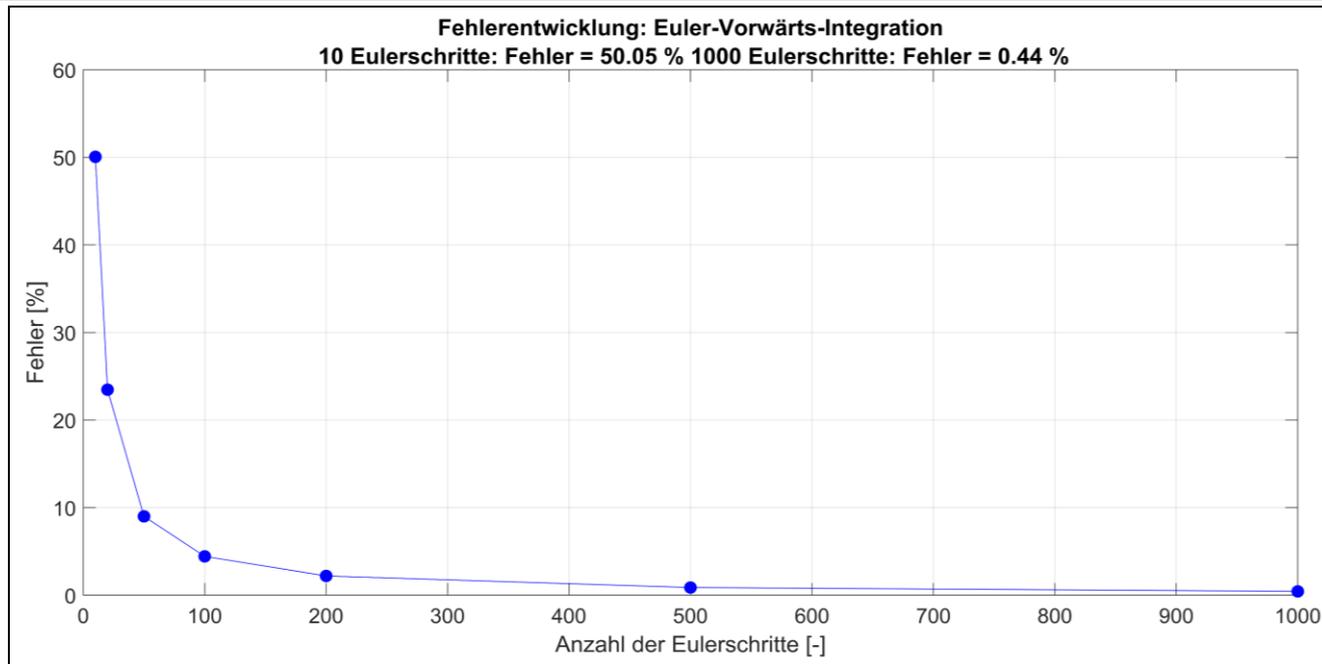


Man beobachtet eine zunehmende Abdrift der numerischen Lösung von der exakten Kurve, da die Steigung zu Beginn des Intervalls die sich abflachende Steigung innerhalb des Inkrements überschätzt. Bei steigender Inkrementzahl reduziert sich der Fehler zunehmend, verschwindet aber nie. Da die wahre Lösung unbekannt ist, ist auch die Größe des Fehlers unbekannt.



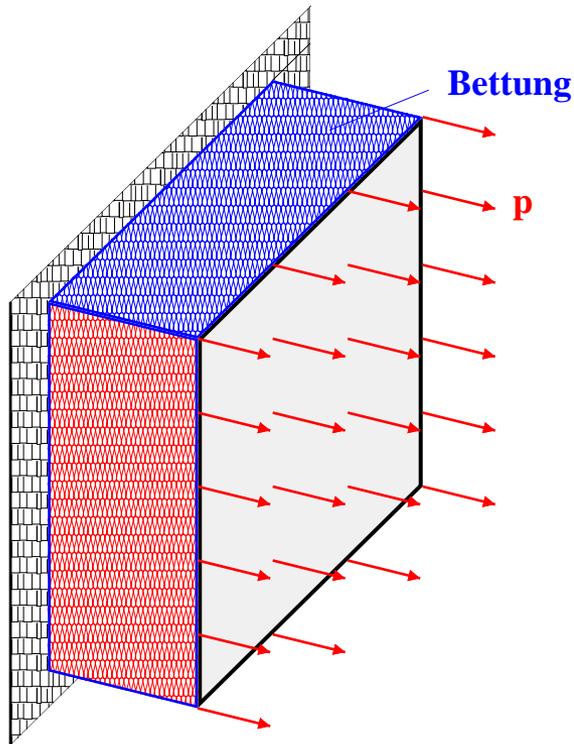
# Fehlerabschätzung

Die bei Anfangswertproblemen beobachtbare Abdrift von der wahren Lösung lässt sich nicht iterativ beseitigen. Man kann nur durch Vergleich zweier Lösungen mit unterschiedlichen Schrittzahlen herausfinden, wie groß deren Differenz ist. Bei zu großer Differenz war die gröbere Lösung offensichtlich noch nicht gut genug, aber man kann nur bedingt auf die Qualität der feineren Lösung schließen. Durch eine weitere Verfeinerung der Integration kann der Fehler auf ein beliebig kleines Maß reduziert werden. Die Anzahl der notwendigem Schritte kann jedoch sehr groß werden. Das wirft die Frage nach Verwendung besser Integrationsalgorithmen auf.



menum

# Beispiel: nichtlineare Bettung



Gleichgewicht

$$\sigma = p$$

geom. nichtlineare Kinematik

$$\varepsilon = v - \beta \cdot v^2$$

nichtlineares Materialgesetz

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_F \left\{ 1 - e^{-\alpha \varepsilon} \right\}$$

lineares Materialgesetz

$$\sigma(\varepsilon) = E_0 \cdot \varepsilon$$

geometrisch nichtlinear, physikalisch linear

$$E_0 \left\{ v - \beta v^2 \right\} = p$$

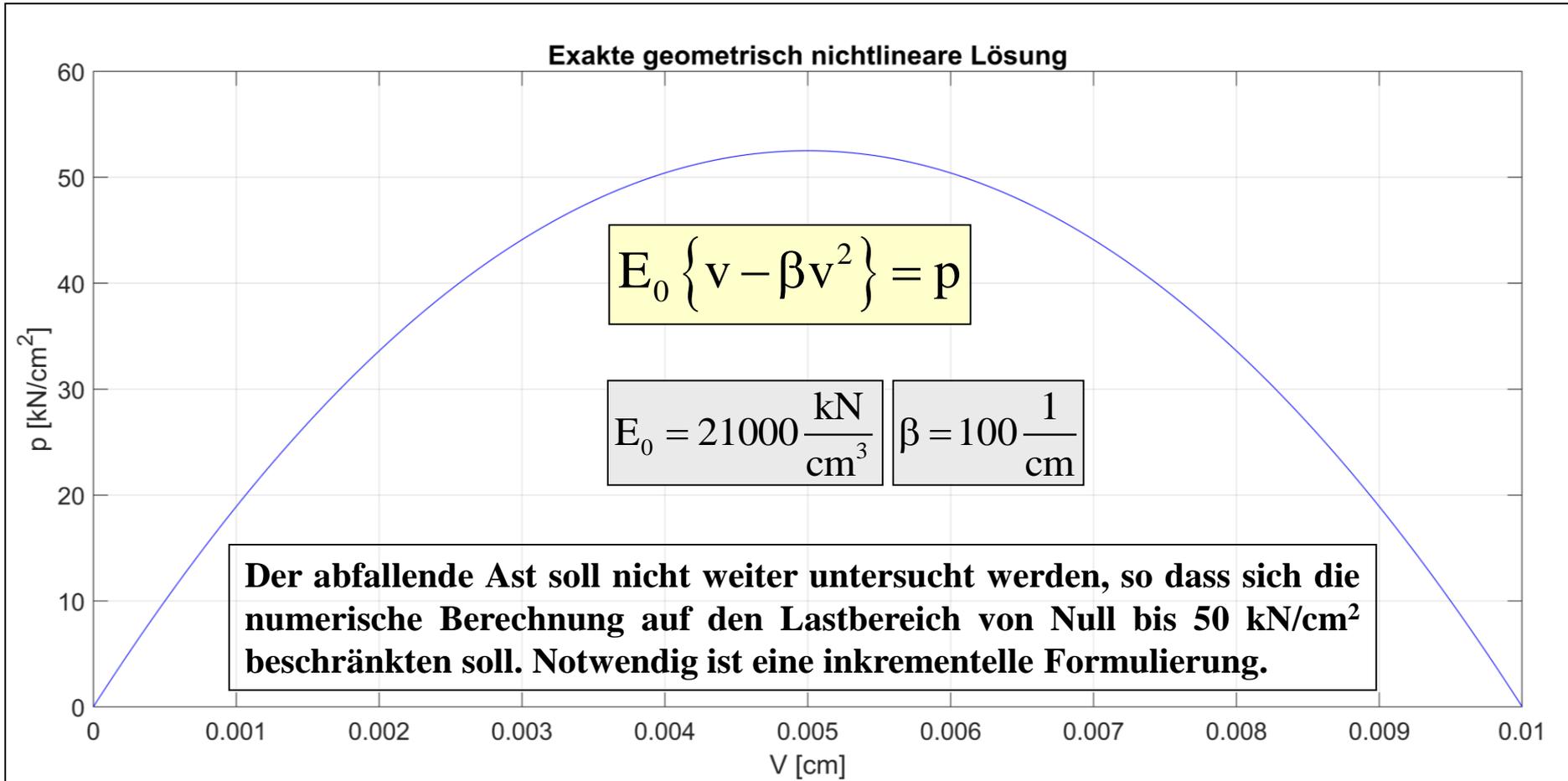
geometrisch nichtlinear, physikalisch nichtlinear

$$\sigma_F \left\{ 1 - e^{-\alpha(v - \beta v^2)} \right\} = p$$



menum

# Exakte rein geometrisch nichtlineare Lösung



# Inkrementelle Formulierung

geom. nichtlineare Kinematik

$$\varepsilon = v - \beta \cdot v^2 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(\bar{v} + \Delta v) = \varepsilon(\bar{v}) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \Delta v \approx \bar{v} - \beta \cdot \bar{v}^2 + (1 - 2\beta \bar{v}) \Delta v$$

lineares Materialgesetz

$$\sigma(\varepsilon) = E_0 \cdot \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \sigma(\bar{\varepsilon} + \Delta \varepsilon) = E_0 \cdot \bar{\varepsilon} + E_0 \cdot \Delta \varepsilon$$

Gleichgewicht im Nachbarzustand

$$\sigma(\bar{v} + \Delta v) = E_0 (\bar{v} - \beta \cdot \bar{v}^2) + E_0 (1 - 2\beta \bar{v}) \Delta v = p + \Delta p$$



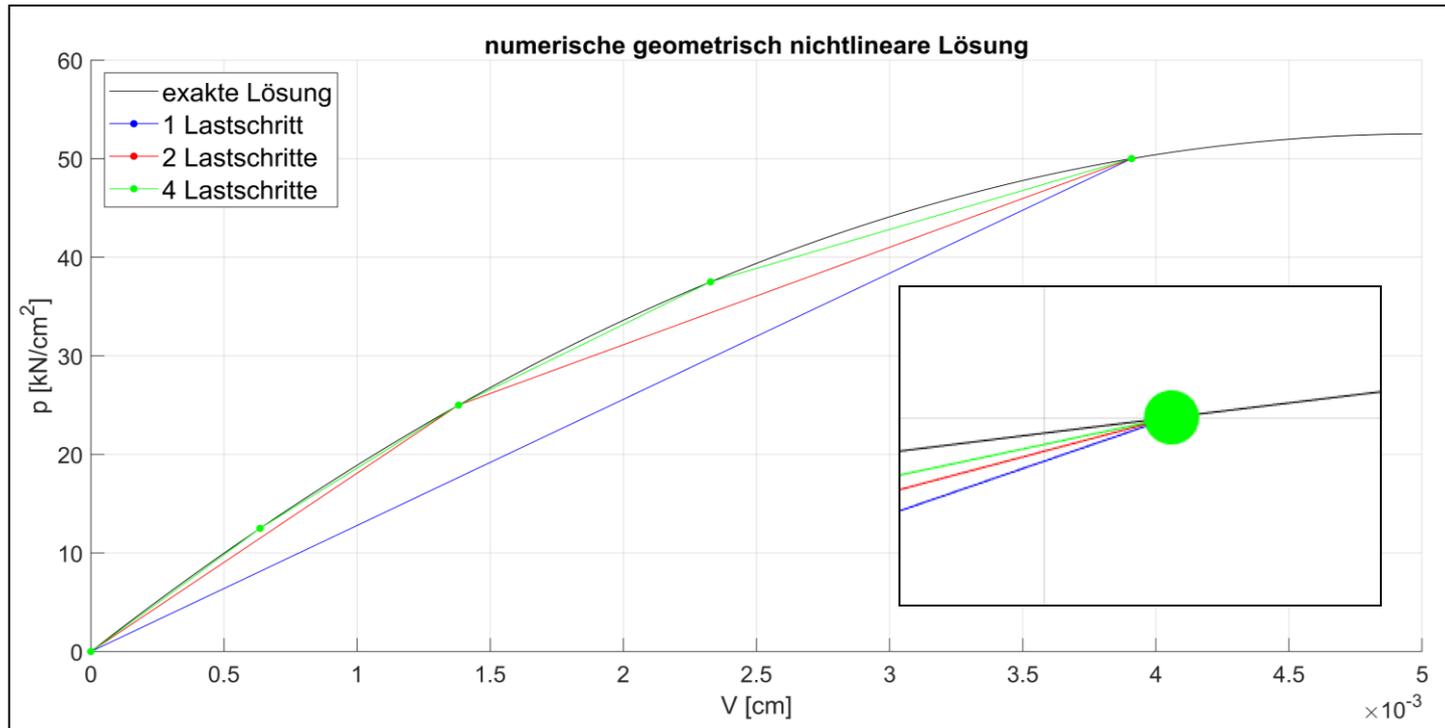
$$E_0 (1 - 2\beta \bar{v}) \Delta v = p + \Delta p - E_0 (\bar{v} - \beta \cdot \bar{v}^2) \quad \longrightarrow \quad K_T = E_0 (1 - 2\beta \bar{v})$$

$$F_i = E_0 (\bar{v} - \beta \cdot \bar{v}^2)$$



menum

# Numerische geometrisch nichtlineare Lösung



Die Lösung ist **pfadunabhängig**: das Endergebnis hängt nicht von der Anzahl der Lastschritte, d.h. dem Last-Verformungspfad, ab! Bei einer entsprechenden Genauigkeit (gewählt:  $10^{-7}$ ) liegen alle Punkte exakt auf der analytischen Kurve; insbesondere verdecken sich alle Kreissymbole des Endlastschrittes vollständig. Die Verwendung mehrerer Lastschritte bildet den Last-Verformungs-Pfad besser ab, ohne die Genauigkeit der einzelnen Punkte zu beeinflussen.



menum

# Materialpunktebene – Systemebene

Das Anfangswertproblem wird auf Materialpunktebene gelöst. Die Materialpunkte sind identisch mit den Integrationspunkten der finiten Elemente. Die numerische Integration über den Elementbereich (Gaußintegration: Summe über alle Gaußpunkte) liefert den Vektor der inneren Kräfte des Elements. Die Elementvektoren werden mittels der direkten Steifigkeitsmethode zu Systemvektoren zusammengefügt.

Integrationspunkt

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}^{\boldsymbol{\varepsilon}=\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \mathbf{E}_T(\boldsymbol{\varepsilon}) d\boldsymbol{\varepsilon}$$



finites Element

$$\mathbf{f}_i = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV$$



Systemebene

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{V} = \mathbf{P} - \mathbf{F}_i$$

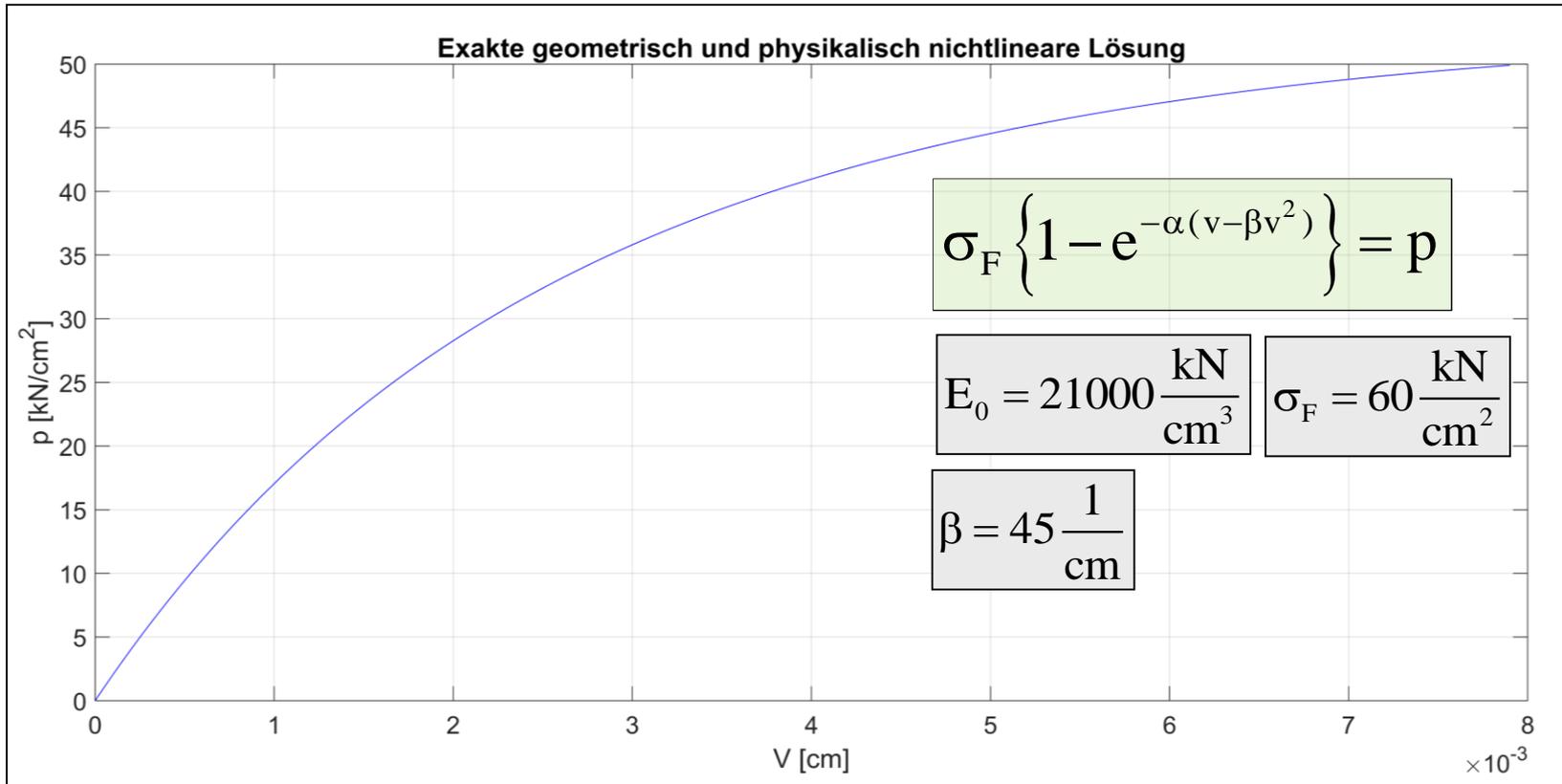
Die Iteration auf Systemebene terminiert bei Erreichen eines Gleichgewichtszustandes. Sofern der Vektor  $\mathbf{F}_i$  der inneren Kräfte korrekt ermittelt wird, ist es egal, auf welchem Weg man diesen Gleichgewichtszustand erreicht. Diese Tatsache motivierte das modifizierte Newton/Raphson-Verfahren. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass ein nicht korrekt ermittelter Vektor der inneren Kräfte zwangsläufig zu einem falschen Gleichgewichtszustand führt. Die Fehlerquelle für den Vektor der inneren Kräfte liegt in der ungenauen Lösung des Anfangswertproblems auf Materialpunktebene.



menum

# Exakte vollständig nichtlineare Lösung

Durch das Aufweichen des Materials stellen sich größere Verformungen ein. Um nicht in der abfallenden Ast des Last-Verformungs-Pfades zu gelangen und trotzdem nennenswerte inelastische Effekte zu bekommen, wurden die Parameter neu eingestellt.



menum

# Inkrementelle Formulierung

nichtlineares Materialgesetz

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_F \left\{ 1 - e^{-\alpha\varepsilon} \right\}$$

inkrementelles Materialgesetz

$$\sigma(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) = \sigma_F \left\{ 1 - e^{-\alpha\bar{\varepsilon}} \right\} + E_T \cdot \Delta\varepsilon$$

$$E_T(\bar{\varepsilon}) = \alpha\sigma_F e^{-\alpha\bar{\varepsilon}}$$

tangentiale Matrix

$$K_T = E_T (1 - 2\beta\bar{v})$$

Vektor der inneren Kräfte

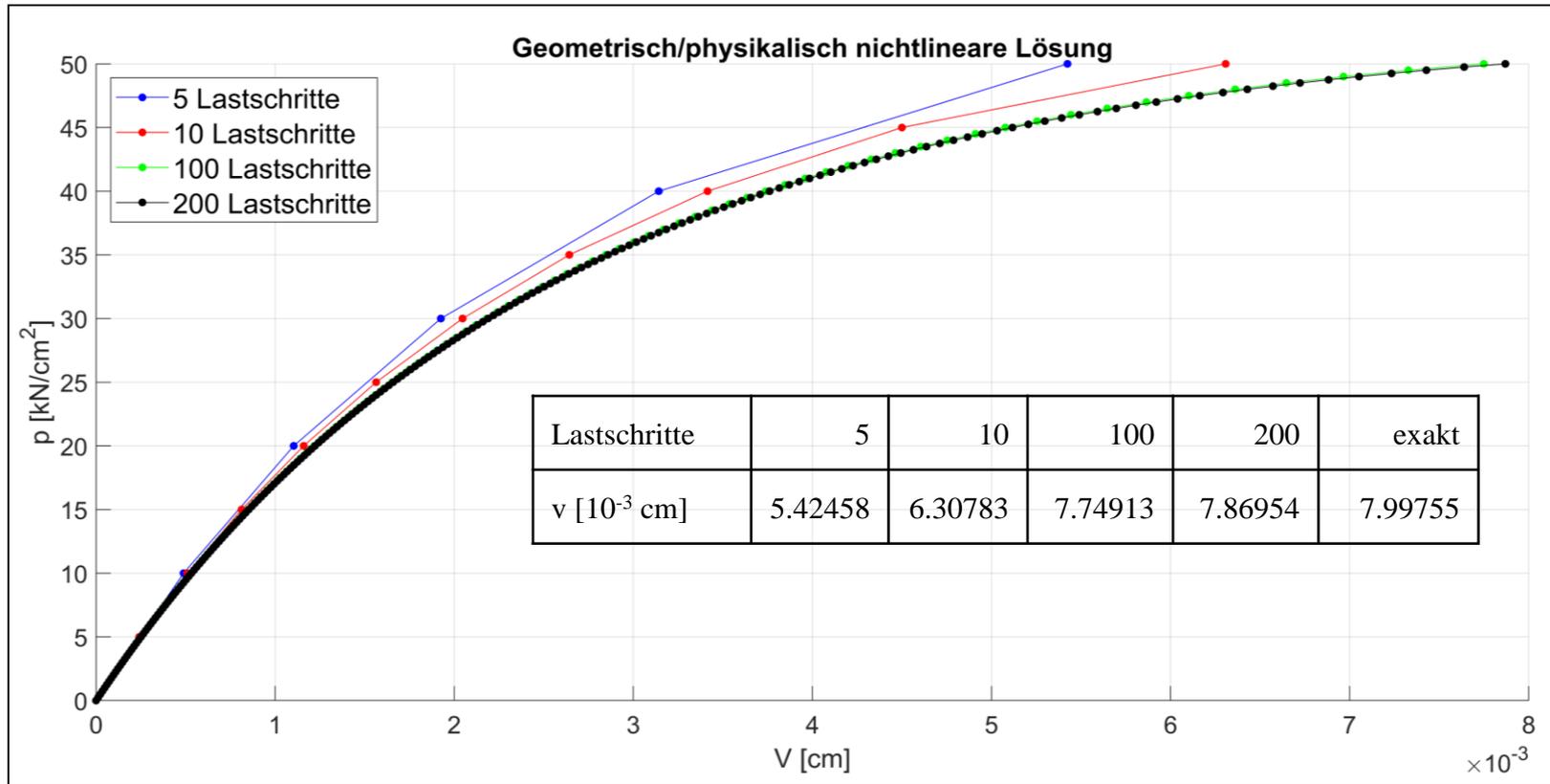
$$F_i = \sigma_F \left\{ 1 - e^{-\alpha\bar{\varepsilon}} \right\} \quad \bar{\varepsilon} = \bar{v} - \beta \cdot \bar{v}^2$$

Durch die Lastinkrementierung und die Iterationen entsteht automatisch eine inkrementelle Verzerrungsgeschichte. In jedem der damit entstehenden Verzerrungsinkremente wird eine Euler-Vorwärtsintegration mit einem Schritt vorgenommen. Dadurch entsteht ein Fehler in der Ermittlung der Spannung und damit in Vektor der inneren Kräfte. Also ist zu erwarten, dass die Lösung von der Anzahl der Lastschritte abhängt, da diese die Anzahl und Größe der Verzerrungsinkremente beeinflusst.



menum

# Numerische vollständig nichtlineare Lösung



**Wir beobachten eine klare Abhängigkeit der Lösung von der Anzahl der Lastschritte. Wegen der statischen Bestimmtheit konvergiert die Spannung immer gegen die äußere Last, aber die zugehörige Verformungszustand ist fehlerbehaftet. Wir benötigen eine hohe Zahl von Schritten.**



menum

# Algorithmus auf Materialpunktebene

Momentan sind die Euler-Schritte unmittelbar an die Lastschritte/Iterationen gekoppelt. Zur Erreichung eines befriedigenden Gesamtergebnisses benötigt man wegen der mangelnden Qualität des Lösung des Anfangswertproblems eine sehr hohe Lastschrittzahl. Dabei ist zu beachten:

Auf Systemebene erfolgt die Gleichgewichtsiteration für große Systemmatrizen mit tausenden oder zehntausenden Unbekannten, den Knotenfreiheitsgraden. Auf Materialpunktebene werden viele Anfangswertprobleme (in jedem einzelnen Iterationspunkt) gelöst, die jedoch klein sind (im 3D-Fall 6 Spannungskomponenten).

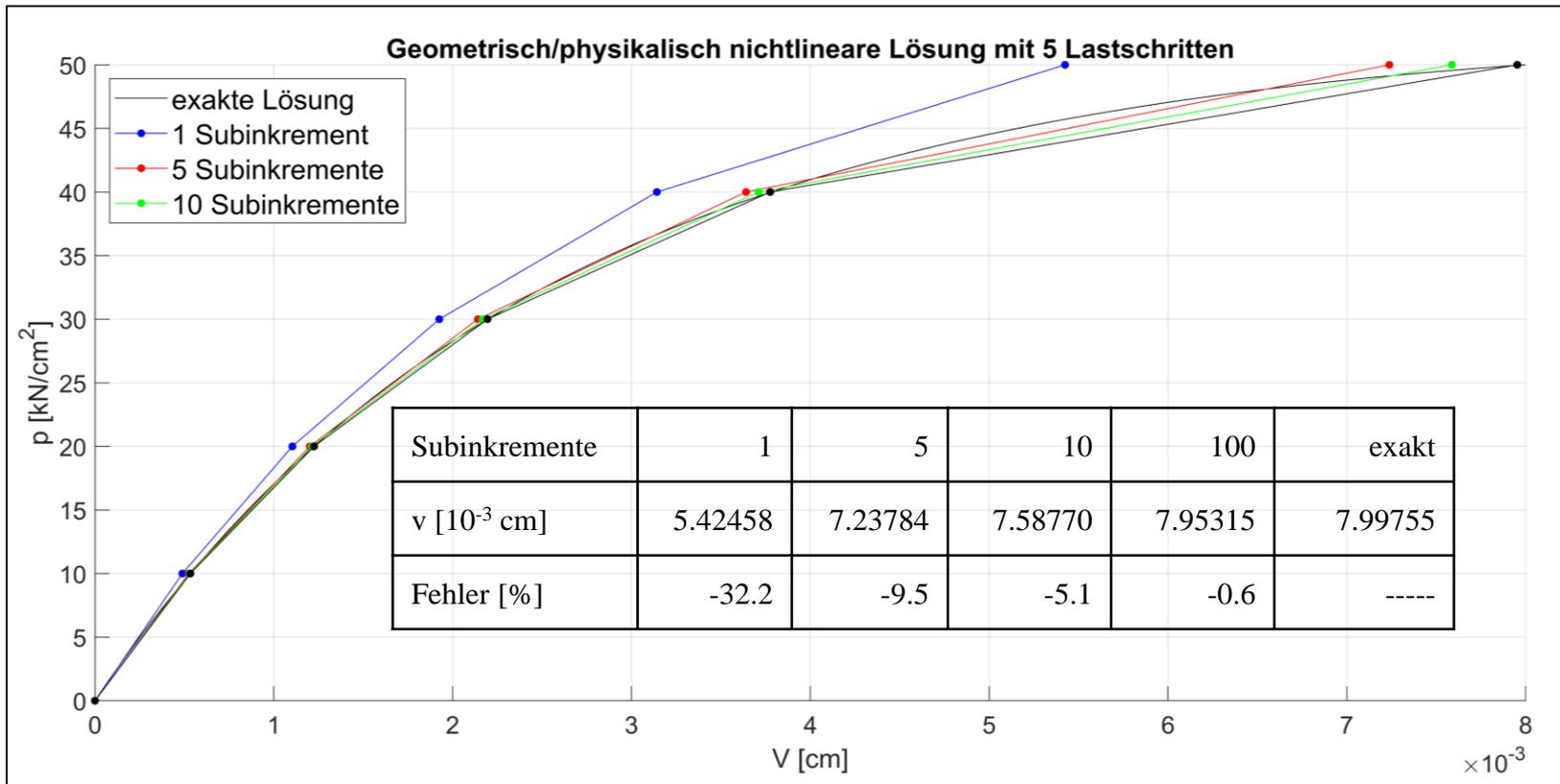
Somit ist es unsinnig, die Schrittweiten auf System- und Materialpunktebene zu koppeln. Die Algorithmen sind an sich getrennt und können damit unabhängig voneinander gesteuert werden. Die einfachste Steuerung auf Materialpunktebene besteht darin, das Verzerrungsinkrement, welches von der Systemebene den Integrationspunkt nach unten gereicht wird, dort in eine Anzahl Subinkremente aufzuteilen und mit diesen die Euler-Integration vorzunehmen.

Hierbei könnte man sich neben einer fixen Anzahl von Subinkrementen auch eine adaptive Steuerung vorstellen, bei der die Anzahl der Subinkremente automatisch so gewählt wird, dass eine Fehlerschranke eingehalten wird.

Wir wählen eine fixe Zahl von 5 Lastschritten und variieren die Zahl der Subinkremente.



# Lösung mit Subinkrementen

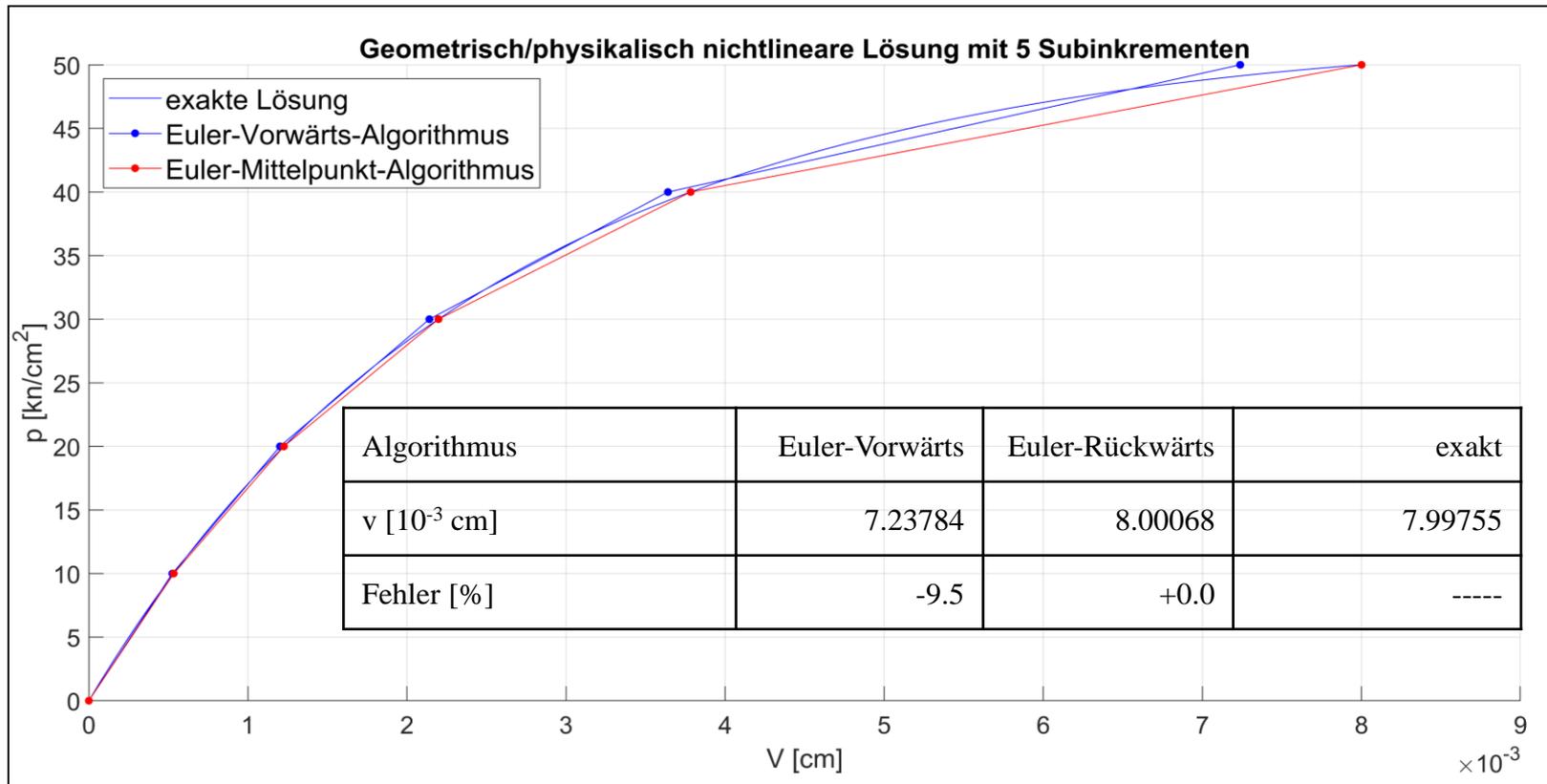


Mittels der Subinkrementierung gelingt es, die Genauigkeit auf Materialpunktebene zu steigern, ohne als Kollateralschaden eine exzessive Anzahl von Lastschritten zu benötigen. Man nähert sich der exakten Lösung an, aber die Anzahl der Subinkremente ist sehr groß.



menum

# Lösung mit Euler-Mittelpunkt-Integration



**Wir wechseln auf den Euler-Mittelpunkt-Algorithmus. Die Ergebnisse sind signifikant besser. Bei nur 5 Subinkrementen reduziert sich der Fehler von 9.5 % auf weniger als 0.1 %. Der Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen auf Materialpunktebene kommt große Bedeutung zu.**



MENU

# Zwischenfazit I: Materialpunktebene

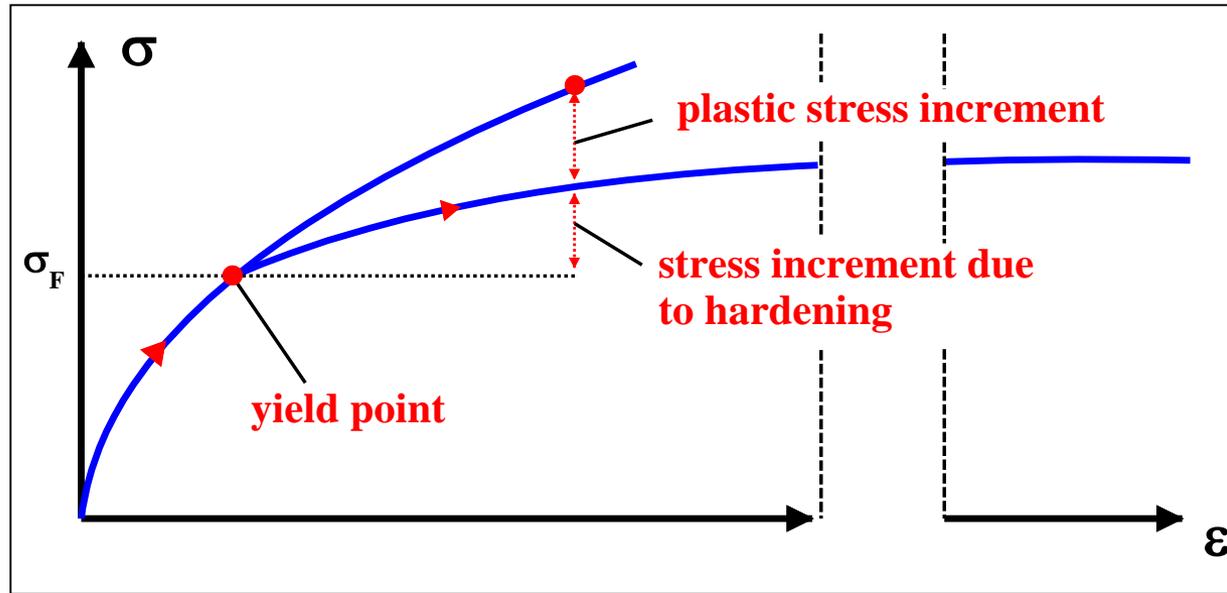
Wir haben erkannt, dass auf Materialpunktebene zusätzliche numerische Algorithmen zur Berechnung des Spannungszustandes mittels eines inkrementellen Werkstoffgesetzes notwendig sind. Zur Illustration haben wir die Lösung des Anfangswertproblems durch Euler-Verfahren studiert. Hierfür stehen auch weitere Lösungstechniken zur Verfügung. Neben der nackten Lösung des Anfangswertproblems können je nach Materialformulierung weitere algorithmische Fragestellungen wie die Erfüllung von Konsistenzbedingungen auftreten.

Die Materialpunktebene hat die Eigenschaft, dass die dort entstehenden Fehler auf die Systemebene hochgereicht werden und dort nicht iterativ beseitigt werden können, so dass es zu einer Fehlerakkumulation kommt. Die Größe der akkumulierten Fehler hängt von der Größe der Lastschritte ab: die Lösung wird pfadabhängig!

Unser Beispiel suggerierte fälschlicherweise, dass eine „exakte“ Lösung (ausreichend viele Subinkremente) des Anfangswertproblems die Pfadabhängigkeit beseitigen würde. Das ist jedoch ein Trugschluss, der dadurch entsteht, dass wir ein 1D-problem betrachtet haben. Im allgemeinen Fall treten jedoch alle 6 Verzerrungskomponenten auf. Die Lösung des Anfangswertproblems für ein von „oben“ kommendes Verzerrungsinkrement erfolgt stets unter der Annahme, dass die Verhältnisse der Verzerrungskomponenten zueinander in diesem Inkrement gleichsam „eingefroren“ sind. Das ist infolge der Nichtlinearität aber nicht der Fall, so dass auch der beste Algorithmus diesen grundsätzlichen Defekt nicht beseitigen kann.



# Versagensmodus I: Duktiles Verhalten (Metalle)

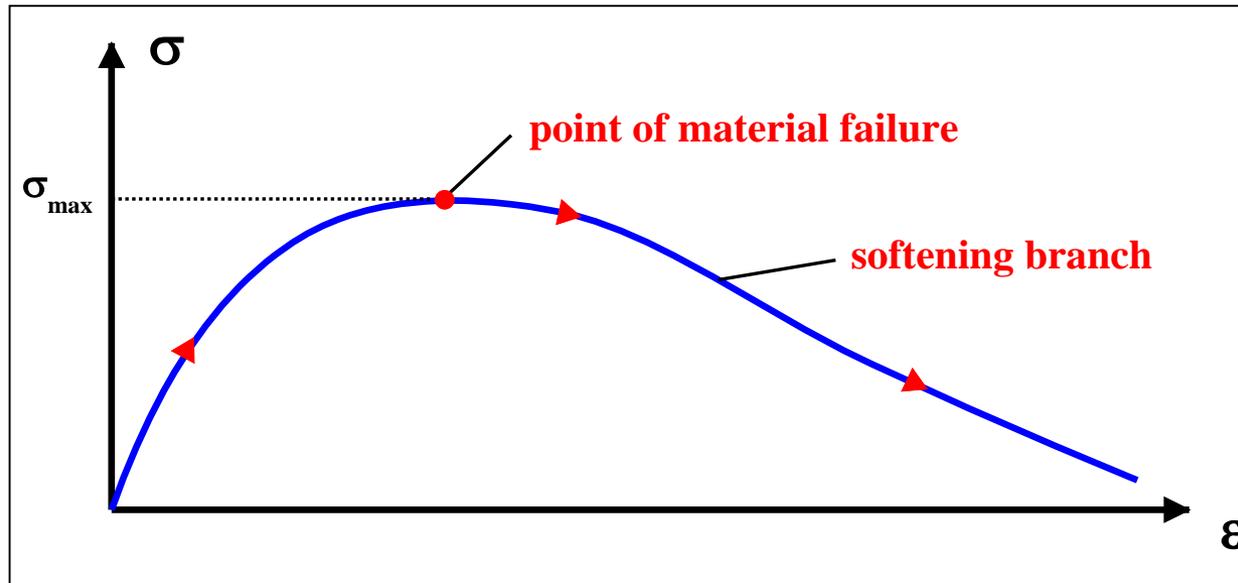


Duktiles Verhalten zeigen Metalle. Es ist gekennzeichnet durch:

- Bei einem spezifischen Spannungsniveau (der Fließspannung) nimmt der tangentielle E-Modul schlagartig ab.
- Nach dem Fließpunkt verfestigt das Material – der Grenzfall wäre ein vollständiger Verlust der tangentialen Materialsteifigkeit (idealplastisches Verhalten). Die Kurve sinkt jedoch nie ab: wir haben stabiles Materialverhalten.
- Nur das plastische Spannungszinkrement muss im Tragwerk umverteilt werden.



# Versagensmodus II: Sprödes Verhalten

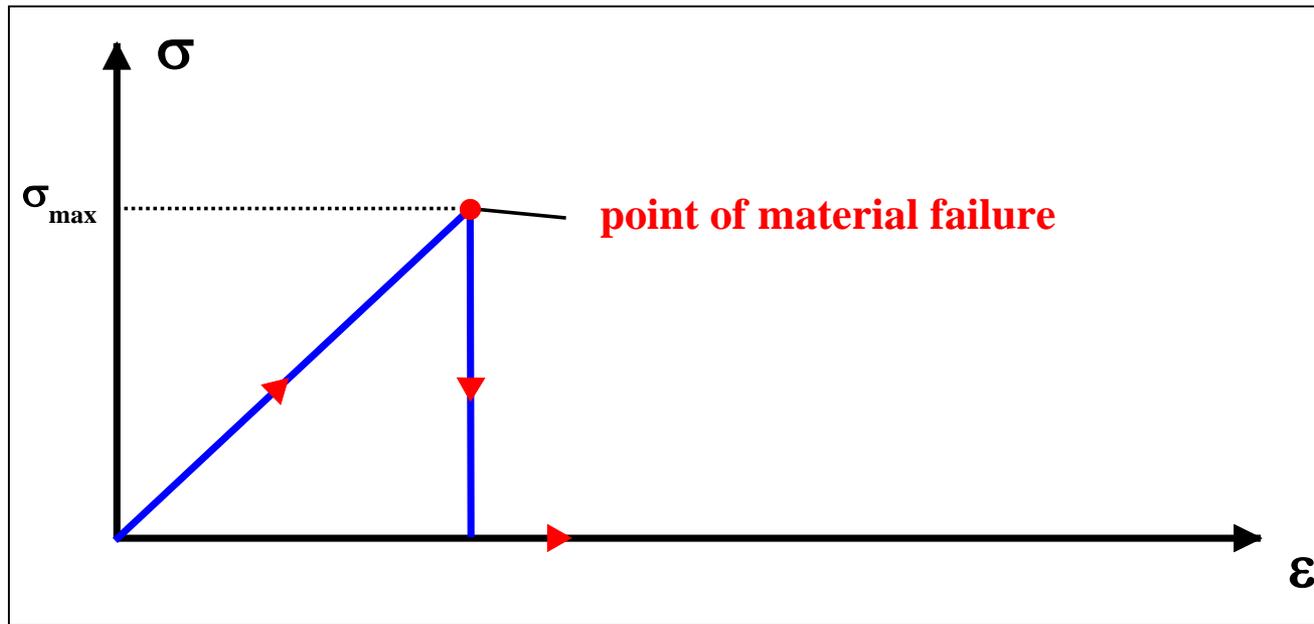


**Sprödes Verhalten zeigt z.B. Beton. Hier gilt:**

- **Nach Erreichen einer maximalen Spannung entfestigt das Material: trotz steigender Verzerrung nimmt die aufnehmbare Spannung kontinuierlich ab.**
- **Damit kann das Material keine großen Dehnungen ertragen: mit Erreichen der Maximalspannung ist das Material im Prinzip zerstört.**
- **Durch die Entfestigung muss die gesamte Maximalspannung binnen kurzer Zeit auf andere Materialpunkte umgelagert werden.**



# Versagensmodus III: Plötzliches Versagen



**Plötzliches Versagen tritt bei abrupten Reißprozessen wie z.B. der Zugrissbildung in unbewehrtem Beton auf:**

- Bei Erreichen einer kritischen Spannung wird das Material schlagartig zerstört und die bisherige Spannung fällt abrupt auf Null ab.
- Die bisherig vom Material getragene Spannung muss instantan umgelagert werden.



# Zwischenfazit II: Versagensmechanismen

Materialversagen kann auf stark unterschiedliche Weise geschehen. Grundsätzlich geht mit dem Materialversagen ein Verlust an Spannungsaufnahmekapazität einher. Hierbei kann zwischen *stabilem* und *instabilem* Materialverhalten unterschieden werden:

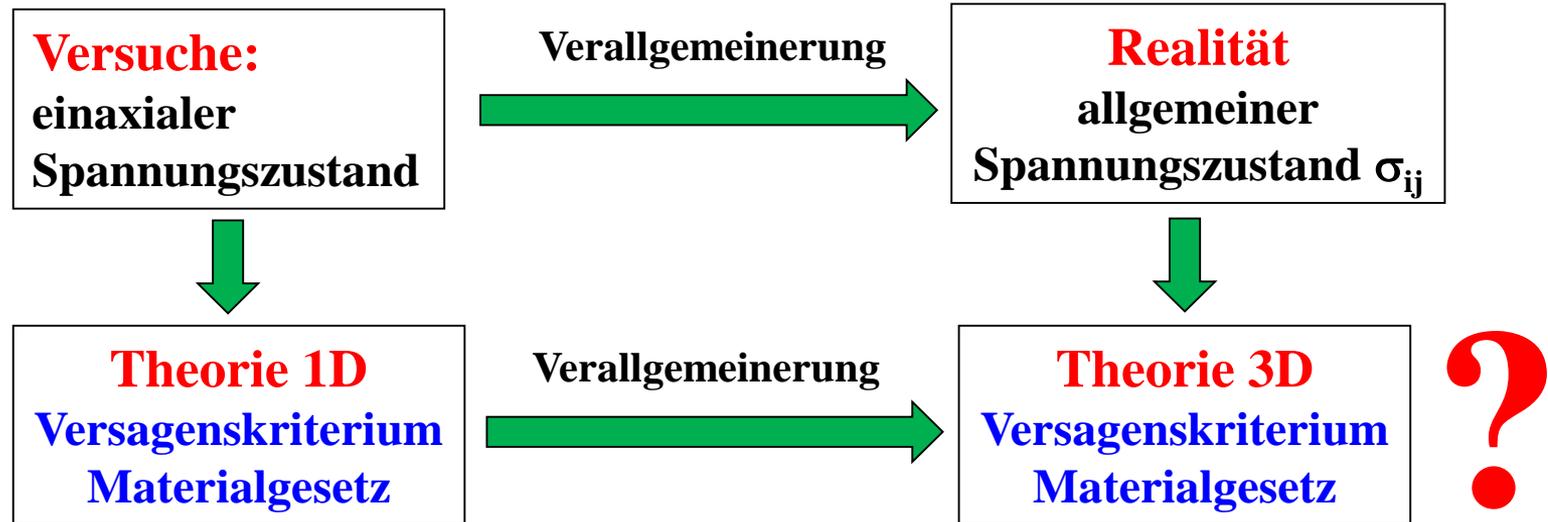
- Bei *stabilem Materialverhalten* leidet nur die Fähigkeit des Materials, *zusätzliche* Spannungen aufzunehmen. Die bis zum Versagen dem Material innewohnende Spannung kann weiterhin aufgenommen werden.
- Bei *instabilem Materialverhalten* sinkt die Fähigkeit, die *vorhandenen* Spannungen *weiterhin* zu tragen, ab. Der Verlust an Spannungsaufnahmekapazität kann abrupt oder kontinuierlich vonstatten gehen.

Der Versagensmodus auf Materialpunktebene beeinflusst das Konvergenzverhalten auf Tragwerksebene bei der Gleichgewichtssiteration. Eigene Erfahrungen des Verfassers haben z.B. gezeigt (ohne Anspruch auf Allgemeingültigkeit):

- Abruptes Versagen ist eher unproblematisch. Zwar muss die gesamte bisherige Spannung auf noch intakte Materialpunkte/Bauteile umgelagert werden, aber das geschieht mit wenigen Iterationen, sofern kein Kaskadenversagen eintritt.
- Entfestigendes Verhalten hingegen benötigt oftmals viele Iterationen, da der gesamte Entfestigungsast iterativ durchlaufen werden muss, bis der Prozess des kontinuierlichen Verlustes an innerer Tragfähigkeit angeschlossen ist.



# Grundsätzliche Fragestellung I: Verallgemeinerung von 1D auf 3D



# Grundsätzliche Fragestellung II: Übergang auf die Querschnittsebene

