

# Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

Vorlesung 7

Theorie II. Ordnung

Teil A: Theorie



menum

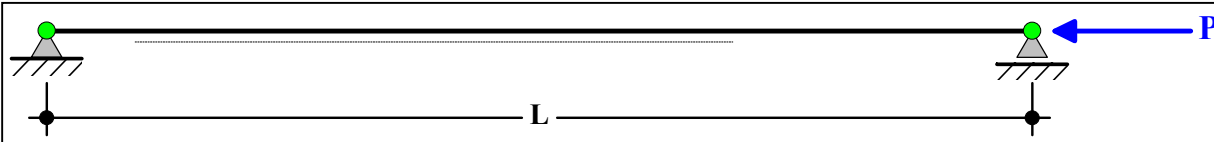
# Grundproblem



menu

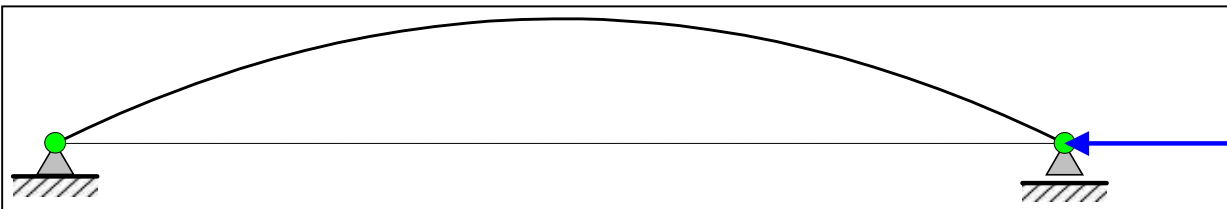
# Verzweigungsproblem oder Spannungsproblem?

## Unrealistisches perfektes Tragwerk



Das *perfekte Tragwerk* ist durch einen reinen *Normalkraftzustand* gekennzeichnet. Aus diesem *verzweigt* es bei Erreichen der Knicklast durch ein rein *elastisches Stabilitätsversagen*. Die Materialfestigkeit spielt hierbei keine Rolle.

## Realistisches imperfektes Tragwerk



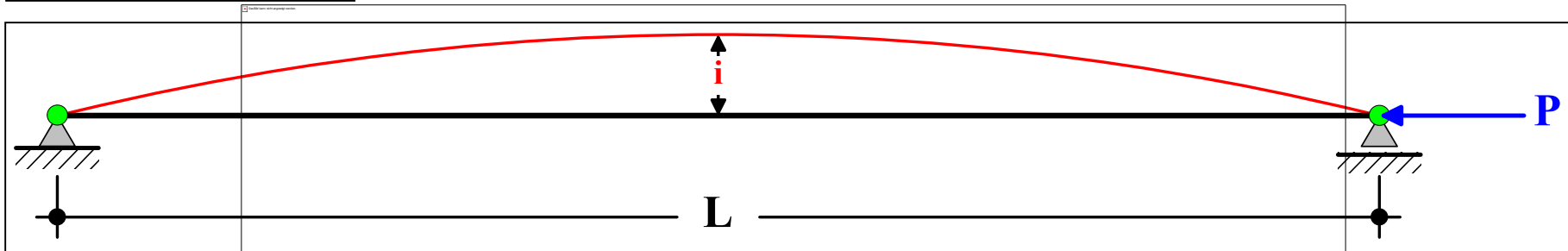
Im „echten Leben“ treten jedoch immer Biegeeffekte auf, sei es durch spannungsfreie Vorverformungen (*Imperfektionen*) oder durch Lasten quer zur Stabachse, so dass kein perfekt gerader Stab, sondern ein *vorgekrümmtes* Tragwerk vorliegt, welches sich wie ein Bogen verhält und von Beginn an durch *Biegemomente* beansprucht wird. Was passiert jetzt?



menum

# Imperfekter Träger: Eulerfall 2

## Beispiel: Eulerfall 2



### Zahlenwerte:

$L = 5.0 \text{ m}$   
 $i = L/100$   
 $EI = 10000.0 \text{ kNm}^2$

### Knicklast des perfekten Trägers

$$P_{ki} = \frac{EI \cdot \pi^2}{L^2} = \frac{10000.0 \cdot \pi^2}{5^2} = 3947.84 \text{ kN}$$

Es wird eine *kleine Imperfektion* von 1/100 der Spannweite angesetzt. Wie wirkt sich diese Imperfektion aus? Zunächst führen wir eine *klassische Stabilitätsuntersuchung* durch.

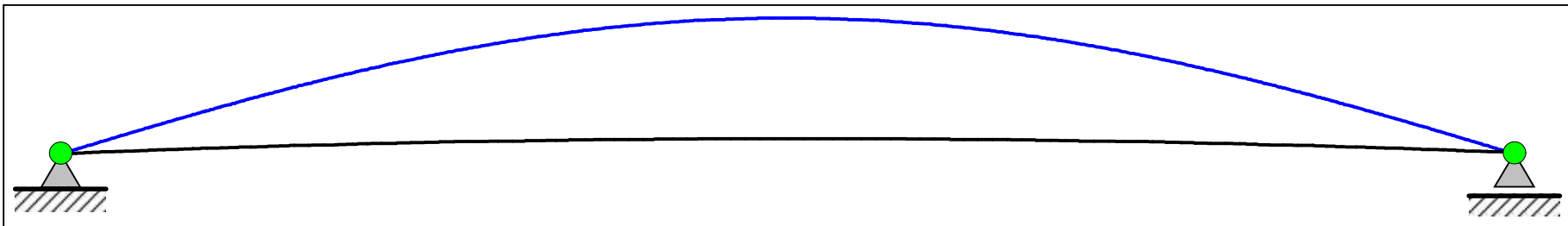


menum

# Stabilitätsuntersuchung des imperfekten Trägers

Der Träger wird mit 100 Elementen diskretisiert, so dass praktisch kein Diskretisierungsfehler auftritt. Als äußere Referenzlast wird die Knicklast des perfekten Trägers aufgebracht. Der kritische Lastfaktor entspricht somit der Abweichung der imperfekten von der perfekten Knicklast. Die Imperfektion ist mit bloßem Auge kaum auszumachen (schwarze Ausgangskonfiguration).

Stabilitätsuntersuchung: Knickform



Stabilitätsuntersuchung: kritischer Lastfaktor

$$\Lambda = 1.0360$$

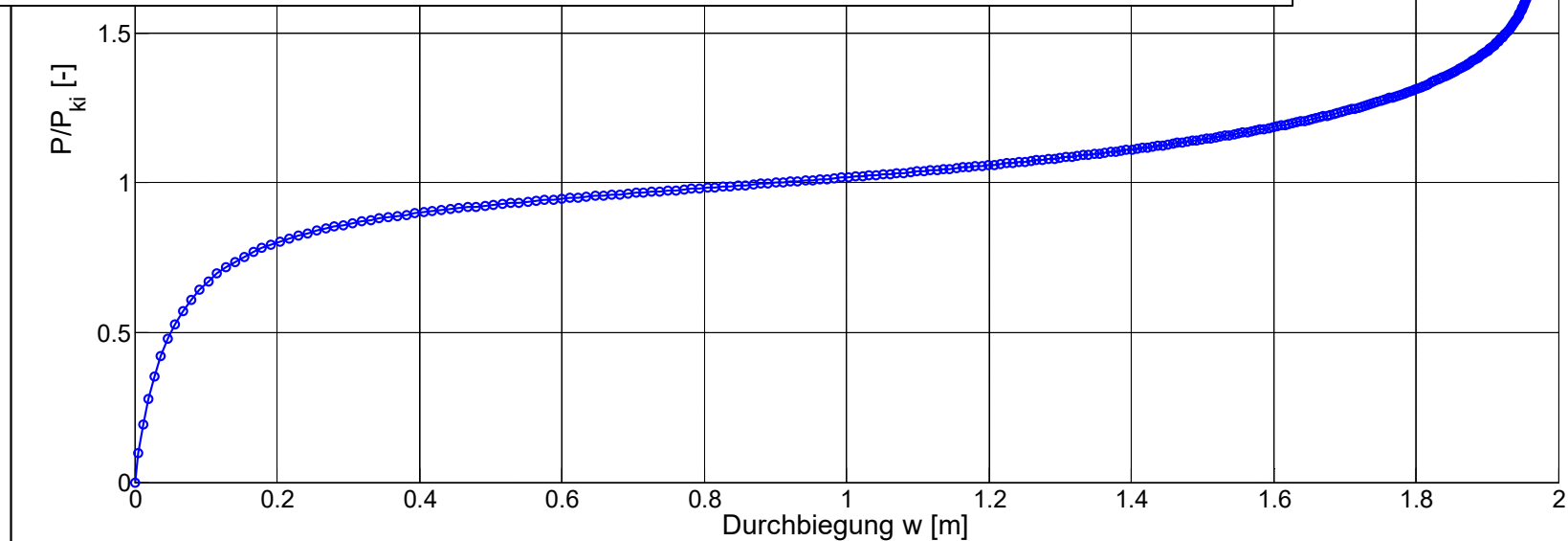
Die Knicklast wird durch die Vorkrümmung um 3.6 % größer, ändert sich also im Vergleich zum perfekten Träger praktisch nicht. Aber knickt der Träger wirklich aus? Hierfür führen wir eine *vollständig geometrisch nichtlineare Berechnung* des *imperfekten Trägers* durch.



menum

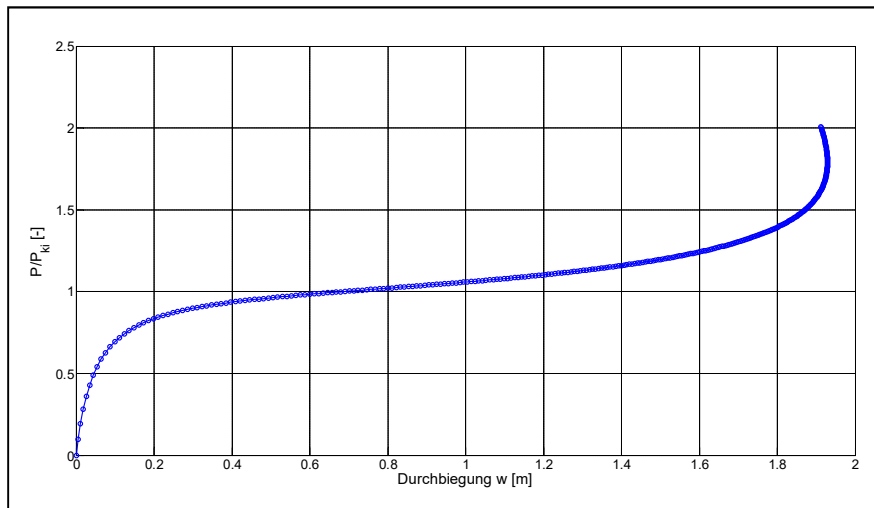
# Last-Verformungs-Verhalten des imperfekten Tragwerks

Von Beginn an entwickeln sich Durchbiegungen  $w$  infolge der Biegemomente. Das System weicht auf, je mehr wir uns der Knicklast nähern. In der Nähe der Knicklast ist die tangentielle Steifigkeit sehr klein, die Kurve verläuft fast horizontal, aber dennoch verbleibt eine positive Steifigkeit. Es kommt also zu *keinem Stabilitätsversagen*, sondern zu einem *Spannungsversagen*!



# Fazit

Bei Annäherung an die Knicklast bildet das reale imperfekte Tragwerk automatisch *große Verformungen* und damit *große Spannungen* aus. Vor Erreichen der Knicklast stellt sich somit Materialversagen ein – die theoretische Knicklast wird nicht erreicht. Die *geometrisch nichtlineare Schnittgrößenberechnung* des imperfekten Tragwerks umschließt damit das Stabilitätsversagen – eine Knick-Eigenwertuntersuchung kann also als Tragwerksnachweis entfallen. In der vorliegenden Form wäre hierfür allerdings eine *komplizierte iterative Berechnung* notwendig. Wünschenswert wäre also ein *vereinfachtes geometrisch nichtlineares Verfahren*, welches konsistent zu einer klassischen Stabilitätsuntersuchung ist. Als Folge würde eine Laststeigerung über die Knicklast hinaus, wie unten möglich, ausgeschlossen.

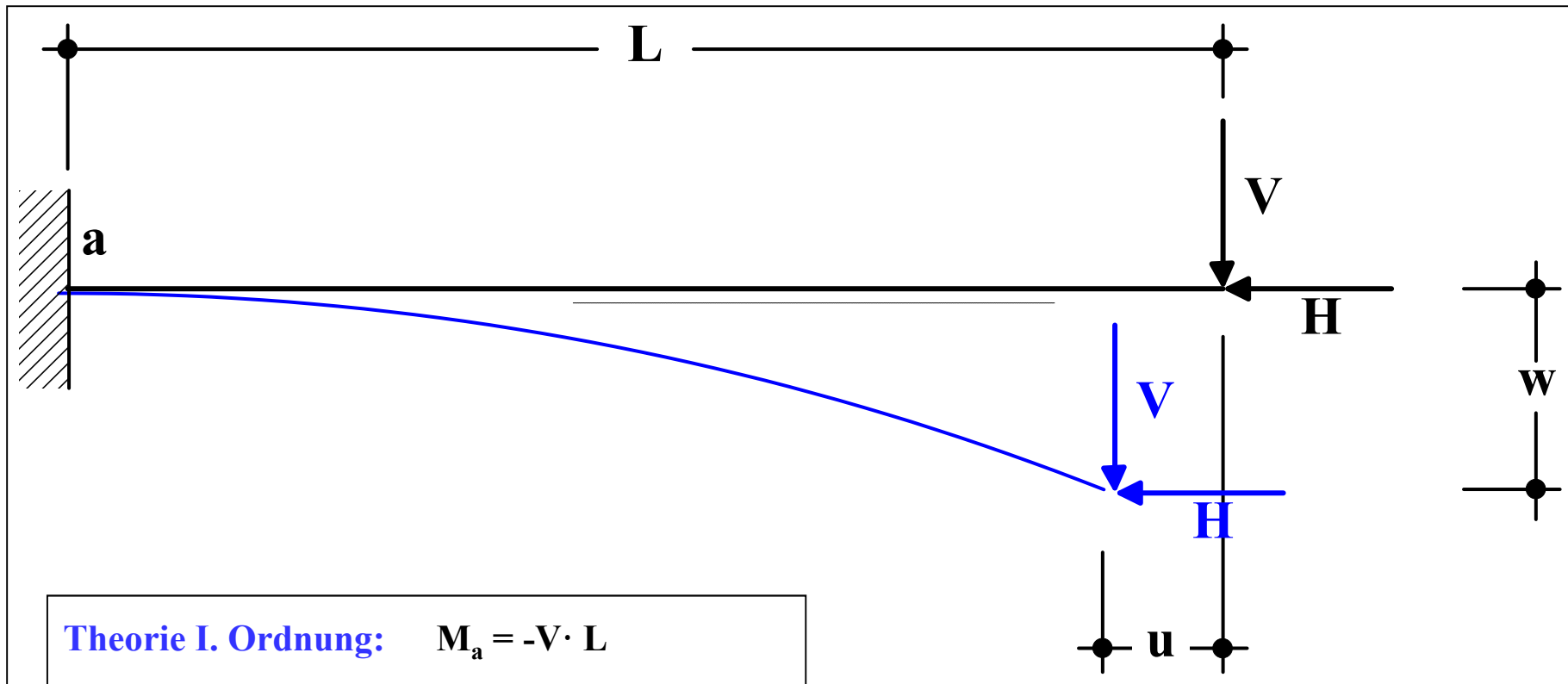


Diese vereinfachte Theorie ist die  
**Theorie II. Ordnung!**



menum

# Theorien I. Ordnung – II. Ordnung – III. Ordnung



Theorie I. Ordnung:  $M_a = -V \cdot L$

Theorie II. Ordnung:  $M_a = -V \cdot L - H \cdot w$

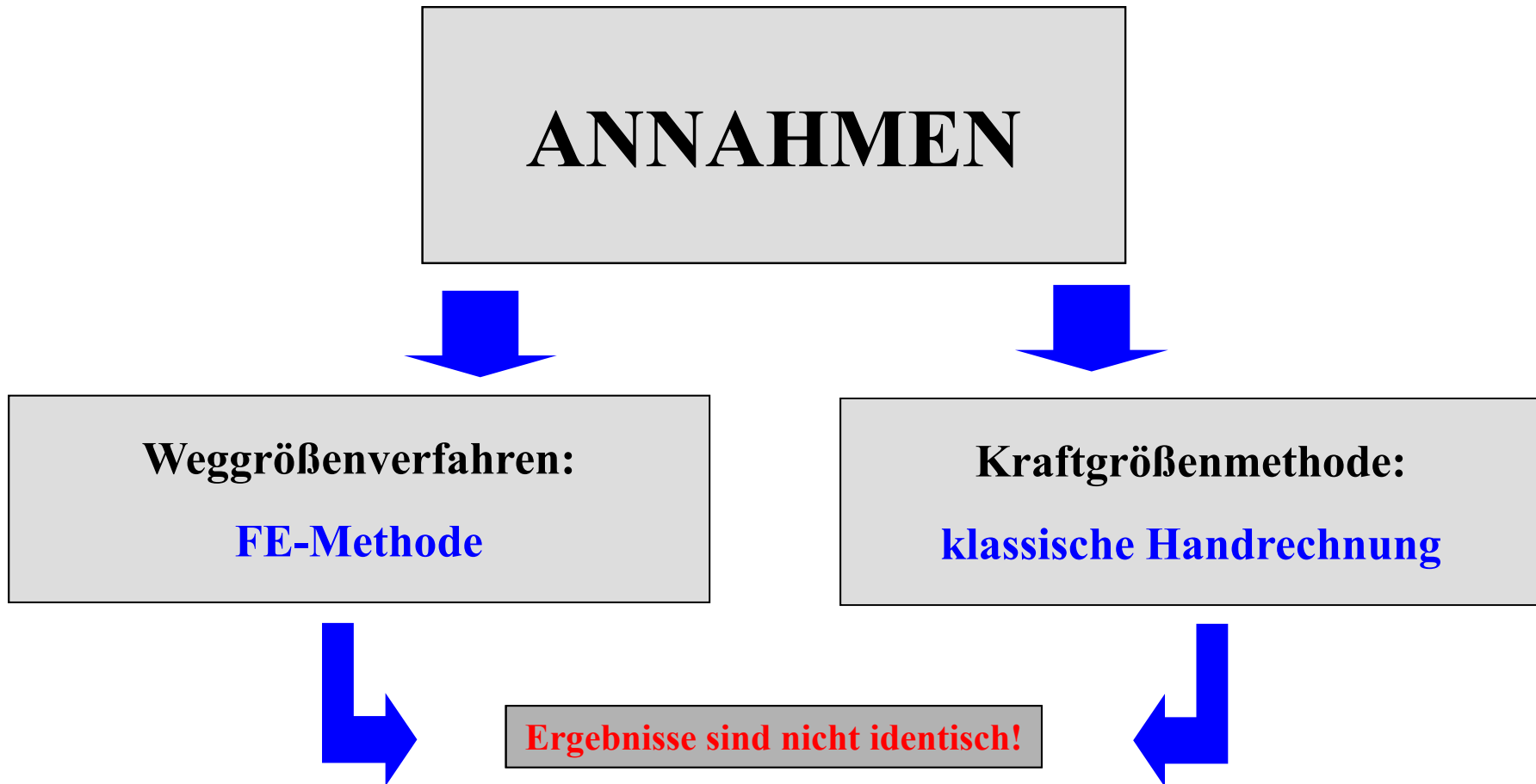
Theorie III. Ordnung:  $M_a = -V \cdot (L-u) - H \cdot w$



menum



# Varianten der Theorie II. Ordnung



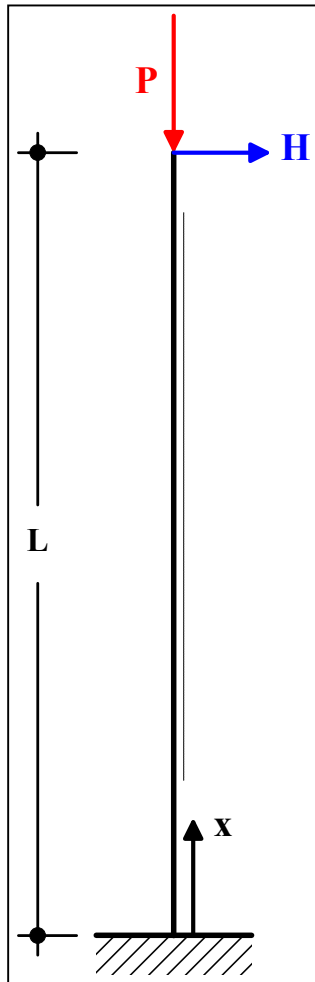
menum

# Versuch einer mathematisch exakten Lösung



menum

# Beispiel: Kragstütze



## Zahlenwerte:

### Belastung:

$$H = 100.0 \text{ kN}$$
$$P = 500.0 \text{ kN}$$

### Geometrie:

$$L = 5.0 \text{ m}$$

### Steifigkeit:

$$EI = 10000.0 \text{ kNm}^2$$

### Materialfestigkeit:

$$\sigma_F = 24.0 \text{ kN/cm}^2$$

Durch die Horizontalkraft  $H$  entsteht ein Biegezustand in der Stütze, so dass ein Spannungsproblem entsteht. Gesucht werden

- die horizontale Kopfpunktverschiebung
- das Einspannmoment

unter der Annahme vernachlässigbar kleiner Normalkraftverformungen und moderater Biegeverformungen. Es wird versucht, elementares Gleichgewicht am verformten System herzustellen.

Knicklast der perfekten Stütze

$$P_{ki} = \frac{EI \cdot \pi^2}{4L^2} = 987 \text{ kN}$$

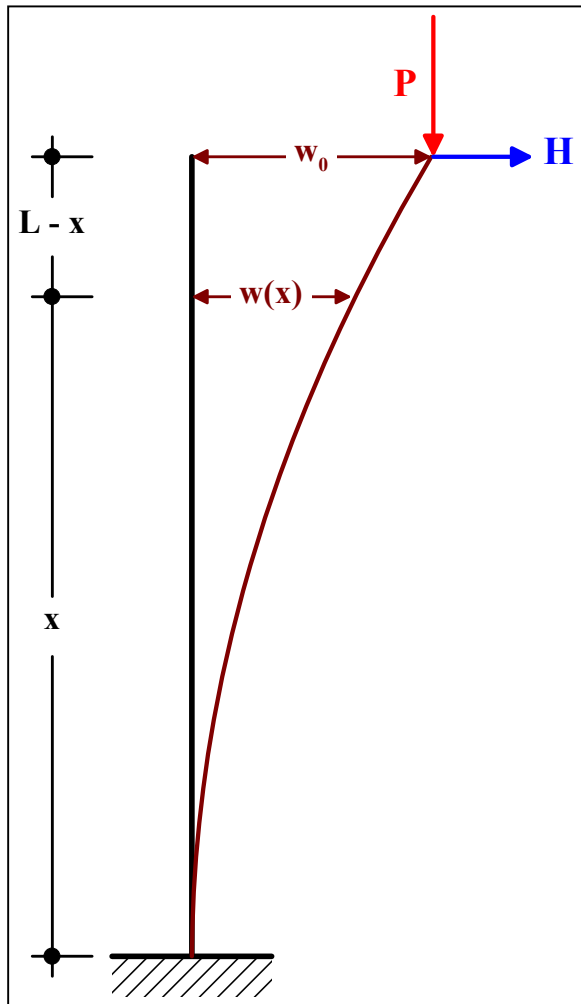
Lastfaktor der Auflast

$$\lambda_P = \frac{P}{P_{ki}} = 0.507$$



menum

# Gleichgewicht am verformten System



Durch die vereinfachenden kinematischen Annahmen (Vernachlässigung der Normalkraftverformungen und Biegeverformungen moderater Größe) bewegen sich alle Punkte nur in horizontaler Richtung. Diese Bewegung wird durch die Biegelinie  $w(x)$  beschrieben. Für das Biegemoment des verformten Tragwerks gilt:

Horizontallast

$$M(x) = -H \cdot (L - x)$$

$$M_E = -H \cdot L$$

Vertikallast

$$M(x) = -P \cdot (w_0 - w(x))$$

$$M_E = -P \cdot w_0$$

Das Moment infolge der Horizontallast wird durch die Verformung nicht beeinflusst, während die Biegelinie zu einem zusätzlichen Moment führt, welches neben einem konstanten Anteil infolge der Kopfpunktverschiebung  $w_0$  affin zur mathematischen Funktion von  $w(x)$  verläuft.



menum

# Ermittlung der Biegelinie

Statisch bestimmtes Tragwerk

$$EIw'' = -M(x)$$



$$EIw' = -\int M(x)dx + C_1$$



$$EIw = -\iint M(x)dx dx + C_1x + C_2$$

Die Biegelinie ergibt sich durch reine zweifache Integration der Momentenlinie – beide Integrationskonstanten verschwinden.

Lagerbedingungen: Einspannung

$$w(x=0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$\varphi(x=0) = 0$$

$$C_1 = 0$$



$$w(x) = -\frac{1}{EI} \iint M(x)dx dx$$



menum

# Iterative Lösung

1. Schritt: Ausgangszustand

$M_1$ : linear



$w_1$ : kubisch



2. Schritt – Zuwachs infolge  $w_1$

$M_2$ : kubisch



$w_2$ : 5. Ordnung



3. Schritt – Zuwachs infolge  $w_2$

$M_3$ : 5. Ordnung



$w_3$ : 7. Ordnung



4. Schritt – Zuwachs infolge  $w_3$

.....

Gesamtlösung

$$w_{\text{ges}} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \dots$$

$$M_{\text{ges}} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \dots$$



menum

# Berechnungsschritt 1: Ausgangszustand

**Momentenlinie  $M_1$**

$$M_1 = H \cdot x - H \cdot L = A_1 x + B_1$$

$$A_1 = H$$

$$B_1 = -H \cdot L$$



**zweimalige Integration**

**Biegelinie  $w_1$**

$$EI w_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{3} A_1 x^3 - \frac{1}{1} \frac{1}{2} B_1 x^2$$

$$\tilde{A}_1 = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{1}{3} A_1$$

$$\tilde{B}_1 = -\frac{1}{EI} \frac{1}{1} \frac{1}{2} B_1$$

$$w_1 = \tilde{A}_1 x^3 + \tilde{B}_1 x^2$$



**charakteristische Ordinaten**

$$M_{E1} = B_1 \quad w_{01} = \tilde{A}_1 L^3 + \tilde{B}_1 L^2$$



menum

# Berechnungsschritt 2: Zuwächse infolge $w_1$

**Momentenlinie  $M_2$**

$$M_2 = -P(w_{01} - w_1) = A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 \quad A_2 = P\tilde{A}_1 \quad B_2 = P\tilde{B}_1 \quad C_2 = -Pw_{01}$$



**zweimalige Integration**

**Biegelinie  $w_2$**

$$EIw_2 = -\frac{1}{4} \frac{1}{5} A_2 x^5 - \frac{1}{3} \frac{1}{4} B_2 x^4 - \frac{1}{12} C_2 x^2 \quad \tilde{A}_2 = -\frac{1}{EI} \frac{1}{4} \frac{1}{5} A_2 \quad \tilde{B}_2 = -\frac{1}{EI} \frac{1}{3} \frac{1}{4} B_2 \quad \tilde{C}_2 = -\frac{1}{EI} \frac{1}{12} C_2$$

$$w_2 = \tilde{A}_2 x^5 + \tilde{B}_2 x^4 + \tilde{C}_2 x^2$$



**charakteristische Ordinaten**

$$M_{E2} = C_2 \quad w_{02} = \tilde{A}_2 L^5 + \tilde{B}_2 L^4 + \tilde{C}_2 L^2$$



menum



# Berechnungsschritt 3: Zuwächse infolge $w_2$

## Momentenlinie $M_3$

$$M_3 = -P(w_{02} - w_2) = A_3x^5 + B_3x^4 + C_3x^2 + D_3 \quad A_3 = P\tilde{A}_2 \quad B_3 = P\tilde{B}_2 \quad C_3 = P\tilde{C}_2 \quad D_3 = -Pw_{02}$$



zweimalige Integration

## Biegelinie $w_3$

$$EIw_3 = -\frac{1}{6}\frac{1}{7}A_3x^7 - \frac{1}{5}\frac{1}{6}B_3x^6 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}C_3x^4 - \frac{1}{1}\frac{1}{2}D_3x^2$$

$$\tilde{A}_3 = -\frac{1}{EI}\frac{1}{6}\frac{1}{7}A_3$$

$$\tilde{B}_3 = -\frac{1}{EI}\frac{1}{5}\frac{1}{6}B_3$$

$$w_3 = \tilde{A}_3x^7 + \tilde{B}_3x^6 + \tilde{C}_3x^4 + \tilde{D}_3x^2$$

$$\tilde{C}_3 = -\frac{1}{EI}\frac{1}{3}\frac{1}{4}C_3$$

$$\tilde{D}_3 = -\frac{1}{EI}\frac{1}{1}\frac{1}{2}D_3$$



## charakteristische Ordinaten

$$M_{E3} = D_3 \quad w_{03} = \tilde{A}_3L^7 + \tilde{B}_3L^6 + \tilde{C}_3L^4 + \tilde{D}_3L^2$$



menum

# Verallgemeinerung

**Die Zuwachsberechnungen laufen stets nach dem gleichen Muster ab:**

- 1. Der Grad der bisherigen Biegelinie erhöht sich um zwei, wobei die Koeffizienten skaliert werden durch**
  - 1. einen Faktor  $P/EI$ .**
  - 2. Division durch innere Ableitungen, die zu fortschreitenden Verkleinerung führen.**
- 2. Es kommt immer ein quadratischer Anteil in  $w$  dazu, der von der Kopfpunktverschiebung des vorherigen Schrittes abhängt.**

**Sofern stabiles Gleichgewicht möglich ist, konvergiert der Prozess gegen Nullzuwächse, also gegen eine endgültige Biegelinie und damit eine endgültige Momentenlinie. Wir probieren dies für die vorher angegebenen Zahlenwerte aus.**



# Numerische Ergebnisse

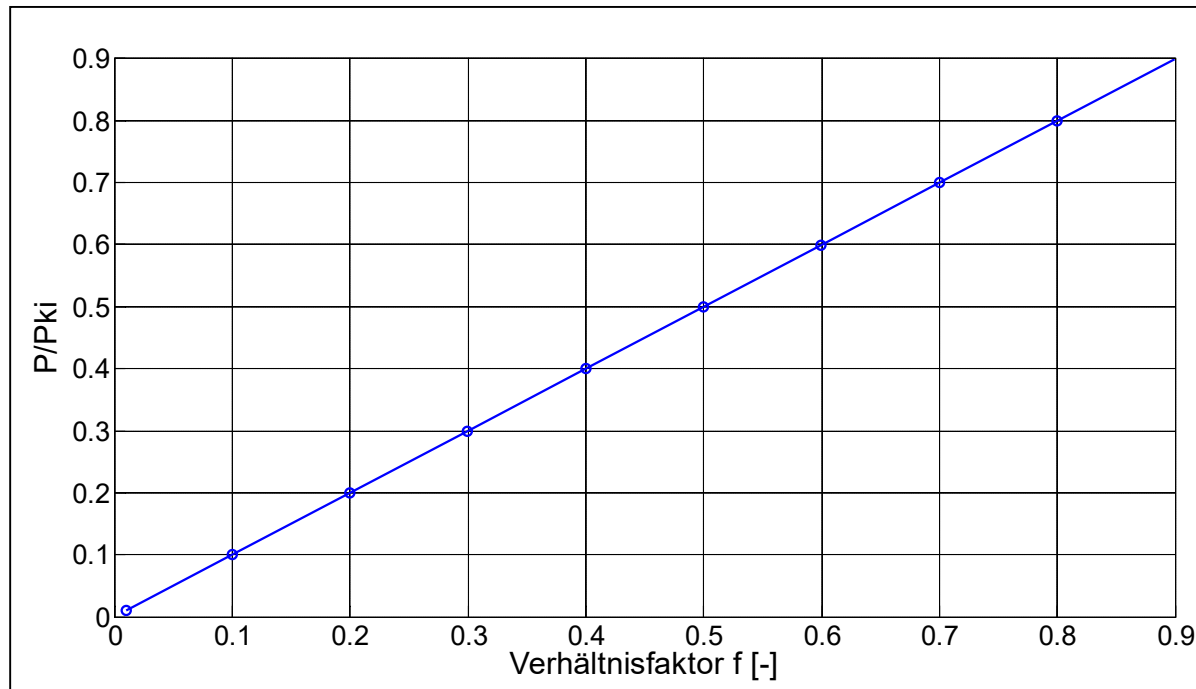
Nr. k	$w_0$ [m]	$M_E$ [kNm]	$w_{0,k}/w_{0,k-1}$	$M_{E,k}/M_{E,k-1}$
1	0.4167	-500.00		
			0.5000	0.4167
2	0.2083	-208.33		
			0.5060	0.5000
3	0.1054	-104.17		
			0.5065	0.5060
4	0.0534	-52.70		
			0.5066	0.5065
5	0.0270	-26.70		

Es zeigt sich eine zweifache Konvergenz: Die Zuwächse konvergieren gegen Null, d.h. es wird sich ein endgültiger Gleichgewichtszustand einstellen, und das Verhältnis zweier aufeinander folgender Zuwächse geht gegen einen fixen Wert, der identisch für  $w$  und  $M$  ist und gerade dem Verhältnis  $P/P_{ki}$  entspricht. Frage: Ist letztere Eigenschaft Zufall?



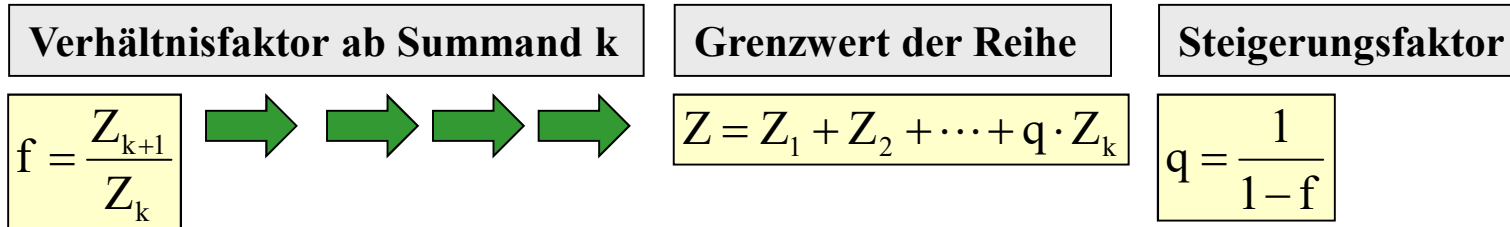
# Untersuchung des Verhältnissfaktors

In einem numerischen Experiment wurde für verschiedene Werte von  $H$  die Vertikallast  $P$  variiert. Es ergab sich unabhängig von  $H$  immer das unten dargestellte Ergebnis, dass der Verhältnissfaktor in der Grenze stets identisch wird zum Verhältnis von  $P$  zu  $P_{ki}$ . Eine mathematische Begründung hierfür ist nicht ins Auge fallend, so dass wir uns hier damit begnügen, dieses Faktum zu konstatieren.

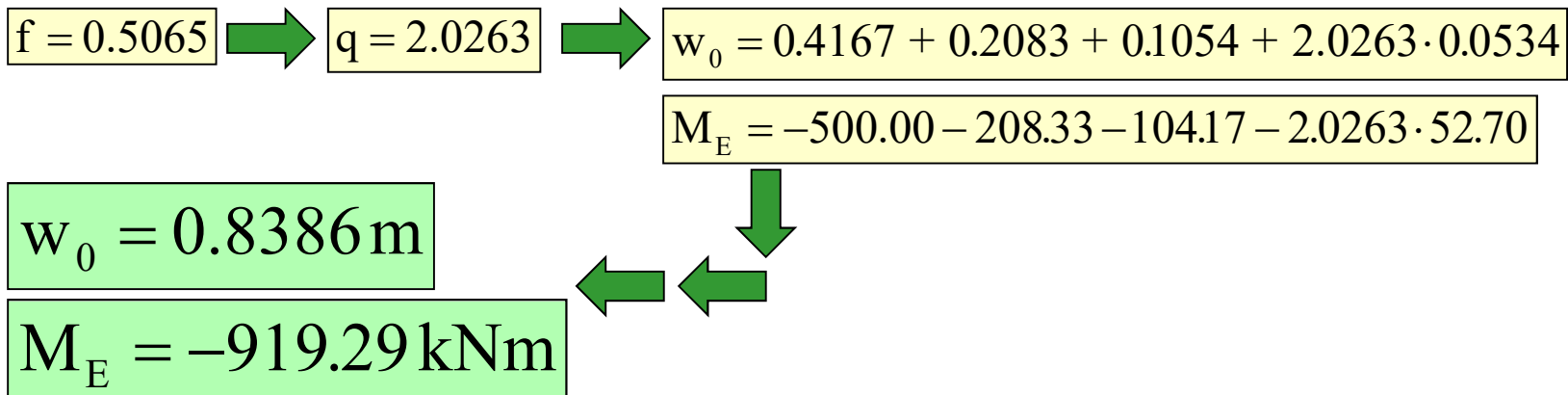


# Geometrische Reihe

Nach Konvergenz des Verhältnissfaktors  $f$  bilden alle folgenden Summanden eine geometrische Reihe, deren Grenzwert sich analytisch berechnen lässt. Für eine beliebige Systemgröße  $Z$  gilt:



Zahlenmäßige Ergebnisse: Konvergenz von  $f$  mit dem 4. Zuwachs

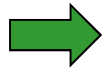


menum

# Kontrolle des Gleichgewichts in der Einspannung

Schnittmoment im Fußpunkt:

$$M_{ES} = -H \cdot L - P \cdot w_0$$



$$M_{ES} = -100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - 500 \text{ kN} \cdot 0.8386 \text{ m}$$

$$M_E = -919.30 \text{ kNm}$$

Moment aus Biegelinienberechnung:

$$M_E = -919.29 \text{ kNm}$$

**Momentengleichgewicht ist gegeben!**



menum

# Traglast des Systems

Das Tragwerk versagt bei einem Spannungsproblem durch Erreichen der Materialfestigkeit und nicht durch Verzweigen oder Durchschlagen. Bei dem hier entwickelten Verfahren ergibt sich die nichtlineare Antwort als Grenzwert einer geometrischen Reihe. Damit ist die maximal auftretende Last durch den Steigerungsfaktor  $q$  begrenzt, der zwischen Null und unendlich liegen muss – negative Werte von  $q$  sind physikalisch unsinnig.

Steigerungsfaktor allgemein

$$q = \frac{1}{1-f} \quad \longrightarrow \quad f_{\max} = 1$$

Grenzwert des Steigerungsfaktors

$$f_{\infty} = \frac{P}{P_{ki}} \quad \longrightarrow$$

Grenzwert der Last

$$f_{\infty} = f_{\max}$$

$$P = P_{ki}$$

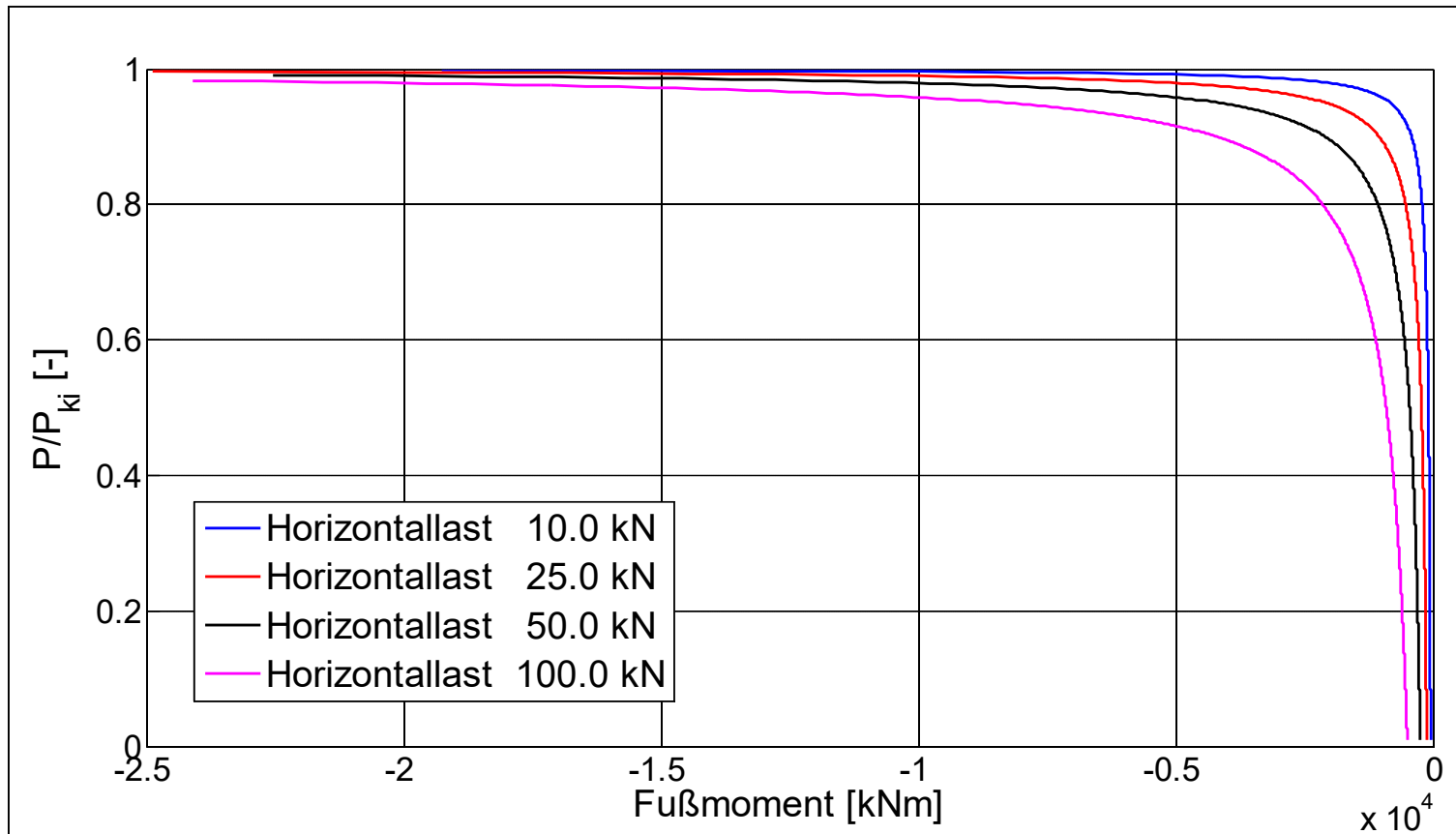
Es kann keine Last größer als  $P_{ki}$  aufgenommen werden. Bei Annäherung von  $P$  an  $P_{ki}$  wachsen der Steigerungsfaktor und damit die Tragwerksantwort gegen unendlich, so dass es vor Erreichen der theoretischen Knicklast zu Materialversagen kommt. Das Spannungsproblem umfasst somit das Stabilitätsproblem, welches nicht separat betrachtet werden muss.



menum

# Systemverhalten: Last-Momenten-Diagramm

Unabhängig von der Größe der Horizontalkraft  $H$  streben alle Kurven asymptotisch gegen  $P_{ki}$ . Je größer  $H$ , desto größer die initialen Biegeeffekte, und umso flacher verläuft die Kurve.



menum



# Kontrolle: Vollständig nichtlineare Berechnung

Es wurde zu Kontrollzwecken eine *vollständig nichtlineare Berechnung* durchgeführt, die unter Mitnahme der *Normalkraftverformungen* und großen Verschiebungen/Rotationen einen Gleichgewichtszustand mittels des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens findet.

vollst. nichtlinear:

$$U_v = 0.0809 \text{ m}$$

$$U_h = 0.8065 \text{ m}$$

$$M_E = -895.17 \text{ kNm}$$

Handrechnung:

$$U_v = 0.000 \text{ m}$$

$$U_h = 0.8386 \text{ m}$$

$$M_E = -919.29 \text{ kNm}$$

Abweichung: 4.0%

Abweichung: 2.7%

$$M_{ES} = -H \cdot (L - U_v) - P \cdot U_h$$

$$M_{ES} = -895.16 \text{ kNm}$$

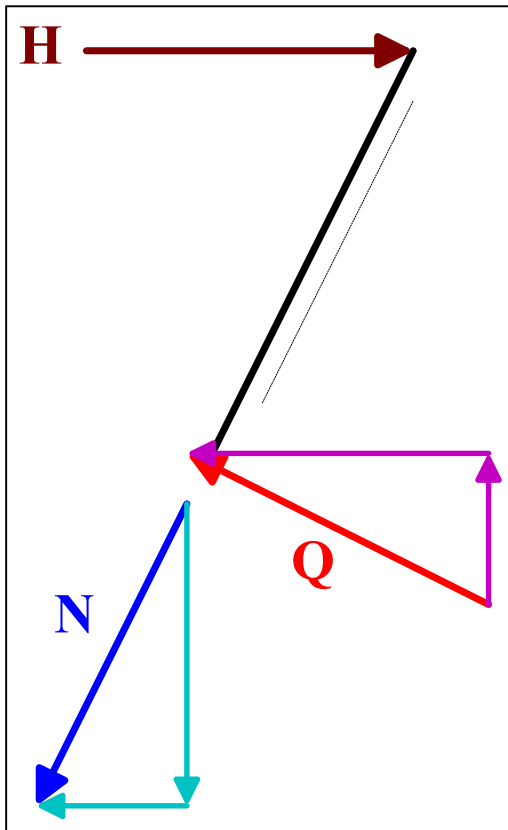
**Momentengleichgewicht ist gegeben!**



menum

# Diskussion der Abweichungen

Die vollständig nichtlineare Theorie liefert kleinere Ergebnisse als die vereinfachte Betrachtung mit reinen Biegeverformungen. Ist das sinnvoll?



Grundsätzlich wirken die Schnittgrößen in *Richtung der verformten Stabachse*. Wenn wir nur die Horizontallast betrachten, ergibt sich folgendes Bild:

Die Querkraft senkrecht zur geneigten Stabachse besitzt eine Vertikalkomponente, die nach oben wirkt. Die Gleichgewichtsbedingung in Vertikalrichtung ist nur zu erfüllen, wenn in dem Träger eine entsprechende *Zug-Normalkraft* entsteht. Diese Zugkraft erzeugt eine *positive geometrische Steifigkeit*, die das *System versteift*.

Dieser Versteifungseffekt mindert den Steifigkeitsverlust durch die Vertikallast P ab. Somit ist es richtig, dass die vollständig geometrisch nichtlineare Systemmodellierung, die den Versteifungseffekt berücksichtigt, geringere Systemantworten liefert als die vereinfachte Betrachtung.



menum

# Zwischenfazit

Es ist gelungen, ein analytisches Verfahren zur Bestimmung des Momentenzustandes einer Kragstütze durch Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung am verformten Tragwerk zu finden. Die so gefundene Lösung ist in sich konsistent: Das Einspannmoment, welches durch eine Gleichgewichtsbetrachtung des endgültig verformten Tragwerks gewonnen wurde, ist identisch zu der Summe der in den Einzelschritten ermittelten Momentenzuwächse.

Als wahre Lösung kann eine vollständig geometrisch nichtlineare Berechnung angesehen werden. Ein Vergleich mit dieser ergab Abweichungen in der Größenordnung von 4 %. Diese Abweichungen sind auf die der analytischen Lösung zu Grunde liegenden vereinfachenden Annahmen zurückzuführen. Eine vertiefte Diskussion des zulässigen Anwendungsbereichs erfolgt später – hier kann jedoch festgehalten werden, dass das vorgestellte Lösungskonzept im Prinzip richtig ist.

Das Verfahren ist jedoch für kompliziertere Strukturen zu aufwendig. Wir werden zwar die Grundidee beibehalten – schrittweise Annäherung an einen verformten Gleichgewichtszustand, aber das Verfahren durch weitere Vereinfachungen handhabbar machen. Das Ergebnis wird die *klassische manuelle Form der Theorie II. Ordnung* sein.



# Die klassische manuelle Form der Theorie II. Ordnung



menum

# Grundidee

Das bisherige Vorgehen bestand in der Betrachtung der Zusatzmomente, die unmittelbar durch die vorhandene Belastung an der vorhandenen Biegelinie erzeugt werden. Die Belastung blieb also unverändert, während sich der Verformungszustand sukzessiv änderte.

Die klassische Theorie geht anders vor. Sie bringt auf das Tragwerk zusätzliche Lasten, die sog. *Abtriebskräfte* auf, die *global* am *unverformten Tragwerk* den *gleichen Effekt* haben wie die *Originalkräfte* am *verformten Tragwerk*. „Global“ meint hier: Nicht an jeder Stelle wird der gewünschte gleiche Effekt produziert, sondern nur an den bemessungsrelevanten Punkten. Bei unserem Beispiel würde man versuchen, das Fußpunktmoment abzubilden. Die Beschränkung auf wesentliche Stellen führt einen gewissen Fehler in die Berechnung ein.

Bei der Aufbringung der Abtriebskräfte werden beim Verformungszustand zwei vereinfachte Verformungsmuster betrachtet: eine *Schiefstellung* eines Stabes (einer Stütze) und eine vereinfachte *Vorkrümmung* in Form einer *Parabel*.



# Abtriebskräfte I: Neigung der Stabachse

Im unverformten Zustand steht die Normalkraft unmittelbar im Gleichgewicht mit der Vertikalkraft. Im verformten Zustand wirkt die Normalkraft in Richtung der geneigten Stabachse. Sie kann in eine Vertikalkomponente  $N_v$  und eine Horizontalkomponente  $N_h$  zerlegt werden. Wir nehmen kleine Winkel an.

$$N_h = N \sin \alpha \quad N_v = N \cos \alpha$$

Vertikalrichtung:  $\cos(\alpha) \approx 1$



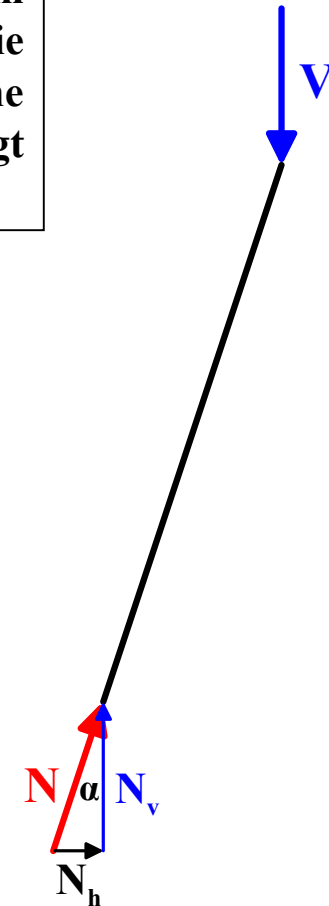
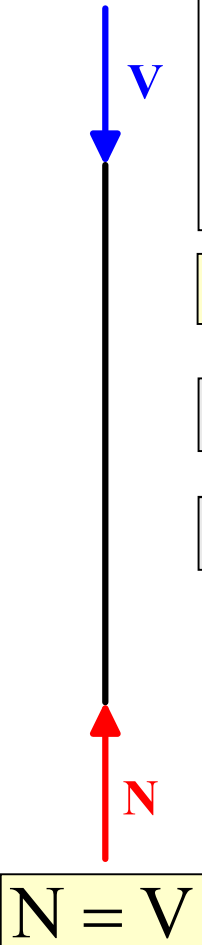
$$N_v = N = V$$

Horizontalrichtung:  $\sin(\alpha) \approx \alpha$



$$N_h = N \cdot \alpha$$

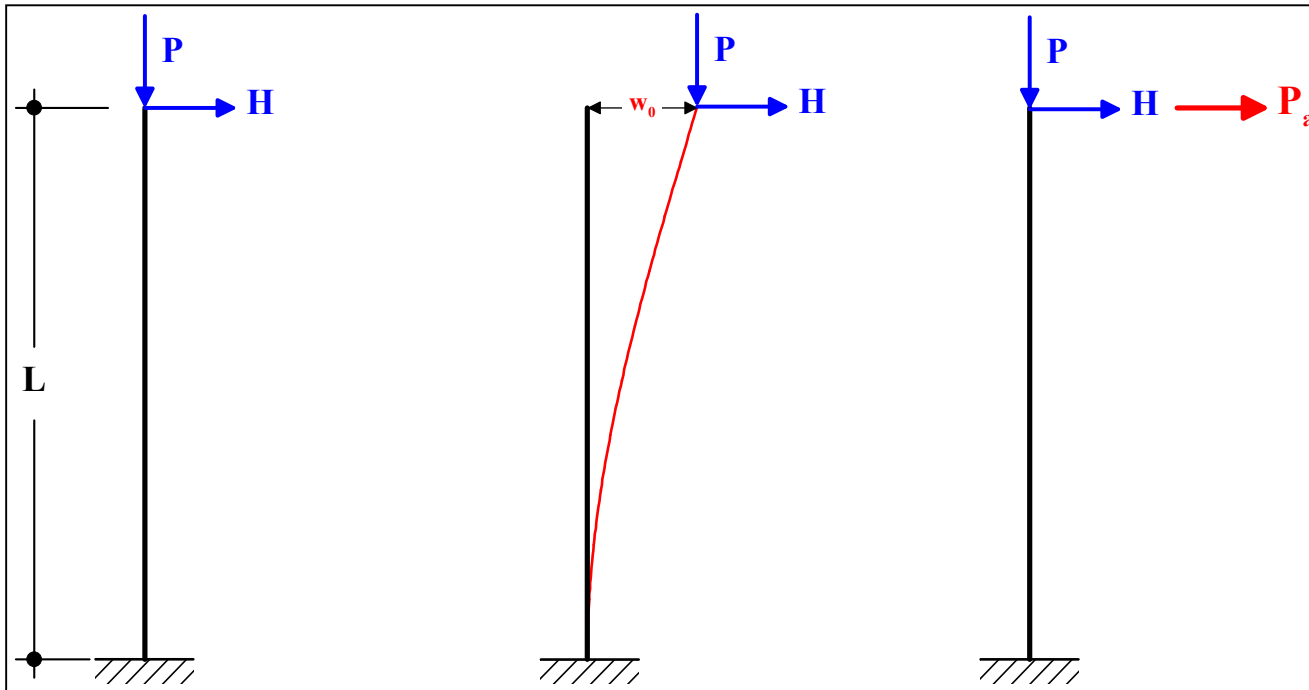
Das Gleichgewicht in Vertikalrichtung liefert für kleine Winkel die gleiche Normalkraft wie im unverformten Zustand. Der Horizontalkomponenten  $N_h$  steht jedoch keine äußere Last entgegen –  $N_h$  wirkt gleichsam als *Ungleichgewichtskraft*. Um den gleichen Effekt im *unverformten Zustand* zu erzielen, wird  $N_h$  als *äußere Last  $P_a$*  aufgebracht. Diese äußere *Abtriebskraft* führt im Falle einer Druckkraft zu einer weiteren Neigung der Stabachse.



menum

# Vereinfachung der Neigung zu einer Schiefstellung

Im Prinzip ergibt sich die Neigung der Stabachse aus der Ableitung der Biegelinie. Vereinfachend wird jedoch bei Einwirkung einer Einzellast eine *konstante Neigung* im Stab angenommen, welche einer *Schiefstellung* des Stabes entspricht. Diese Schiefstellung wird so definiert, dass das Fußpunktmoment, welches sich aus der Vertikalkraft mit der Durchbiegung  $w_0$  ergibt, genauso groß ist wie das Moment der Abtriebskraft  $P_a$  mit dem Hebelarm  $L$  der Stützhöhe



$$M_E = P \cdot w_0 = P_a \cdot L$$



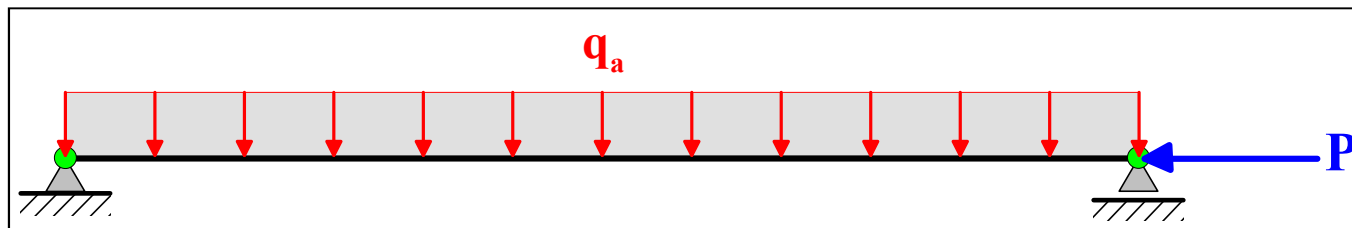
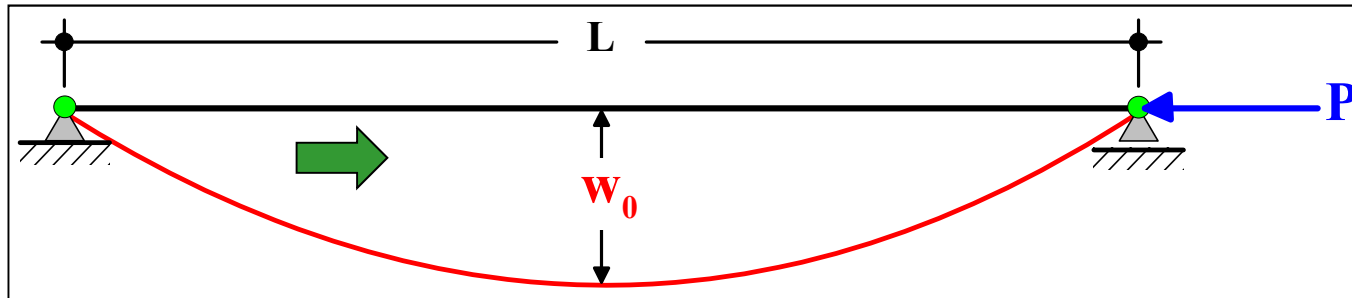
$$P_a = P \frac{w_0}{L}$$



menum

# Abtriebskräfte II: Vorkrümmungen

Durch Imperfektionen oder lastinduzierte Biegewirkungen entsteht eine Biegelinie mit Ordinate  $w_0$ . Das dadurch entstehende Moment wird durch eine *konstante Abtriebsstreckenlast* ausgedrückt, die das gleiche Mittenmoment  $M_M$  erzeugt wie die wirkende Einzelkraft bzw. Normalkraft.



$$M_M = P \cdot w_0 = \frac{q_a L^2}{8}$$



$$q_a = \frac{8P \cdot w_0}{L^2}$$



menum



# Zahlenbeispiel

Im Gegensatz zur analytischen Lösung müssen bei der Abtriebskraftformulierung keine Biegelinien in Form von Funktionen bestimmt werden, sondern nur einzelne Verformungsordinaten. Das kann mit elementaren Methoden der Statik geschehen.

## Berechnungsschritt 1

$$M_{E1} = -H \cdot L = -500 \text{ kNm} \quad \rightarrow \quad w_{01} = \frac{1}{3} \frac{HL^3}{EI} = 0.4167 \text{ m} \quad \rightarrow \quad P_{a1} = P \frac{w_{01}}{L} = 500 \text{ kN} \frac{0.4167 \text{ m}}{5.0 \text{ m}}$$

Da die Belastung durch  $P_{a1}$  eine Antwort erzeugt, die affin zur Antwort infolge  $H$  ist, stellen schon alle weiteren Zuwächse Glieder einer geometrischen Reihe dar und der Verhältnissfaktor  $f$  ergibt sich aus dem Verhältnis von  $P_{a1}$  zu  $H$ .

$$P_{a1} = 41.67 \text{ kN}$$

$$f = \frac{P_{a1}}{H} = \frac{41.67 \text{ kN}}{100 \text{ kN}} = 0.4167 \quad \rightarrow \quad q = 1.7144 \quad \rightarrow \quad w^{\text{II}} = q \cdot w_{01} = 1.1711 \cdot 0.4167 \text{ m} = 0.7144 \text{ m}$$

$$M^{\text{II}} = q \cdot M_{E1} = 1.1711 \cdot (-500 \text{ kNm}) = -857.19 \text{ kNm}$$

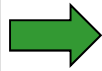


menum

# Kontrolle des Gleichgewichts in der Einspannung

Schnittmoment in Fußpunkt:

$$M_{ES} = -H \cdot L - P \cdot w^{II}$$



$$M_{ES} = -100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - 500 \text{ kN} \cdot 0.7144 \text{ m}$$

$$M_{ES} = -857.19 \text{ kNm}$$

Moment aus Abtriebskräfteberechnung:

$$M^{II} = -857.19 \text{ kNm}$$

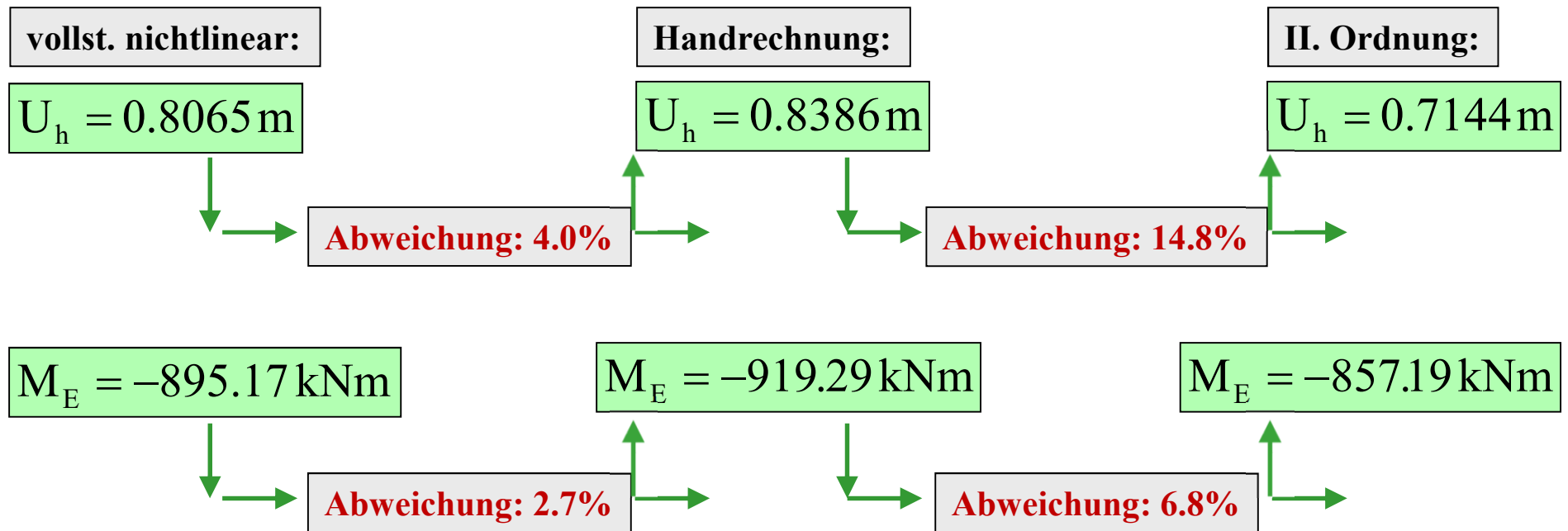
**Momentengleichgewicht ist gegeben!**

Die Lösung ist in sich konsistent. Diese Konsistenz gilt jedoch nur für den Fußpunkt. Aus der Summe aller Abtriebskräfte würde ein lineares Moment resultieren, welches zu einer quadratischen Biegelinie führt. Schneidet man an einer beliebigen Stelle und bildet dort Gleichgewicht am verformten System, wäre dieses nicht erfüllt. Bei der analytischen Lösung mit den Biegelinien gäbe es diesen Defekt nicht: Die Summe aller Teilbiegelinien wäre identisch zur exakten Biegelinie und Gleichgewicht am verformten Tragwerk in jedem Punkt gegeben.



menum

# Vergleich mit den bisherigen Ergebnissen



Ein Vergleich der analytischen Handrechnung mit der Berechnung nach Theorie II. Ordnung zeigt einen nicht unwesentlichen numerischen Fehler. Beide Verformungsberechnungen fußen auf den gleichen Annahmen, so dass der auftretende Fehler eine Folge des vereinfachenden Konzepts der Abtriebskräfte darstellt. Zur Genauigkeit später mehr.



menum

# Traglast des Systems

Für das Abtriebskraftverfahren stellt sich ebenfalls die Frage nach der Konsistenz der Methode mit der klassischen Stabilitätstheorie. Wiederum gilt: die maximal mögliche Last ergibt sich für die Situation, bei der der Verhältnissfaktor zu eins wird.

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{f = 1} & \longrightarrow & \boxed{\frac{P_{al}}{H} = 1} & \longrightarrow & \boxed{P_{al} = H = P \frac{w_{01}}{L}} & \longrightarrow & \boxed{P = \frac{H \cdot L}{w_{01}}} & \longrightarrow & \boxed{P = \frac{100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m}}{0.4167 \text{ m}} = 1200.0 \text{ kN}} \end{array}$$

Die Traglast des Spannungsproblems II. Ordnung liegt um ca. 22 % über der elastischen Knicklast. Damit wäre es zumindest theoretisch denkbar, einen Spannungsnachweis nach Theorie II. Ordnung zu erfüllen, obwohl das Tragwerk schon vorher durch elastisches Knicken versagt hat. Ob das eintritt, hängt von der Größe der initialen Biegeinflüsse (aus geometrischen Imperfektionen oder Querlasten) ab.

Von Standpunkt der Theorie aus besitzt die manuelle Theorie II. Ordnung einen Theoriedefekt, da sie das rein elastische Knickproblem im Gegensatz zu der manuellen analytischen Lösung nicht vollständig einschließt.



# Zwischenfazit

Die Vorgehensweise mit Abtriebskräften stellt ein klassisches Verfahren der Baustatik dar, vergleichbar zu anderen manuellen Verfahren wie der  $\delta_{ik}$ -Methode oder dem Drehwinkelverfahren.

Diese Verfahren wurden in der Ingenieurpraxis fast vollständig durch numerische Verfahren auf der Basis der FE-Methode ersetzt – Handrechnungen beschränken sich auf einfache überschaubare Teilsysteme, vor allen Dingen zu Kontrollzwecken.

Ähnliches gilt für die Theorie II. Ordnung. Ein Vorteil der rechnergestützten Verfahren besteht in der Möglichkeit, das numerische Modell für unterschiedliche Fragestellungen verwenden zu können. Damit schrumpft der Bearbeitungsaufwand für eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung gegen Null, falls schon ein Rechenmodell für lineare Statik erstellt worden ist.

Die FE-Version der Theorie II. Ordnung arbeitet grundsätzlich anders als das manuelle Verfahren mittels Abtriebskräften. Es ergibt sich aus einer Reduktion der tangentialen Steifigkeitsbeziehung und wird im nächsten Abschnitt besprochen.



# Die FE-Form der Theorie II. Ordnung



menum

# Grundidee des Verfahrens

Die numerische Version der Theorie II. Ordnung ergibt sich aus den nachstehenden Forderungen:

- Die Last soll in einem Schritt *ohne Inkrementierung* aufgebracht werden.
- Die Tragwerksantwort soll *ohne Iterationen* berechnet werden.
- Die Methode soll *konsistent zur klassischen Stabilitätstheorie* sein und diese umschließen.

Die Forderung nach einem nichtiterativen Einschnittverfahren

Grundsätzlich wird ein Problem der *Statik* durch ein *Gleichungssystem* beschrieben. Bei einem Verfahren mit Aufbringung der Gesamtlast ohne Iterationen muss folglich ein lineares Gleichungssystem aufgebaut und nur ein einziges Mal gelöst werden. Da Gleichgewicht am verformten System gebildet wird, muss die Steifigkeitsmatrix  $K^{\text{II}}$  nach Theorie II. Ordnung die Verformungseffekte berücksichtigen.

$$K^{\text{II}} V^{\text{II}} = P$$



menum

# Konsistenz zur klassischen Stabilitätstheorie

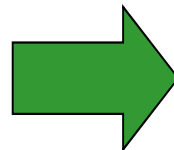
Eigenwertproblem der klassischen Stabilitätstheorie

$$(\mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_g) \Phi = \mathbf{P}$$

Knicken oder Beulen tritt für denjenigen Lastfaktor  $\Lambda$  ein, für den das Tragwerk einen kinematischen Mechanismus ausbildet. Mathematisch bedeutet dies, dass die Gesamtsteifigkeitsmatrix, bestehend aus der linearen Matrix  $\mathbf{K}_L$  und dem geometrischen Anteil  $\mathbf{K}_g$ , singulär wird.

Wenn genau diese aus zwei Teilen bestehende Matrix als  $\mathbf{K}^{\text{II}}$  verwendet wird, ist gewährleistet, dass niemals Lasten jenseits der Stabilitätslasten aufgenommen werden können. Bei Annäherung an die Stabilitätslast wird  $\mathbf{K}^{\text{II}}$  immer schlechter konditioniert und man nähert sich bei exponentiell wachsender Tragwerksantwort asymptotisch dem Stabilitätslastniveau. Diese extrem schnell wachsenden Verformungen und Schnittgrößen führen vor Erreichen der Stabilitätslast zu Materialversagen.

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_g) \mathbf{V}^{\text{II}} = \mathbf{P}$$



$$\mathbf{K}^{\text{II}} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_g$$

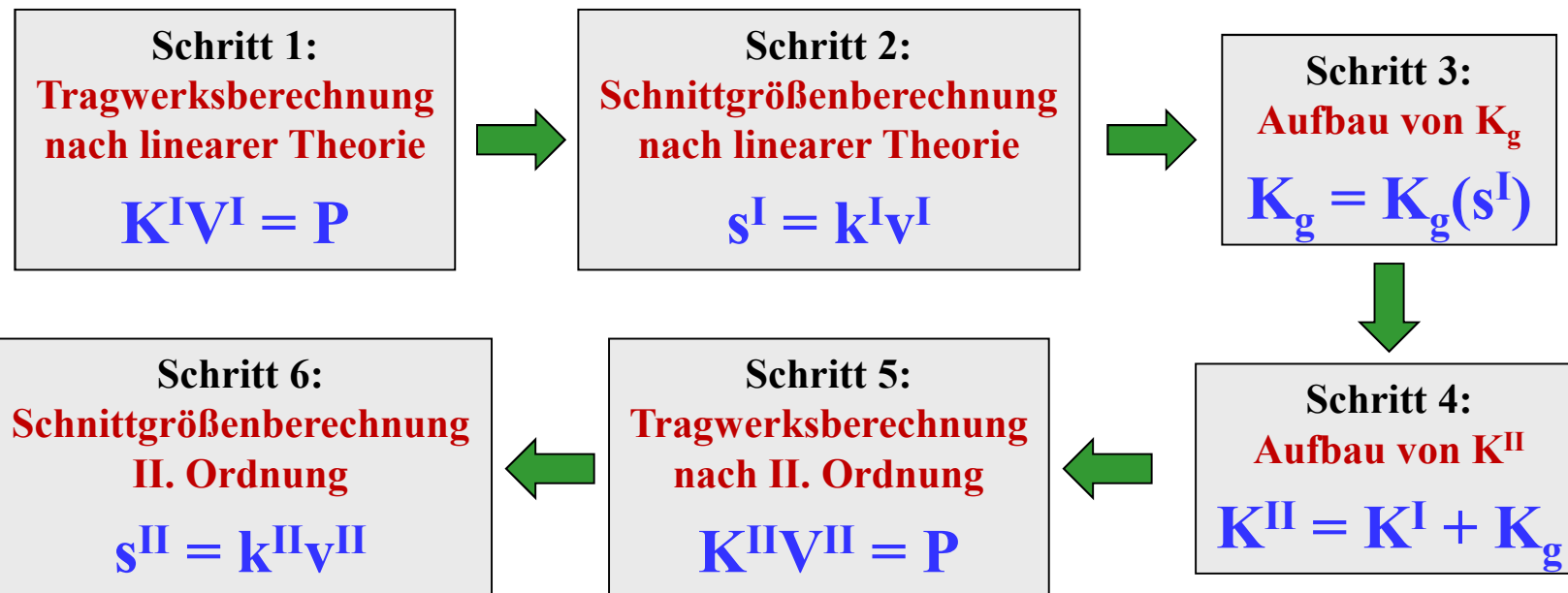


menum



# Ablauf einer FE-Berechnung nach Theorie II. Ordnung

Nachfolgend das Ablaufdiagramm für eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung für Stabtragwerke. Die Stabeigenschaft schlägt sich in der Berechnung der Elementschnittgrößen nieder, die unmittelbar aus dem Produkt der Elementsteifigkeitsmatrix mit den Elementverformungen ermittelt werden können. Bei beliebigen Tragwerken ergeben sich diese aus einer nichtlinearen kinematischen Beziehung, die so vereinfacht wird, dass genau die Anteile übrigbleiben, die zur Berechnung von  $K_g$  herangezogen werden.



# Zahlenbeispiel

**FE: vollst. nichtlinear:**

$$U_v = 0.0809 \text{ m}$$

$$U_h = 0.8065 \text{ m}$$

$$M_E = -895.17 \text{ kNm}$$

**analyt. Handrechnung:**

$$U_v = 0.000 \text{ m}$$

$$U_h = 0.8386 \text{ m}$$

$$M_E = -919.29 \text{ kNm}$$

**FE: Theorie II. Ordnung**

$$U_v = 0.000 \text{ m}$$

$$U_h = 0.8386 \text{ m}$$

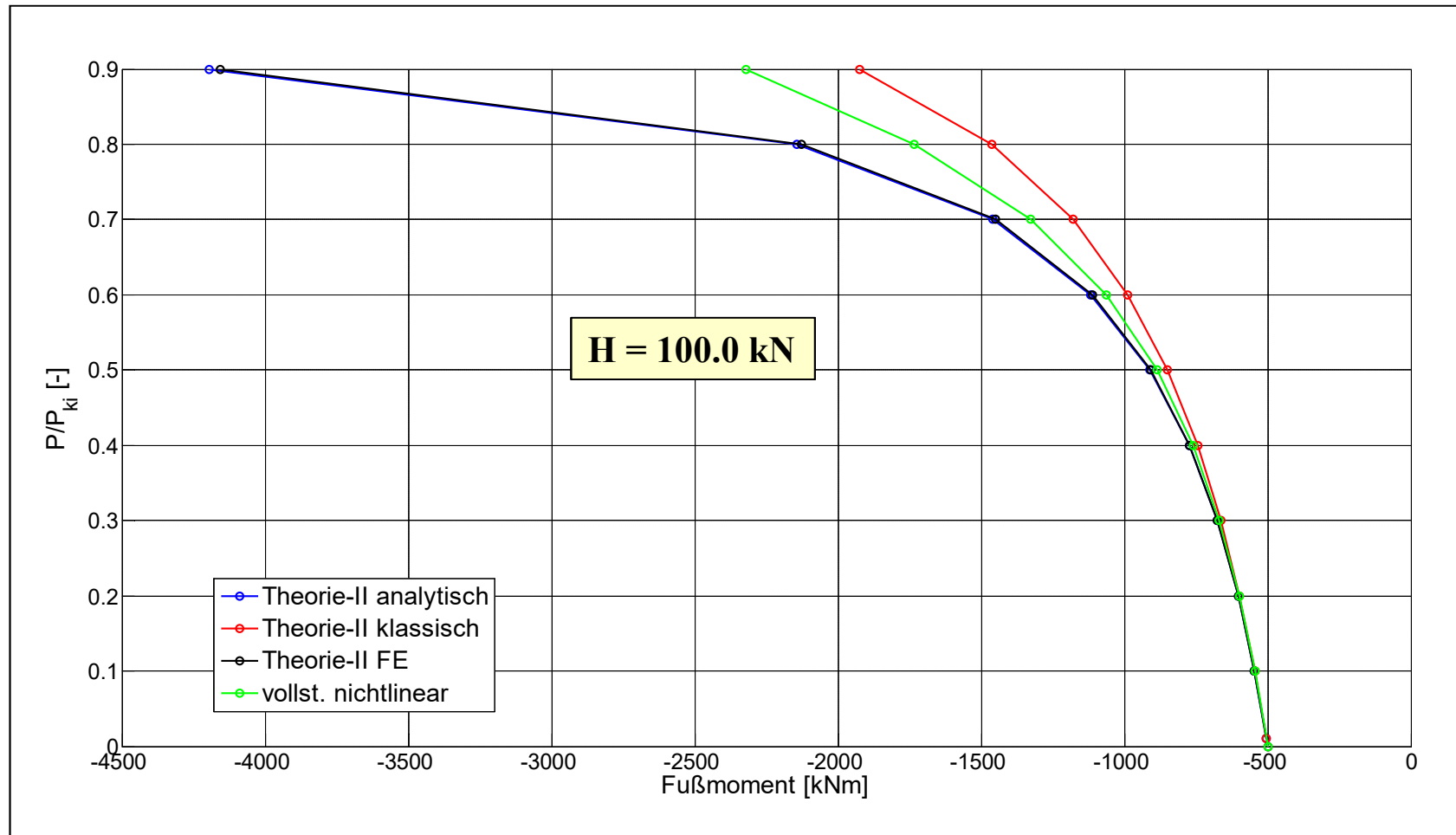
$$M_E = -919.31 \text{ kNm}$$

Die FE-Lösung mit der Theorie II. Ordnung stimmt vollständig mit der analytischen Handrechnung überein.



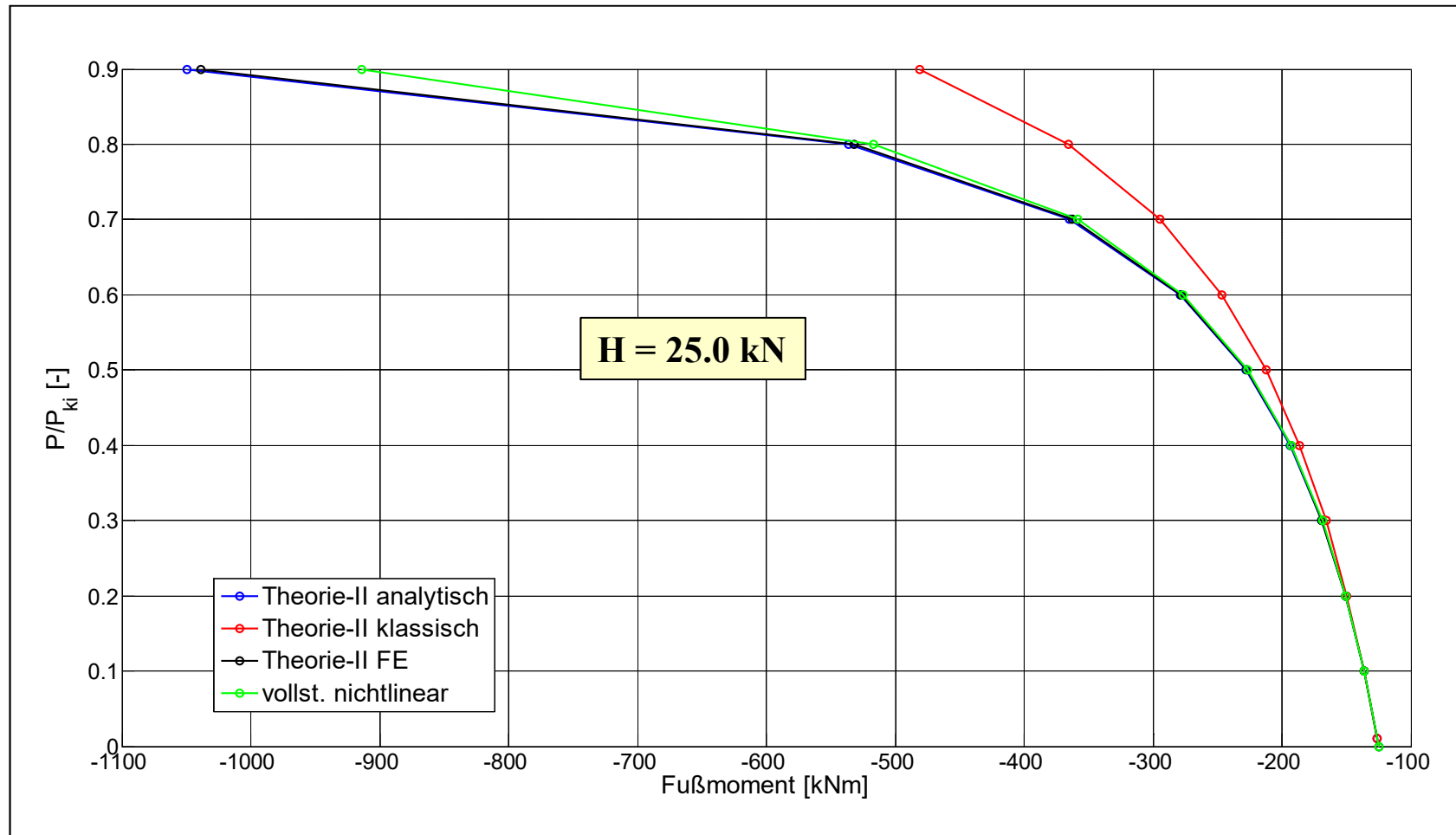
menum

# Vergleich der Methoden: $H = 100 \text{ kN}$



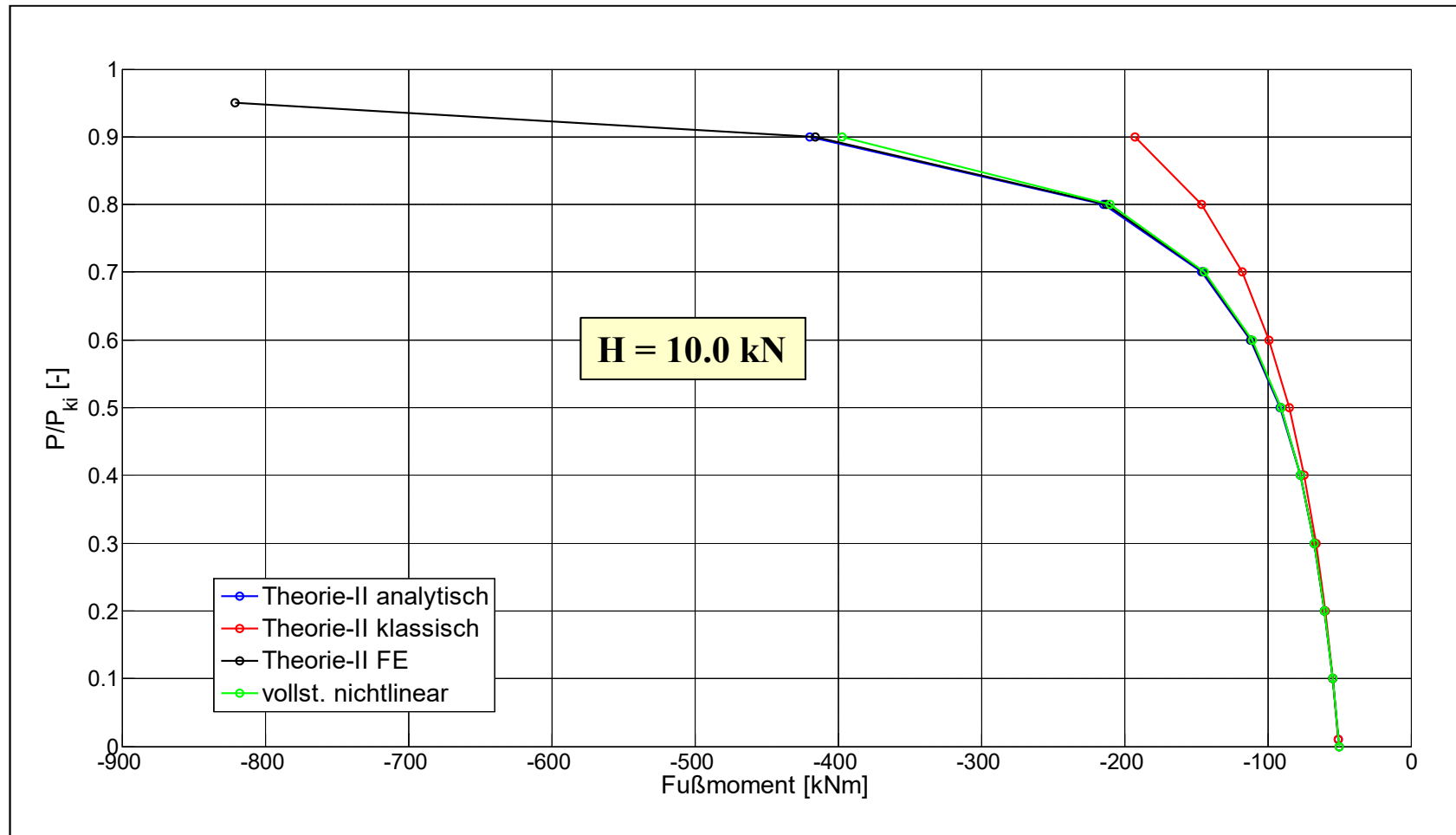
menum

# Vergleich der Methoden: $H = 25 \text{ kN}$



menum

# Vergleich der Methoden: $H = 10 \text{ kN}$



menum

# Vergleich der Methoden: Diskussion

1. Die analytische Lösung und die FE-Berechnung liefern stets identische Ergebnisse, stellen also eine einzige Methode dar, die nur unterschiedlich realisiert wurde.
2. Für Lasten bis ca.  $0.5 \cdot P_{ki}$  liefern alle Theorievarianten praktisch die gleichen Resultate, danach fangen die Kurven an, auseinander zu driften. Hierbei gilt Folgendes:
  1. Die Abweichungen wachsen mit wachsender Horizontalkraft, d.h. mit der Größe der initialen Biegeeffekte.
  2. Bei kleinem H nähert sich die FE-Theorie II asymptotisch an die FE-Theorie III an, welches bei der Abtriebskraftberechnung nicht der Fall ist.
  3. Die FE-Theorie II. Ordnung liegt auf der sicheren Seite. Ob dies immer der Fall ist, oder sich nur bei diesem Problem zeigt, wird näher in Teil B der Vorlesung durch numerische Studien untersucht.
  4. Die Rechnung mit den Abtriebskräften liegt auf der unsicheren Seite. Bei zu großer Annäherung an die Knicklast wachsen die Abweichungen so stark an, dass die Ergebnisse unbrauchbar werden.



# Untersuchung des Gültigkeitsbereichs



menum

# Physikalische Einschränkung des notwendigen Gültigkeitsbereichs

Da das Systemversagen durch Materialversagen hervorgerufen wird, haben die Last-Momenten-Diagramme nur Gültigkeit für denjenigen Lastbereich, für den die zulässigen Spannungen eingehalten sind. Alle Punkte jenseits dieser Lastgrenze stellen zwar mathematische Gleichgewichtspunkte dar, können aber nicht erreicht werden.

Somit muss bei der Bewertung der Methoden nur der Bereich berücksichtigt werden, der zu zulässigen Spannungen führt.

Das bislang untersuchte Zahlenbeispiel hat darauf keine Rücksicht genommen, so dass die Frage nach den Fehlern unter Berücksichtigung der Materialfestigkeit neu angegangen werden muss.





# Wahl eines Profils

**schon gewählte Biegesteifigkeit:**

$$EI = 10000 \text{ kNm}^2$$

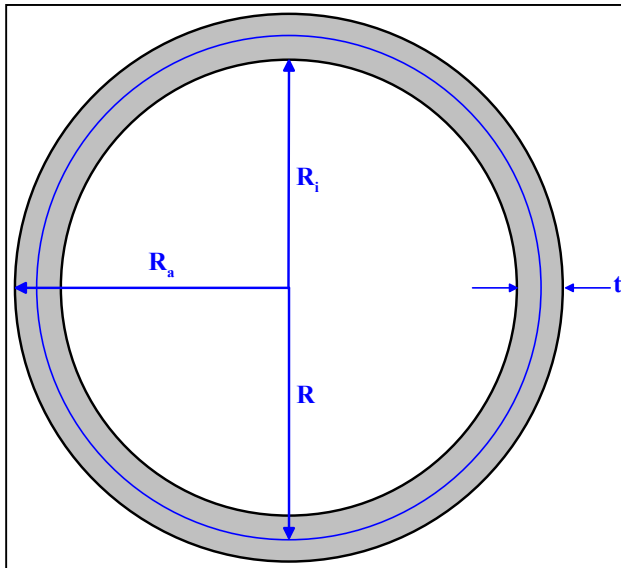
**gewählter Elastizitätsmodul:**

$$E = 20000 \text{ kN / cm}^2$$

**Flächenträgheitsmoment:**

$$I = 5000 \text{ cm}^4$$

**Annahme: Rohrquerschnitt**



**dünnwandiges Profil**

$$I = \pi t R^3$$

$$A = 2\pi t R$$

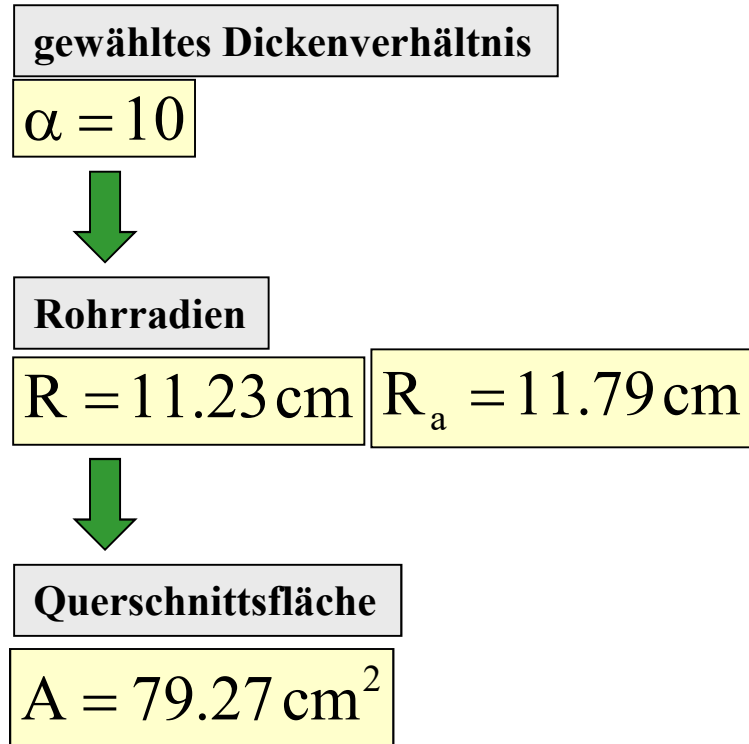
$$R = \sqrt[4]{\frac{\alpha \cdot I}{\pi}}$$

$$t = \frac{R}{\alpha}$$



menum

# Zahlenwerte für das Profil & Spannungsnachweis



Randspannung

$$\sigma_{\text{Rand}} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} R_a$$

- Für die Spannung gilt:
- Der Normalkraftanteil hängt nicht von der Verformung ab:  $N^I = N^{II}$ .
  - Die Biegespannung wird durch Effekte der Theorie II. Ordnung vergrößert.

↓

Der Fehler in der Spannung ist geringer als der Fehler im Moment!



menum

# Waren unsere bisherigen Werte realistisch?

gewählte Materialfestigkeit:

$$\sigma_F = 24 \text{ kN/cm}^2$$

Wir betrachten zunächst die Spannungen nur infolge der Horizontalkraft  $H = 100 \text{ kN}$ . Es ergibt sich eine Spannung, die weit jenseits der Fließspannung liegt. Somit sind alle Ergebnisse und alle damit angestellten Fehlerbetrachtungen ohne praktische Relevanz.

$$H = 100 \text{ kN} \rightarrow \sigma_{\text{Rand}} = -117.90 \text{ kN/cm}^2$$

Im Folgenden wählen wir eine Horizontallast, bei der noch nennenswerte Spannungsreserven für die Vertikallast  $P$  vorhanden sind.

$$H = 10 \text{ kN} \rightarrow \sigma_{\text{Rand}} = -11.79 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{\text{max}}^I = A(\sigma_F + \sigma_{\text{Rand}}) = 968 \text{ kN}$$

$$\lambda_P = \frac{P_{\text{max}}^I}{P_{\text{ki}}} = 0.98$$

Nach linearer Theorie könnte die Stütze noch zusätzlich 98 % der Knicklast aufnehmen.



menum

# Berechnung nach Theorie II. Ordnung

Durch die Effekte nach Theorie II. Ordnung vergrößert sich das Moment – als Folge sinkt die noch zusätzlich aufnehmbare Auflast P. Infolge der Nichtlinearität der gegenseitigen Abhängigkeit kann die maximal zusätzlich aufnehmbare Last nur durch Ausprobieren bzw. durch eine Einschachtelung gefunden werden. Es werden Auflasten ausprobiert, bis sich als maximale Spannung  $\sigma_F$  ergibt.

Versagenslastfaktor

$$\lambda_P = \frac{P_{\max}^{\text{II}}}{P_{\text{ki}}} = 0.42 \quad \rightarrow \quad \sigma_{\text{Rand}}^{\text{II}} = -24.05 \text{ kN/cm}^2$$

Durch die Vergrößerung des Momentes infolge der Tragwerksverformung reduziert sich die zusätzlich aufnehmbare Vertikallast P von 98 % der Knicklast bei linearer Berechnung auf 42 % bei Erfassung der geometrischen Nichtlinearität durch die Theorie II. Ordnung. Somit wäre eine lineare Berechnung schlichtweg falsch. Für diese Grenzlast ist es sinnvoll, eine Fehlerbetrachtung der möglichen Verfahren durchzuführen.



menum

# Fehlerbetrachtung

Die Berechnung mit vollständig nichtlinearer Theorie (Theorie III. Ordnung) wird als die exakteste Variante der wahren Lösung gleichgesetzt. Alle Abweichungen gegenüber dieser Lösung werden als Fehler betrachtet. Da die Stabneigung in der Einspannung Null ist, ist die Normalkraft  $N^{\text{III}}$  identisch zu  $-P$ , unabhängig von der Verschiebung des Kopfpunktes.

Theorie	$M^{\text{II}}$ [kNm]	Fehler $M^{\text{II}}$ [%]	$\sigma^{\text{II}}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	Fehler $\sigma^{\text{II}}$ [%]
<b>III. Ordnung FE</b>	-79.52	----	-23.98	----
<b>II. Ordnung FE</b>	-79.78	0.33	-24.05	0.30
<b>II. Ordnung klassisch</b>	-76.39	3.9	-23.25	3.0

Die Abweichungen der beiden FE-Lösungen sind vernachlässigbar klein. Die klassische Version der Theorie II. Ordnung zeigt zwar größere Abweichungen, die aber dennoch im Rahmen des Vertretbaren bleiben. Somit stellt die Theorie II. Ordnung, egal in welcher Formulierung, ein adäquates, aber dennoch einfach zu handhabendes Berechnungsinstrument dar, welches anstelle einer aufwendigen Berechnung nach Theorie III. Ordnung für Rahmentragwerke verwendet werden kann.



# Grenzen der Theorie II. Ordnung



menum

# Rückblick:

## Voraussetzungen der Theorie II. Ordnung

Die Theorie II. Ordnung fußt auf den gleichen Vereinfachungen wie die klassische Stabilitätstheorie. Somit verliert sie ihre Gültigkeit in genau den Fällen, bei denen auch die klassische Stabilitätstheorie ihre Gültigkeit verliert.

Die Annahmen der klassischen Stabilitätstheorie waren:

- Linearität des Tragwerks bis zum Versagen.
- Beschränkung der Nichtlinearität auf den linearen Teil der Anfangsspannungsmatrix.

Das bedeutet anschaulich: Das Tragverhalten wird durch Normalkräfte dominiert mit lediglich moderat großen Biegewirkungen. Bei Systemen mit geraden Stäben – also klassischen Rahmen – ist das im Falle von stabilitätsgefährdeten Systemen uneingeschränkt gegeben, bei gekrümmten Tragwerken wie Bögen jedoch nicht.

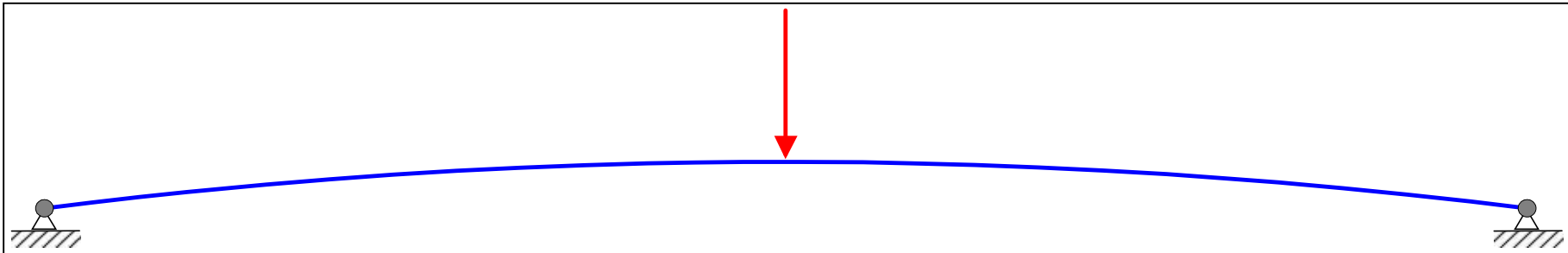


menum

# Flacher Bogen unter Einzellast

Wir greifen den Bogen unter mittlerer Einzellast der Vorlesung 5 wieder auf. Wäre die Krümmung Null, wäre das Tragwerk nicht stabilitätsgefährdet und trüge seine Lasten fast ausschließlich über Biegung ab mit minimalen Normalkräften, die unter „normalen“ Lastniveaus vernachlässigbar wären.

Durch die Krümmung entstehen Normalkräfte, die umso größer sind, je flacher der Bogen wird. Die Biegeeffekte hingegen ändern sich durch die Krümmung kaum, so dass von einem normalkraftdominierten Zustand keine Rede sein kann.



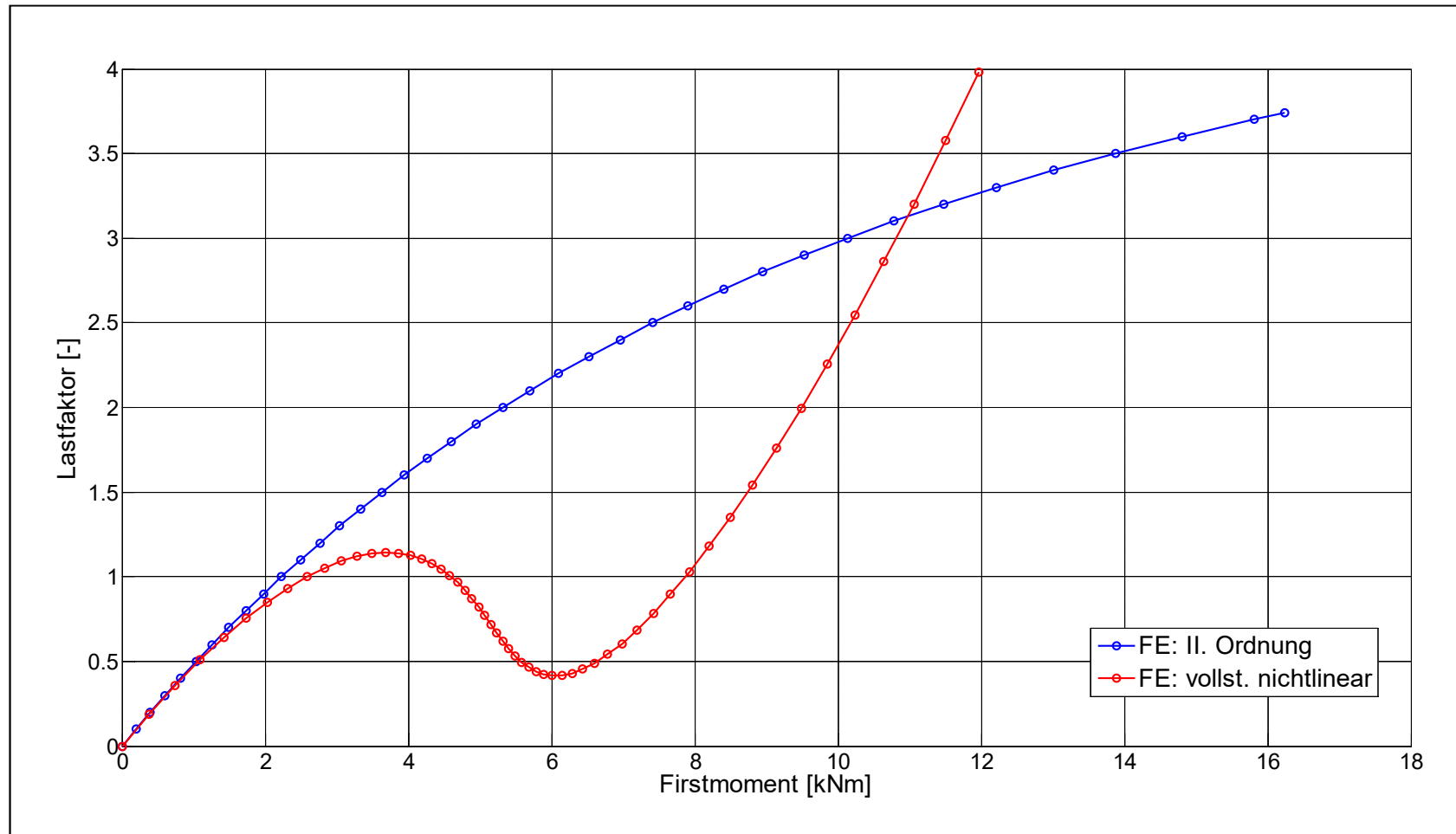
Es werden die Lösungen nach Theorie II. Ordnung und III. Ordnung für verschiedene Lastniveaus gegenübergestellt.



menum



# Vergleich: Theorie II. Ordnung – Theorie III. Ordnung



# Diskussion

Der Bogen versagt, sofern kein Materialversagen eintritt, durch symmetrisches Durchschlagen bei einem Lastfaktor von  $\lambda^{\text{III}} = 1.14$ . Das Last-Verformungs-Diagramm ist durch starke Nichtlinearität ab ca. 60 % der Durchschlagslast charakterisiert.

Diese Verformungen widersprechen den Annahmen der klassischen Stabilitätstheorie, so dass diese die Durchschlagslast nicht erfassen kann, sondern ein Verzweigen bei  $\lambda^{\text{stab}} = 3.75$  prognostiziert.

Die Theorie II. Ordnung übernimmt die geometrische Matrix der klassischen Stabilitätstheorie, so dass als Traglastfaktor  $\lambda^{\text{II}} = \lambda^{\text{Stab}}$  gefunden wird. Damit bilden sich keine großen Verformungen in der Nähe der Durchschlagslast aus. Es wäre also ein elastisches Stabilitätsversagen möglich, wenn bei der Durchschlagslast die Spannungen ausreichend klein wären. Eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung würde also keine Stabilitätsuntersuchung ersetzen.

