

Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

Vorlesung 6

Stabilitätsprobleme

Teil B: Anwendungsbeispiele



menum

Überblick

- **Stabtragwerke**
 - Die klassischen Eulerfälle
 - Ebener Bogen
 - Räumlicher Rahmen
 - Einzelstab- und Systemversagen
- **Kreiszyinderschalen**
 - kurze Kreiszyinderschale
 - lange stabartige Kreiszyinderschale
- **Faltwerk: I-Profil**
 - Kragstütze mit I-Profil
- **Raumfachwerke**
 - ???



menum

Balkentragwerke



menum

Die klassischen Eulerfälle



menum

Tragverhalten

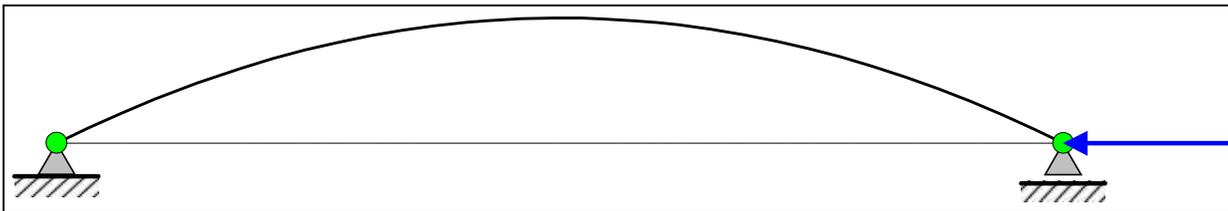
Vorbeulzustand

Vor dem Knickversagen liegt eine ausschließlich axiale Zusammendrückung u des Stabes vor – die Durchbiegung w ist identisch Null. Aus der kinematischen Gleichung geht hervor, dass damit ein vollständig lineares Verhalten vorliegt. Die Verformung u ist klein.

$$\varepsilon = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1 \xrightarrow{w = 0!} \varepsilon = \sqrt{(1 + u')^2} - 1 \longrightarrow \varepsilon = u'$$

Nachbeulzustand

Der Stab knickt in eine sinusförmige Biegelinie aus, deren Steifigkeit infolge der jetzt dominanten Biegeverformungen wesentlich kleiner ist als die Steifigkeit der Ausgangstragwerks. Somit werden sowohl w wie auch u stark anwachsen.



menum

Anwendbarkeit der klassischen Stabilitätstheorie

Man kann drei Phasen unterscheiden:

Vorbeulzustand:

Die Voraussetzungen der klassischen Stabilitätstheorie sind perfekt erfüllt: das Tragwerk verhält sich linear. Die Last-Verformungsdiagramme einer linearen und vollständig nichtlinearen Theorie wären deckungsgleich.

Ausknicken des Tragwerks:

Das Tragwerk knickt aus einem reinen Längskraftzustand aus. Die kritische Last der klassischen Stabilitätstheorie wäre identisch zur Verzweigungslast der vollständig geometrisch nichtlinearen Berechnung. Somit können wir die klassische Stabilitätstheorie ohne Einschränkungen anwenden.

Nachbeulzustand:

Die klassische Stabilitätstheorie kann quasi per Definition nichts über den Nachbeulzustand aussagen – sie beschränkt sich auf Ermittlung der Stabilitätslast. Im Nachbeulzustand verhält sich das Tragwerk wie ein Bogen unter Biegung. Im Vorgriff auf das nachfolgende Beispiel des ebenen Bogen unter mittiger Einzellast sei angemerkt, dass man zur realistischen Berechnung des postkritischen Bereichs eine Theorie großer Verformungen benötigt – eine Berechnung mit Theorie II. Ordnung würde unzureichende Ergebnisse liefern.



Ebener Bogen

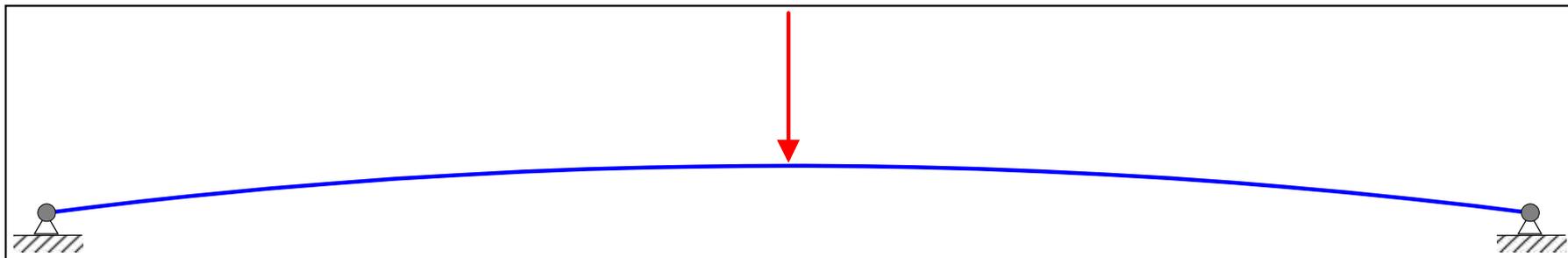


menum

Beispiel aus der Vorlesung 5

Geometrie 2: $R = 1016 \text{ cm}$

$$H = 7.97 \text{ cm}$$

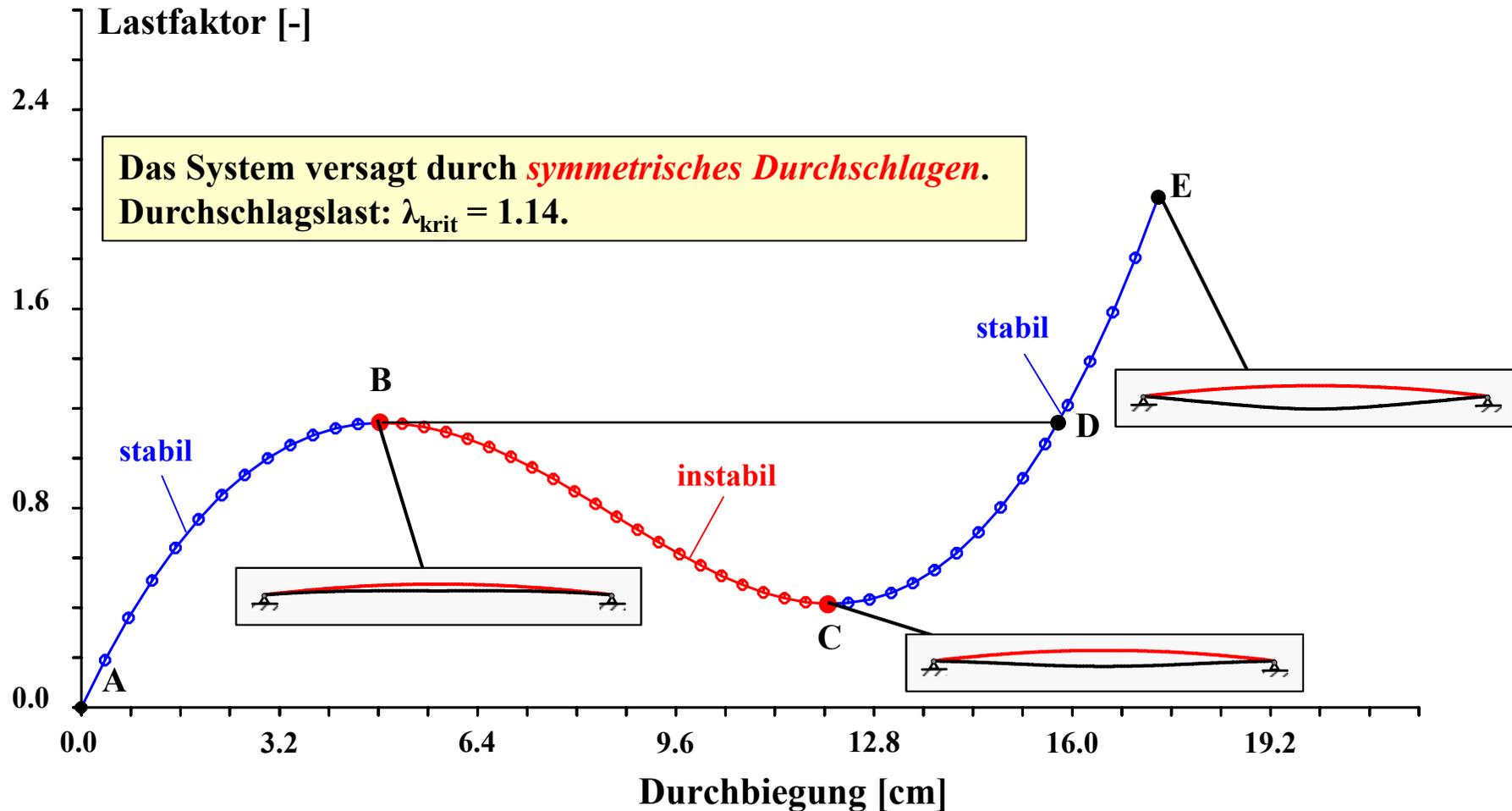


Für den Bogen wurde bereits in Vorlesung 5 eine *vollständig geometrisch nichtlineare* Berechnung durchgeführt. Als Versagensmodus ergab sich ein Durchschlagsversagen unter Beibehaltung der Anfangssymmetrie, d.h. die Analysen des halben Systems und des ganzen Systems ergaben identische Last-Verformungs-Diagramme. Die dort ermittelte Durchschlagslast stellt die wahre Lösung dar, da keinerlei Vereinfachungen getroffen wurden.



menum

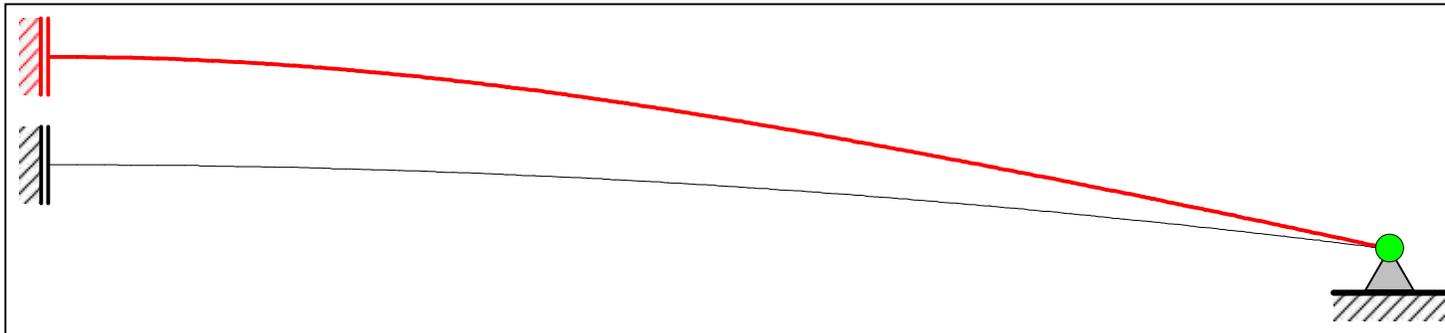
Vollständig geometrisch nichtlineare Rechnung



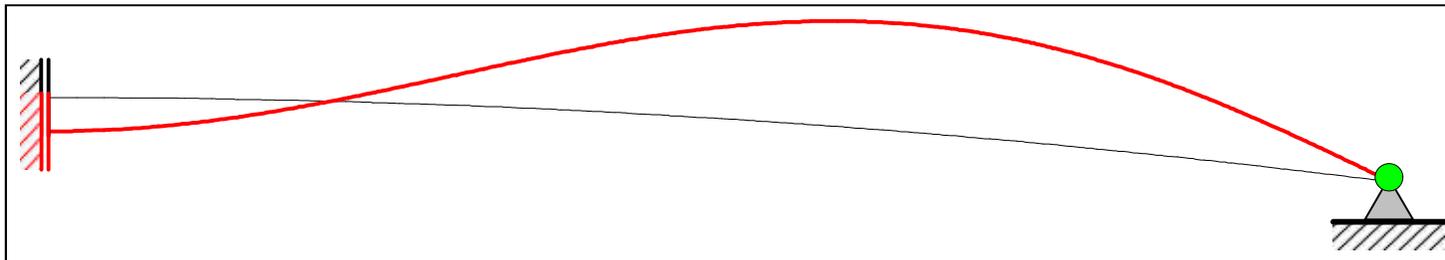
Stabilitätsuntersuchung I: symmetrisches System

Durch Vorgabe der Symmetriebedingung können sich nur symmetrische Knickformen ausbilden, was dem Durchschlagsproblem entspricht. Allerdings überschätzen die kritischen Lasten die wahre Stabilitätslast um ein Vielfaches

Knickform 1: $\lambda_{\text{krit}} = 5.75$



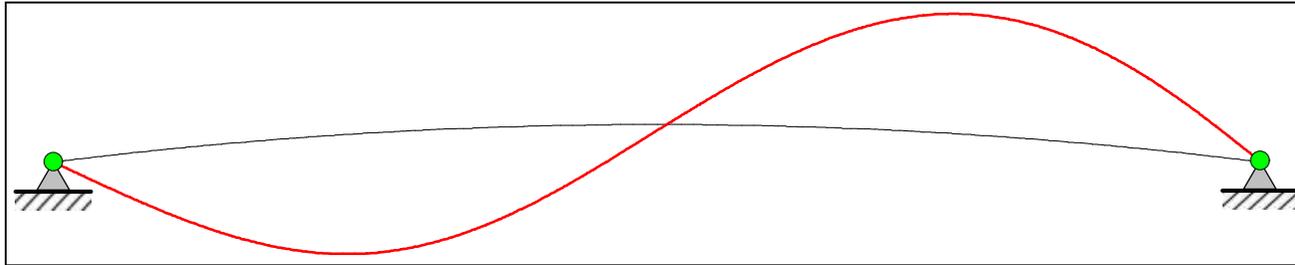
Knickform 2: $\lambda_{\text{krit}} = 8.60$



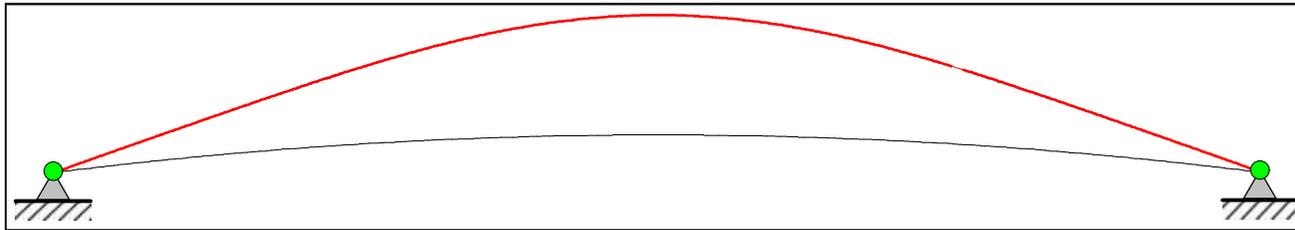
menum

Stabilitätsuntersuchung II: ganzes System

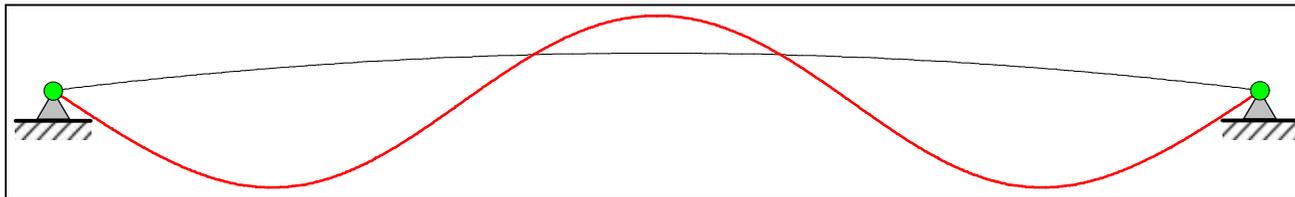
Knickform 1: $\lambda_{\text{krit}} = 3.75$



Knickform 2: $\lambda_{\text{krit}} = 5.75$



Knickform 3: $\lambda_{\text{krit}} = 8.60$



menum

Diskussion

Die Knickfiguren bestehen alle aus Sinushalbwellen mit unterschiedlichen Wellenzahlen. Als Folge ergeben sich Knickfiguren, die entweder symmetrisch oder antimetrisch zu der geometrischen Symmetrieachse verlaufen. Die Stabilitätsanalyse des gesamten Systems enthält alle Knickformen, die Berechnung des symmetrischen Teilsystems nur die symmetrischen. Somit könnte man mit der Berechnung von symmetrischem und antimetrischem Ersatzsystem alle Knickfiguren erfassen.

Das Tragverhalten des Bogens ist im Vorbeulzustand durch große Verformungen (Biegung) gekennzeichnet. Somit sind die Voraussetzungen der klassischen Stabilitätstheorie nicht erfüllt und die damit ermittelten Knicklasten liegen zahlenmäßig weit über der wahren Stabilitätslast (5.75 zu 1.14).

Die Knickuntersuchung des Gesamtsystems kann den wahren Versagensmodus nicht erfassen. Es ergibt sich für die kleinste kritische Last eine antimetrische Knickfigur mit $\lambda = 3.75$, die sich aber nicht einstellt. Im Verlaufe des Verformungsprozesses der vollständig geometrisch nichtlinearen Berechnung ändert sich die nichtlineare Steifigkeit derart, dass die Knicklast der symmetrischen Knickform schneller abnimmt als die der antimetrischen, bis ab einem bestimmten Verformungsniveau die symmetrische Figur maßgebend wird.

Es steht aber zu vermuten, dass eine antimetrische Imperfektion das Durchschlagsproblem zu einem Verzeigungsproblem werden lässt, dessen kritische Last unterhalb der Stabilitätslast des symmetrisch imperfekten Systems liegt. Das müsste untersucht werden.



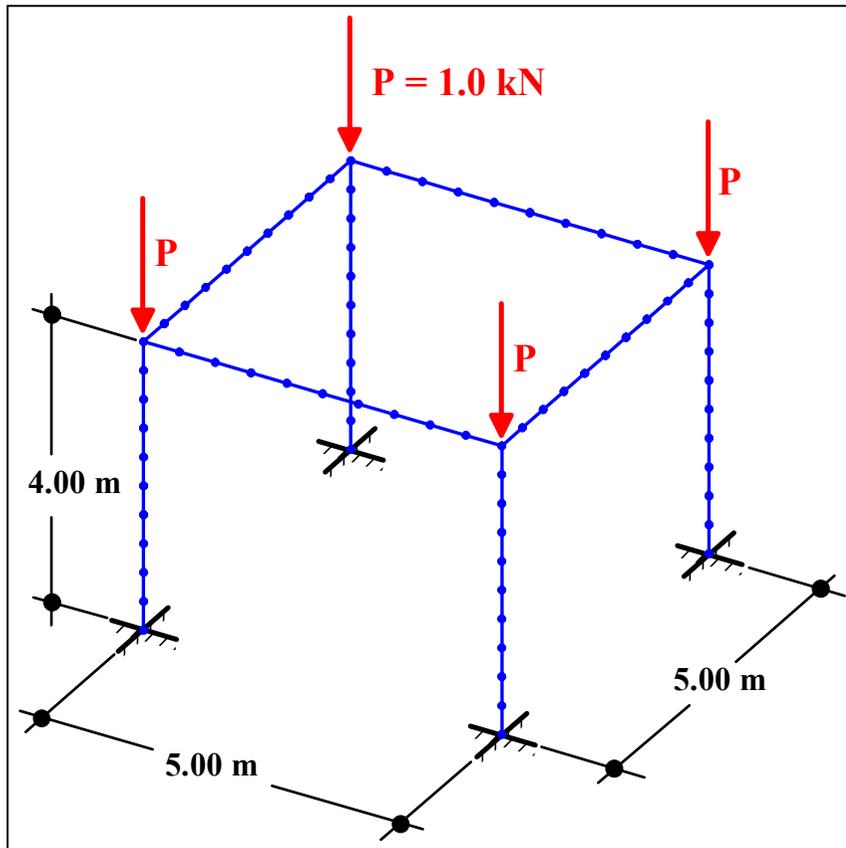
Räumlicher Rahmen



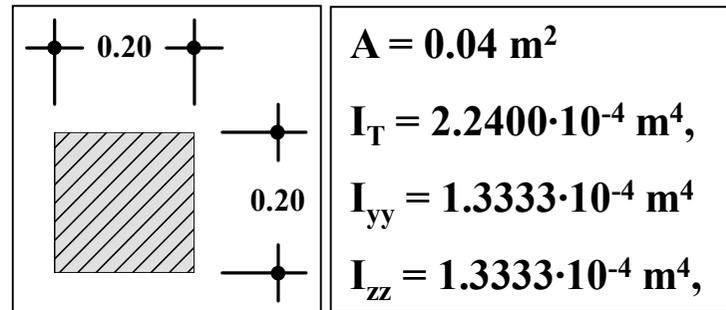
menum

Beispiel: Geometrie und Querschnitte

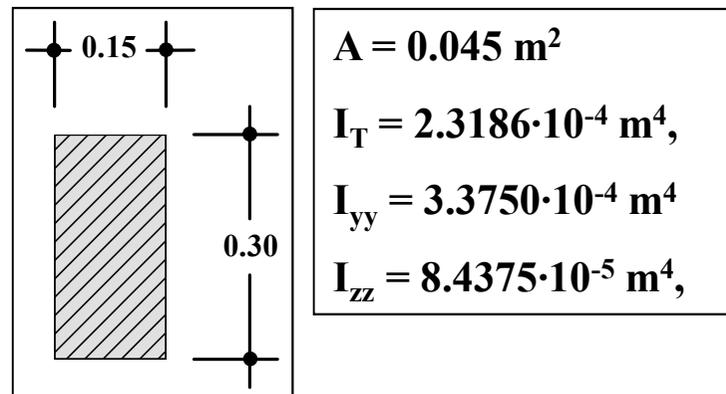
System und Belastung



Stützen



Riegel



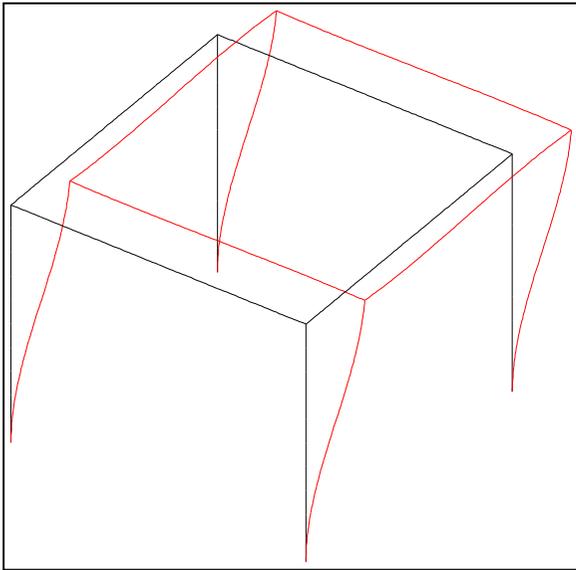
Materialparameter

$E = 3.0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $G = 1.5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

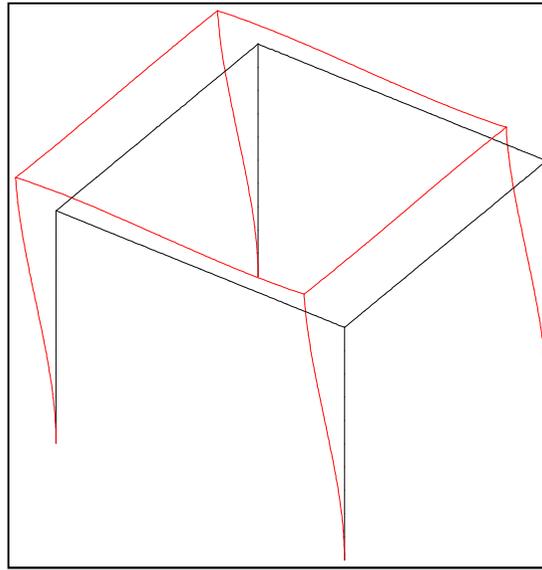


Knickformen der ersten 3 Knicklasten

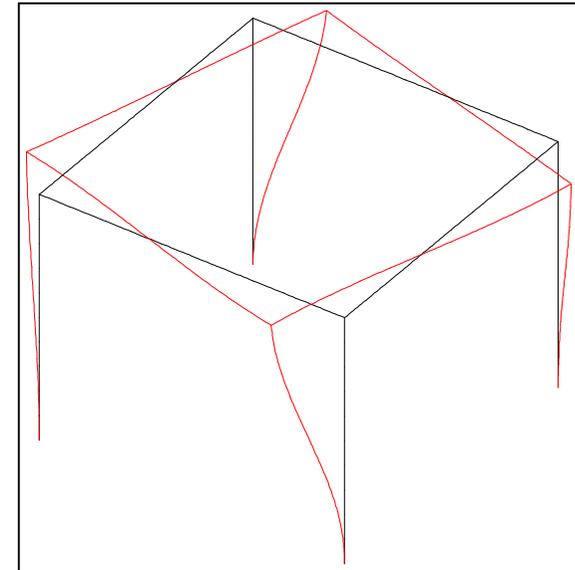
Knickform 1: $\lambda_1 = 2110.3$



Knickform 2: $\lambda_2 = 2110.3$



Knickform 3: $\lambda_3 = 2345.0$



Die beiden ersten Knickformen beschreiben ein globales Biegeknicken des Gesamtsystems, während Knickform 3 ein torsionales Ausweichen des Rahmens beschreibt. Dieses Torsionsknicken wird aber nicht durch Torsionsversagen der Stützen ausgelöst – diese erleiden ein Biegeknicken dergestalt, dass die Knickrichtungen eine globale Systemtorsion erzeugen.

Unerwartet sind die Knickrichtungen der beiden ersten Moden, denn man hätte spontan Knicken in x- bzw. y-Richtung erwartet. Obwohl es in der Perspektive nicht gut zu erkennen ist, liegt eine rein horizontale Bewegung der oberen Ebene vor, aber in schiefer Richtung. Warum?



Globales Biegeknicken

Es fällt auf, dass die beiden Knicklasten infolge der Tragwerkssymmetrie identisch sind. Bei mehrfachen Eigenwerten gilt grundsätzlich: jede Linearkombination der zugehörigen Eigenvektoren ist ebenfalls ein Eigenvektor. Bei Eigenwerten mit unterschiedlichen Zahlenwerten gehört zu jedem Eigenwert untrennbar ein ganz bestimmter Eigenvektor.

Eigenwertproblem der klassischen Stabilitätstheorie

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \Phi = \mathbf{0}$$



Eigenwertgleichung λ_1

$$(\mathbf{K} + \lambda_1 \mathbf{K}_g) \Phi_1 = \mathbf{0}$$

Eigenwertgleichung λ_2

$$(\mathbf{K} + \lambda_2 \mathbf{K}_g) \Phi_2 = \mathbf{0}$$



menum

Doppelte Eigenwerte

Sonderfall

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \Phi_1 = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \Phi_2 = \mathbf{0}$$

Linearkombination

$$\Phi = \alpha \Phi_1 + \beta \Phi_2$$

Eigenwertgleichung

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g)(\alpha \Phi_1 + \beta \Phi_2) = \mathbf{0}$$

Die Linearkombination erfüllt ebenfalls die Eigenwertgleichung und ist damit Eigenvektor.

$$\alpha(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \Phi_1 + \beta(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \Phi_2 = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \alpha \mathbf{0} + \beta \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Eigenwertlöser bestimmen iterativ die Eigenvektoren. Welche Linearkombination der Algorithmus findet ist ein numerisches Zufallsprodukt. Manchmal entsprechen die Eigenformen der Erwartung, manchmal jedoch auch nicht. Perfekt gleiche Eigenwerte sind jedoch unrealistisch, da ein Tragwerk durch unvermeidliche Imperfektionen nie exakt symmetrisch ist.

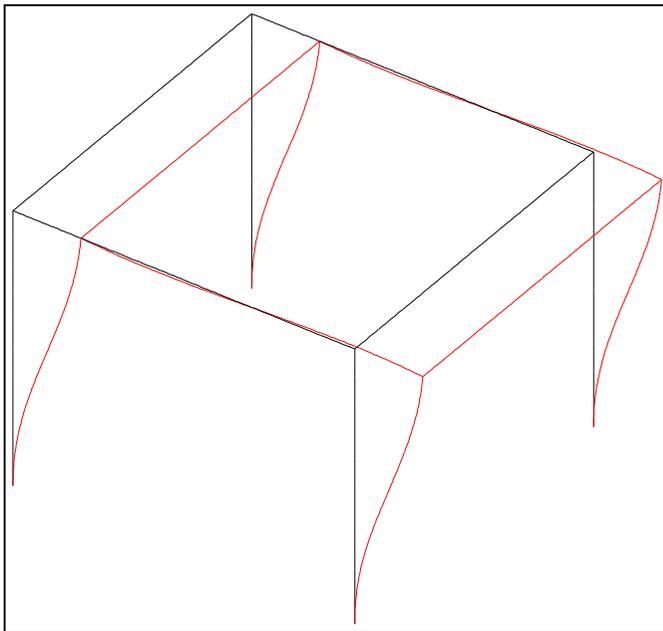


menum

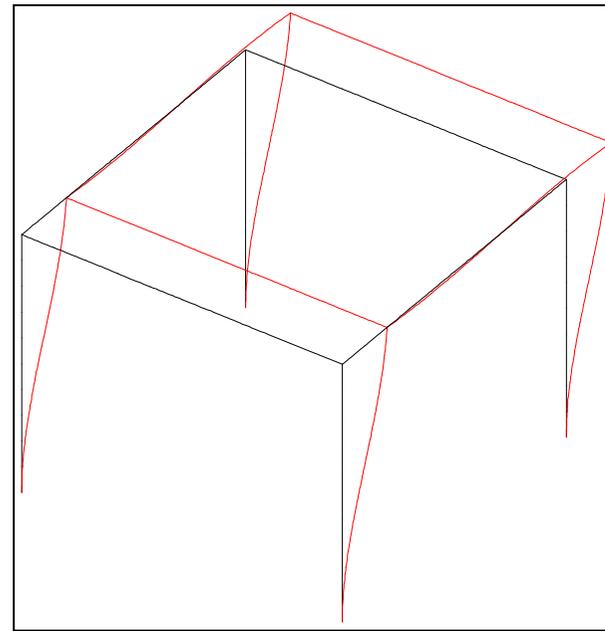
Imperfektes Tragwerk

Es wird angenommen, dass die Tragwerksabmessung L_x in x-Richtung marginal um 0.01 m länger ist als die Solllänge von 5.0 m. Diese Imperfektion von 0.2 % reicht zur Brechung der Symmetrie aus und man erhält die erwarteten Biegeknickformen getrennt in x- und y-Richtung. Die Knicklast 1 (Ausweichen in x-Richtung) sinkt etwas ab.

Knickform 1: $\lambda_1 = 2109.7$



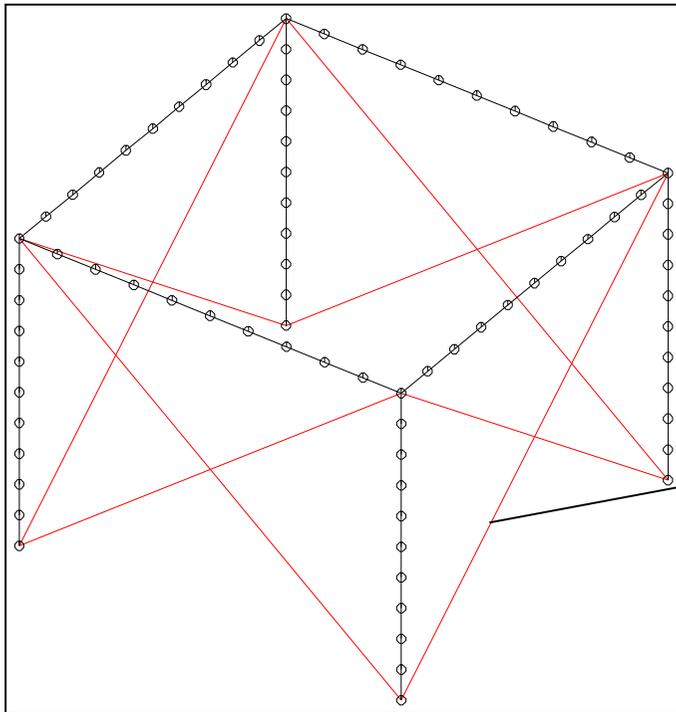
Knickform 2: $\lambda_2 = 2110.3$



menum

Aussteifung des Systems

Die Knickformen zeigen die Versagensmodi und liefern dadurch Anhaltspunkte, durch welche Maßnahmen die Stabilitätslast gesteigert werden kann. Offensichtlich muss das seitliche Ausweichen des Rahmens verhindert bzw. erschwert werden. Diese lässt sich durch Anordnung zusätzlicher Diagonalen erreichen.



Diagonalen aus Stahl:

$$E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$A = 1.0 \text{ cm}^2$$

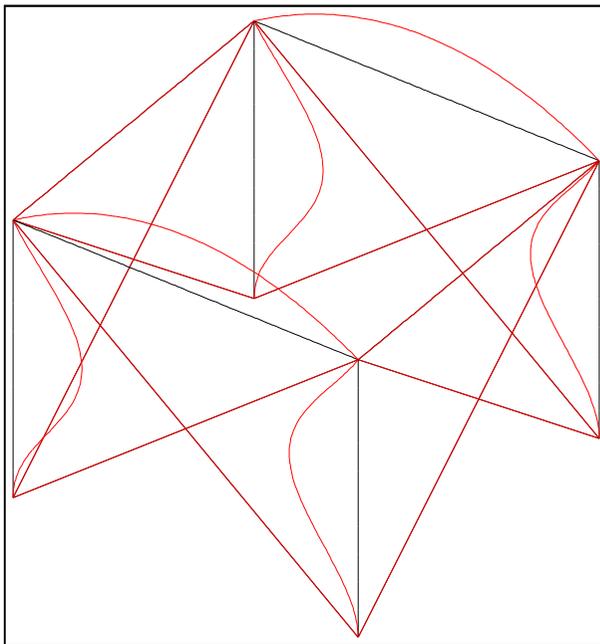


menum

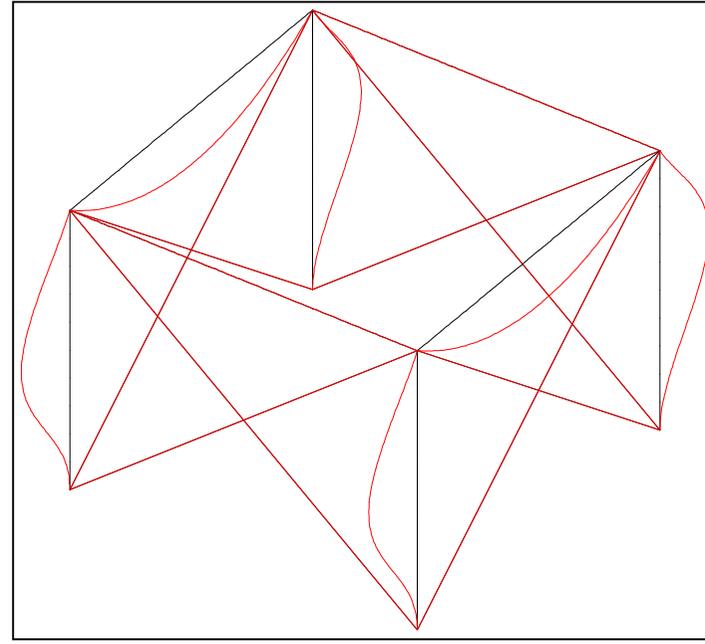
Auswirkungen der Aussteifungen

Die Anordnung der Diagonalen steigert trotz deren geringer Querschnittsfläche die Stabilitätslast auf das etwa 3.4-fache. Jetzt ist das Stabilitätsversagen durch symmetrisches Rahmenknicken jeweils gegenüberliegender Seiten charakterisiert. Entscheidend ist der richtige Ort der Versteifungselemente. Ähnliches gilt beispielsweise für die Anordnung von Beulsteifen bei Platten oder Schalen.

Knickform 1: $\lambda_1 = 7183.6$



Knickform 2: $\lambda_2 = 7186.2$



menum

Fazit

Mittels einer Eigenwertanalyse des Gesamtsystems lassen sich Knicklasten auch für komplexe Versagensmuster bestimmen. Der Sonderfall des Einzelstabknickens ist in der Gesamtbetrachtung enthalten.

Durch die Visualisierung der Knickfiguren bekommt man zwei wichtige Hinweise:

- 1. Anhand der Versagensfigur kann man erkennen, wo zusätzliche Aussteifungsbauteile optimal anzuordnen wären, um genau diesen Versagenmodus zu behindern.**
- 2. Die Stabilitätslasten reduzieren sich bei Auftreten von Imperfektionen. Da man a priori oftmals keine Kenntnis des Imperfektionsmusters hat, sind ungünstigste Imperfektionen anzusetzen. Zur Knickfigur affine Imperfektionen stellen den ungünstigsten Fall dar, da sie die spätere Versagensverformung unmittelbar verstärken. Unbekannt wäre dann noch die Größe der Imperfektionen, die sog. Imperfektionsamplitude.**

Bei Auftreten von Imperfektionen wandelt sich das Stabilitätsproblem in ein Spannungsproblem um. Für derartige Rahmen wäre es ausreichend, dieses Spannungsproblem nach Theorie II. Ordnung zu lösen.

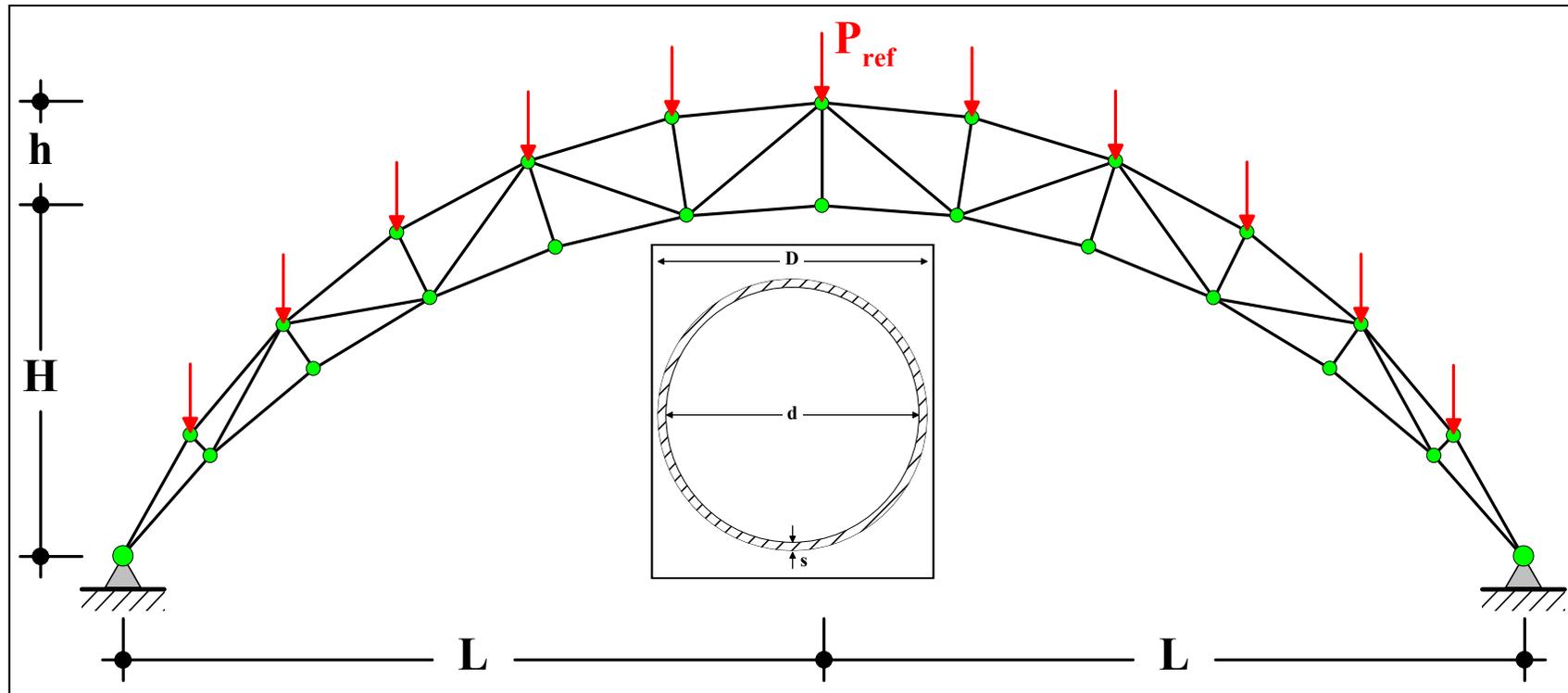


Einzelstabversagen und Systemversagen



menum

Problem: Gekrümmter Fachwerkträger



Tragwerksgeometrie:

$L = 10.0 \text{ m}$
 $H = 5.0 \text{ m}$
 $h = 1.466 \text{ m}$

Querschnittsgeometrie:

$D = 219.1 \text{ mm}$
 $s = 6.3 \text{ mm}$

Querschnittswerte:

$A = 42.1 \text{ cm}^2$
 $I = 2386 \text{ cm}^4$

Referenzlast:

$P_{\text{ref}} = 100 \text{ kN}$

Material:

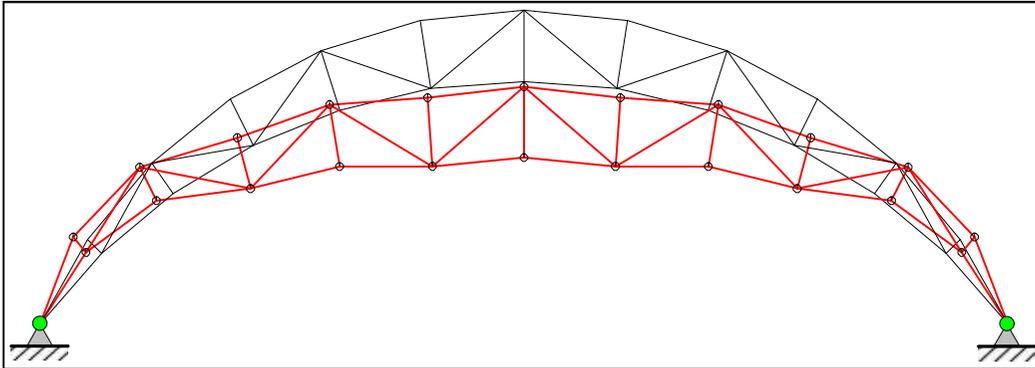
$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$
 $\sigma_F = 24 \text{ kN/cm}^2$



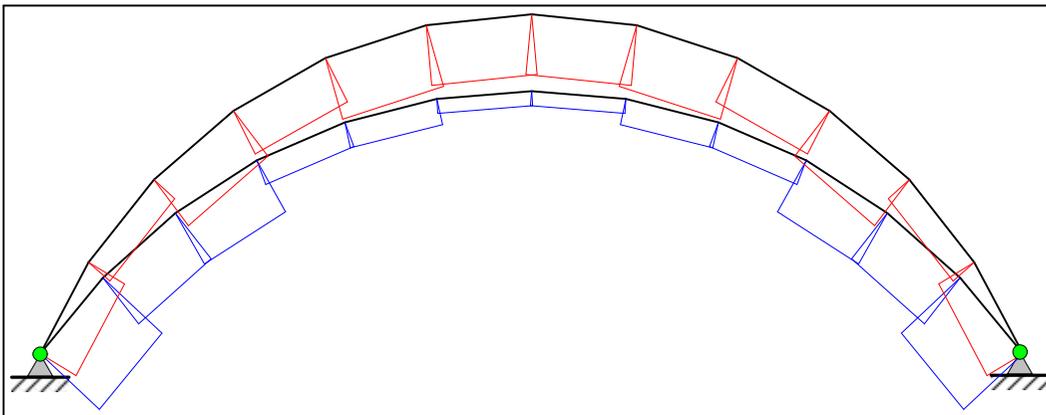
menum

Lineare Statische Berechnung

Verformungsfigur: symmetrisch



Stabkräfte der Hauptträger



maximale Stabdruckkraft:

$$N_{\max} = -455.58 \text{ kN}$$

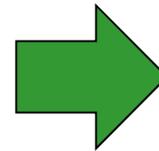


menum

Spannungsnachweis

Der Spannungsnachweis wird für den Stab mit der größten Stabkraft geführt. Der Quotient aus Fließgrenze und vorhandener Spannung liefert die Sicherheit gegen Materialversagen unter Wirkung der Referenzlast.

$$\sigma_{\max} = \frac{-455.58 \text{ kN}}{41.2 \text{ cm}^2} = -11.06 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



$$\lambda_{\text{mat}} = \frac{\sigma_F}{\sigma_{\max}} = \frac{24}{11.06} = 2.2$$

Die Sicherheit gegen Materialversagen ist ausreichend groß. Da das Tragwerk primär durch Druckkräfte charakterisiert ist, muss zusätzlich die Sicherheit gegen Ausknicken untersucht werden. Hierbei können sich zwei Mechanismen einstellen:

1. **Einzelstabversagen** durch klassisches Knicken der Gelenkstäbe. Dieser Mechanismus kann durch lokale Knickuntersuchung jedes Stabes erfasst werden. Hierfür wird stillschweigend angenommen, dass die Endpunkte der Einzelstäbe durch das Resttragwerk unverschieblich gehalten werden.
2. **Systemknickversagen** ohne Versagen eines einzelnen Stabes. Dieser Mechanismus kann nur über eine Eigenwertuntersuchung des Gesamtsystems erfasst werden.



Stabilität: Einzelstabversagen

Die **Knicklast** des Einzelstabes ergibt sich als Eulerlast des beidseitig gelenkig gelagerten Stabs. Die **Knicksicherheit des i -ten Einzelstabs** ergibt sich als Verhältnis der theoretisch aufnehmbaren Knicklast zur tatsächlich vorhandenen Stabkraft. Die **Knicksicherheit des Systems gegen Einzelstabversagen** schließlich ist durch das Minimum aller Einzelstabknicksicherheiten gegeben.

$$N_{\text{krit,euler}} = \frac{EI \cdot \pi^2}{S_k^2} = \frac{EI \cdot \pi^2}{L_{\text{stab}}^2} \longrightarrow \lambda_{\text{krit,euler}} = \min \left\{ \frac{N_{\text{krit,euler},i}}{N_{i,\text{vorhanden}}} \right\}$$

Der Untergurtstab direkt am Auflager besitzt die größte Stabkraft. Da die Stablängen aller Untergurtstäbe identisch und die Stabkräfte des Obergurts deutlich kleiner sind, ist dieser Stab maßgebend für das Gesamtsystem.

$$N_{\text{krit,euler}} = \frac{21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 2386 \text{cm}^4 \cdot \pi^2}{(192.99 \text{cm})^2} = 13277 \text{kN} \longrightarrow \lambda_{\text{krit,system}} = \frac{13277 \text{kN}}{455.58 \text{kN}} = 29.1$$

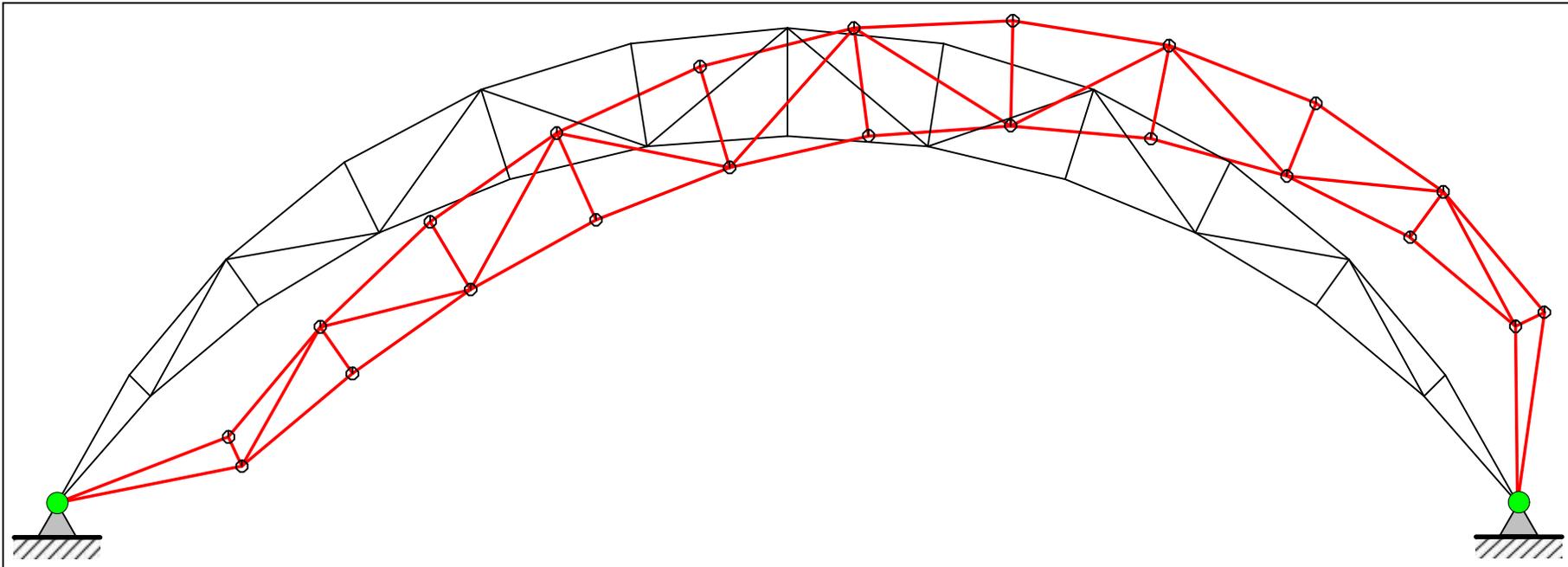
Neben dem Einzelstabknicken kann es aber auch zum Systemknicken kommen, bei dem das Gesamtsystem ausweicht, ohne dass ein einziger Stab für sich knickt.



menum

Stabilität: Systemversagen

Knickform 1: $\lambda_{\text{krit,system}} = 15.6$



Das System knickt in einer antimetrischen Knickform aus. Hierbei handelt es sich um eine globale Knickform: das Gesamtsystem weicht aus, ohne dass auch nur ein einziger Stab für sich ausknickt, da die kritische Last des globalen Knickmodus deutlich unter der Knicklast des Einzelstabversagens liegt.



menum

Fazit I

Mit der einer Eigenwertuntersuchung können sämtliche Versagensmoden identifiziert werden. Insbesondere bei Raumfachwerken können derartige globale Mechanismen auftreten, die man durch lokale Betrachtung der einzelnen Stäbe nie detektieren könnte.

Da hier ein reines Fachwerkmodell verwendet wurde, welches lediglich die Dehnsteifigkeiten der Stäbe in die FE-Berechnung einfließen lässt, ist diese Abbildung nicht in der Lage, beide Knickmechanismen innerhalb einer einzigen Eigenwertuntersuchung zu erfassen.

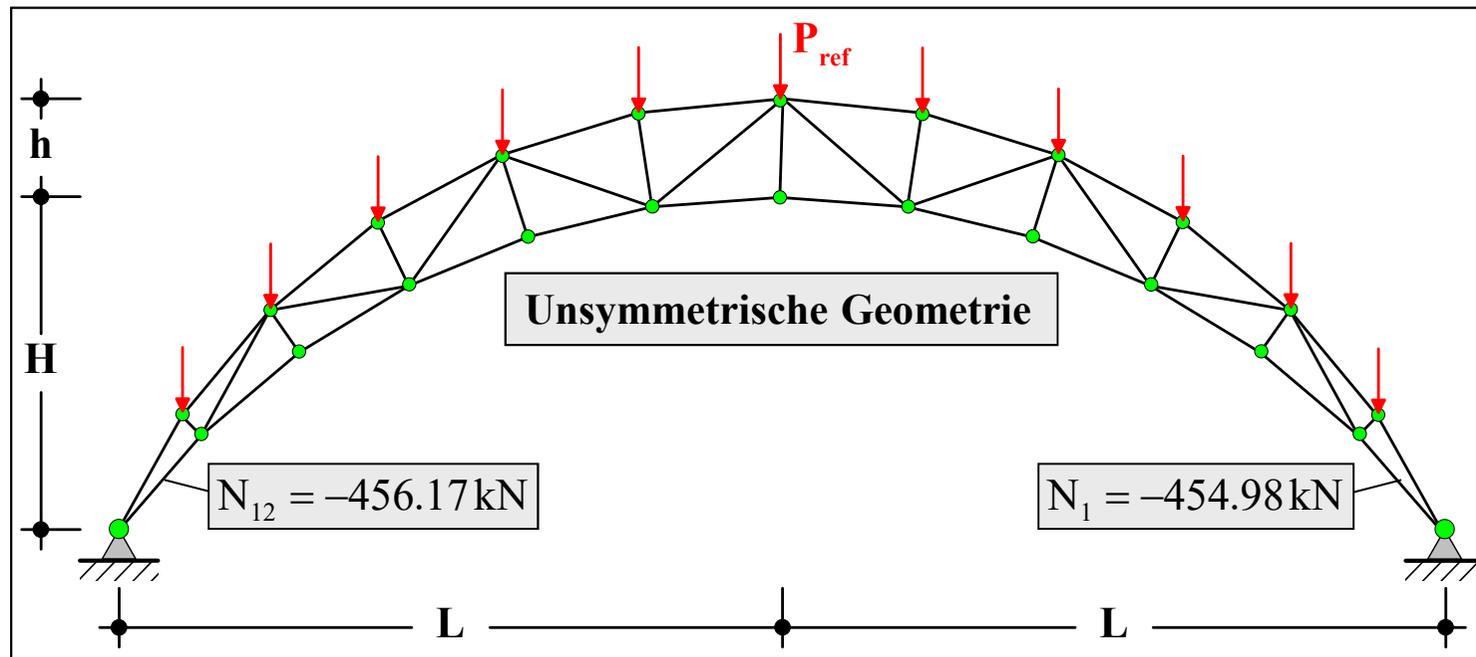
Das Systemversagen wird durch die globale Eigenwertberechnung erfasst. Das Einzelstabknicken wird unabhängig davon separat für jeden Stab nachgewiesen, wobei die Eigenwertuntersuchung der Einzelstäbe nicht numerisch erfolgt, sondern durch die analytische Lösung (die wiederum auf einer Eigenwertuntersuchung der Knick-DLG nach Euler basiert) ersetzt wird.

Somit stellt sich die Frage, ob ein entsprechendes Balkenmodell, bei dem die Fachwerkeigenschaft nicht durch spezielle Fachwerkstäbe, sondern durch die Einführung von Gelenken erzeugt wird, nicht in der Lage wäre, beide Mechanismen in einem einzigen Modell abzubilden. Das soll im Folgenden untersucht werden.



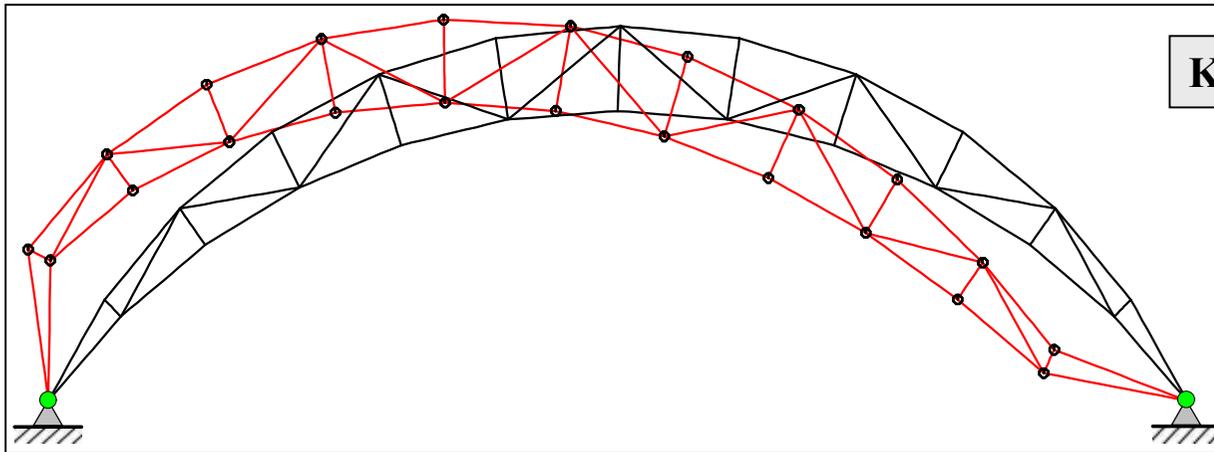
Balkenmodell

Aufgrund der Tragwerkssymmetrie gibt es eine Vielzahl von Stabpaaren mit jeweils gleicher Normalkraft. Deren Einzelstabknicklasten wären identisch, so dass im Falle erfolgreicher Abbildung des Einzelstabknickens Paare von identischen Eigenwerte entstehen würden mit der Eigenschaft, dass zufällige Kombinationen der Einzelknickformen als Eigenvektoren ermittelt werden. Um das Knicken jeweils nur eines einzigen Stabes zu erzwingen, wird der Obergurtnknoten in der Symmetrieachse um 0.05 m, d.h. um 0.5 % horizontal verschoben. Damit verschwindet die vorher vollständige Symmetrie des Schnittgrößenzustands.

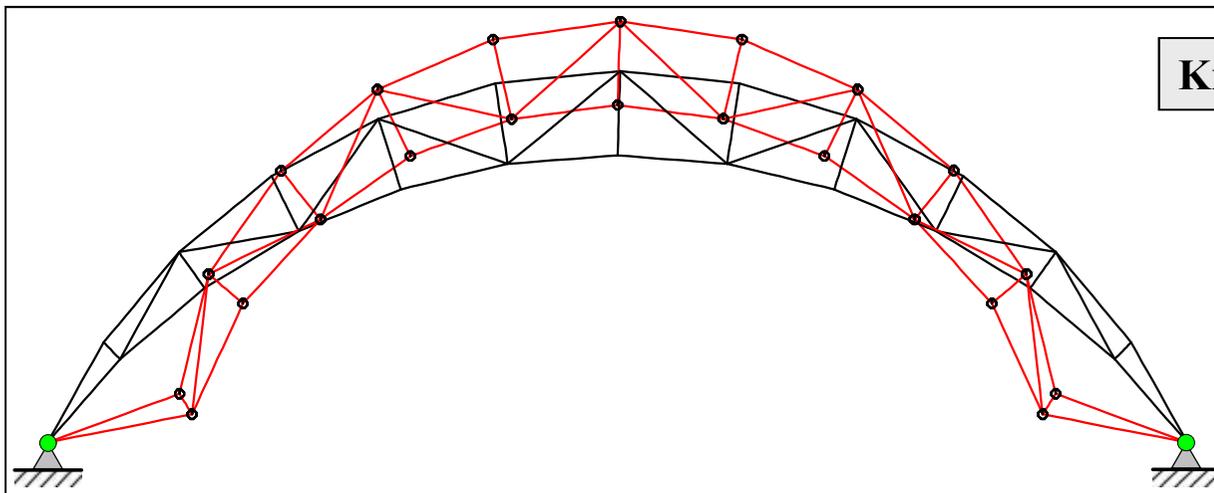


menum

Knickformen 1 und 2: Systemversagen



Knickform 1: $\lambda_{\text{krit}} = 16.1$



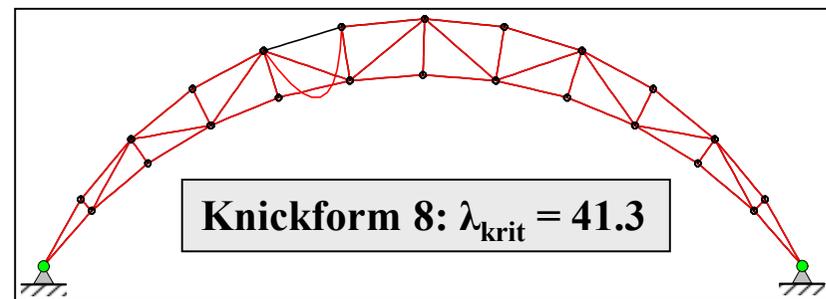
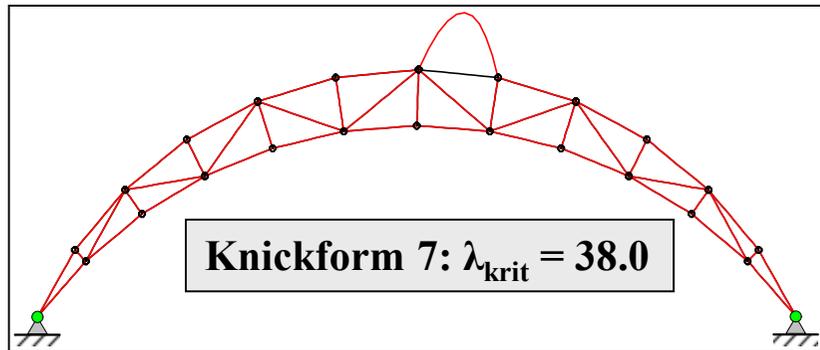
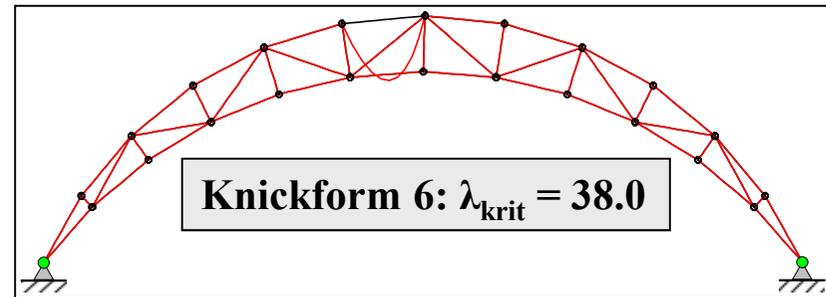
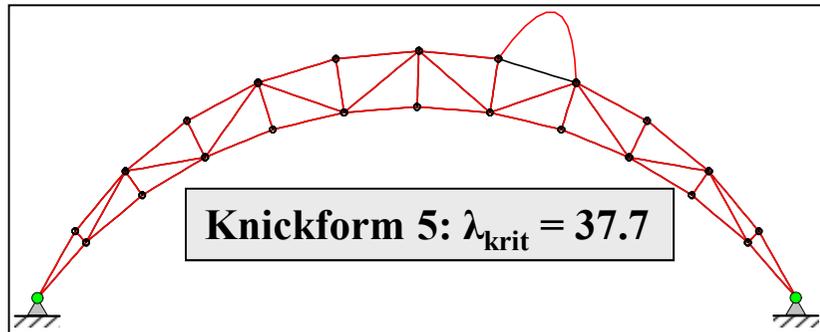
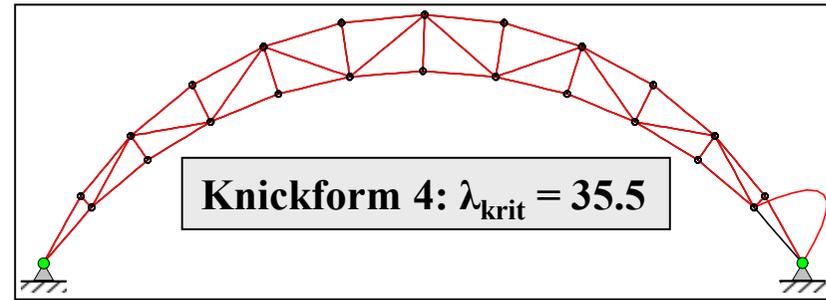
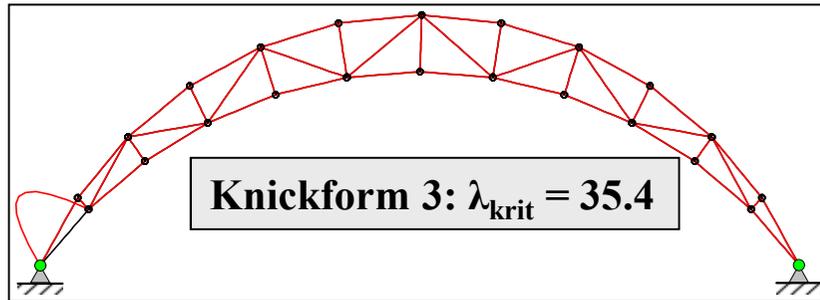
Knickform 2: $\lambda_{\text{krit}} = 27.8$

Die beiden ersten Knickformen stellen antisymmetrisches und symmetrisches Systemversagen dar. Diese Moden entsprechen denjenigen des Fachwerkmodells.



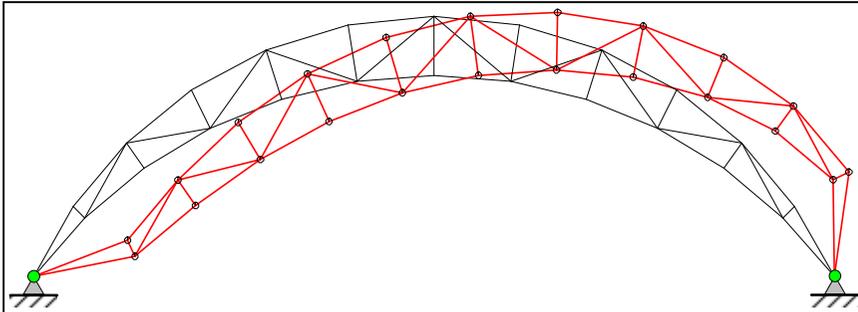
menum

Knickformen 3 bis 6: Einzelstabversagen

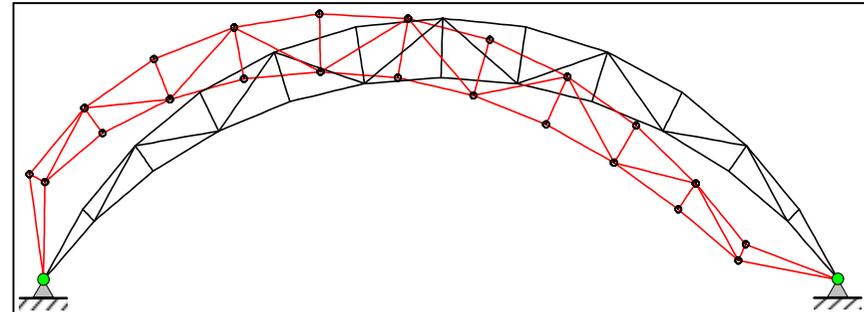


Vergleich I: Systemversagen

Fachwerkmodell: $\lambda_{\text{krit}} = 15.6$



Balkenmodell: $\lambda_{\text{krit}} = 16.1$



Fachwerkmodell und Balkenmodell liefern äquivalente Knickformen: der Fachwerkträger weicht seitlich aus. Die Amplitude der Knickform ist mathematisch nicht bestimmt, so dass die Richtung des Ausweichens ein Zufallsprodukt des Eigenwertlösers ist. Durch Vorzeichenumkehr lassen sich die beiden Eigenformen ineinander überführen – sie sind also „identisch“.

Die Zahlenwerte weichen leicht um ca. 3 % von einander ab. Das liegt darin begründet, dass die geometrische Steifigkeitsmatrix des Fachwerkstabes nicht identisch zur geometrischen Matrix des Balkens ist. Da die Abweichungen jedoch gering sind, kann das Fachwerkmodell (welches eine Idealisierung des wahren Systems darstellt, bei dem die Stäbe selbstverständlich eine Biegesteifigkeit besitzen) das Systemversagen uneingeschränkt abbilden.



menum

Vergleich II: Einzelstabversagen

Zunächst kann man konstatieren, dass das Balkenmodell in der Lage ist, das Ausknicken jedes einzelnen Stabes als Einzelstabknicken zu erfassen. Enttäuschend erscheint zunächst jedoch die Qualität der numerischen Lösung, die einen Fehler von ca. 20 % aufweist:

$$\lambda_{\text{einzelstab,euler}} = 29.1$$

$$\lambda_{\text{einzelstab,fem}} = 35.4$$



$$\frac{\lambda_{\text{einzelstab,fem}}}{\lambda_{\text{einzelstab,euler}}} = \frac{35.4}{29.1} = 1.2$$

$$N_{\text{krit2,euler}} = 32.89$$

$$N_{\text{krit2,fem}} = 39.99$$



$$\frac{N_{\text{krit2,fem}}}{N_{\text{krit2,euler}}} = \frac{39.99}{32.89} = 1.2$$

Allerdings gilt: zur Abbildung der sinusförmigen Knickfigur des Einzelstabes steht nur ein einziges Element mit kubischem Ansatz zur Verfügung, so dass man mit einem entsprechenden Diskretisierungsfehler rechnen muss.

In Vorlesung 6A wurde deshalb ein Konvergenztest für die vier Eulerfälle durchgeführt. Aus der sich dort findenden Tabelle werden wie Werte des Eulerfalls 2 entnommen. Der sich daraus ergebende numerische Fehler ist exakt genau so groß. Schon bei zwei Elementen schrumpft der Fehler auf weniger als 1 %. Würde man das Balkenmodell entsprechend feiner diskretisieren, würde das Einzelstabversagen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ hervorragend abgebildet werden.



Fazit II

Ein Balkenmodell kann den Sonderfall des Fachwerks durch Einfügen entsprechender Gelenke abbilden. Ein derartiges Modell ist in der Lage, gleichzeitig Systemversagen und Einzelstabversagen abzubilden. Allerdings reicht für das Einzelstabversagen eine Abbildung mit nur einem Element pro Fachwerkstab nicht aus – hier sind mindestens zwei Elemente erforderlich. Somit wäre eine Ermittlung der globalen Knickfigur mittels eines Fachwerkmodells einfacher.

Das vorliegende Fachwerk ist nicht stabilitätsgefährdet, da es bereits weit vor dem elastischen Knicken (Lastfaktor ca. 16) zu Materialversagen kommen würde (Lastfaktor ca. 2). Dennoch ist die Kenntnis der maßgebenden Knickfigur wichtig zur Definition von Imperfektionen. Die unvermeidbaren Imperfektionen können, wie bereits im Stahlbau bei der Berechnung verschieblicher Rahmen ausführlich besprochen, zu einer nicht unwesentlichen Erhöhung der Schnittgrößen führen.

Aus der Knickfigur des Gesamtsystems ergeben sich die anzusetzenden Imperfektionen dergestalt, dass man ein „geeignetes“ Vielfaches der Knickfigur auf die ursprünglichen Koordinaten addieren würde. Zu klären wäre dann noch die Frage, wie groß die Imperfektionsamplitude anzusetzen wäre.

Mit diesen „imperfekten“ Koordinaten würde man dann eine vollständig geometrisch nichtlineare Rechnung des Fachwerks durchführen. Eine Berechnung nach Theorie 2. Ordnung (siehe dazu Vorlesung 7) ist bei Fachwerken grundsätzlich nicht möglich.



Imperfekte Struktur

Eine sinnvolle Imperfektionsamplitude

Imperfekte Geometrie



menum

Nichtlineare Berechnung der imperfekten Struktur

Es wurde ... Lastverformungsdiagramm bis zum Materialversagen

Vergleich der maßgebenden Stabkräfte und Verformungen

Ergebnisse



menum

Beulen von Kreiszyllinderschalen



menum

Einführung

Schalentragwerke haben die Eigenschaft, ein Beulmuster mit mehreren Wellen in beiden Richtungen auszubilden. Die Anzahl der Wellen hängt dabei von der Schlankheit der Schale, d.h. dem Verhältnis von Schalendicke zu den Krümmungsradien ab. Je dünner die Schale ist, umso mehr Wellen bilden sich aus. Die Diskretisierung muss also so beschaffen sein, dass sie in der Lage ist, überhaupt die sich ausbildenden Wellen abzubilden, ist also dickenabhängig. Da das Wellenmuster nicht unbedingt so beschaffen sein muss, dass sich in den geometrischen Symmetrielinien Wellenberge oder Wellennulldurchgänge ausbilden, kann die Ansetzung von Symmetrie- oder Antimetriebedingungen zu fehlerhaften Beullasten führen. Die Abbildung derartiger Beulmuster wird für einen kurzen Kreiszyylinder, wie er im Behälterbau auftritt, untersucht (Problem A).

Wird der Zylinder immer länger, geht er in ein stabartiges Tragwerk mit Kreisringquerschnitt über. Dann stellt sich anstelle eines mehrwelligen Beulmusters eine balkenartige Knickfigur entsprechend der Eulerfälle ein. Inwiefern das Schalenmodell automatisch zur Balkenlösung konvergiert oder nicht, wird im Problem B getestet.

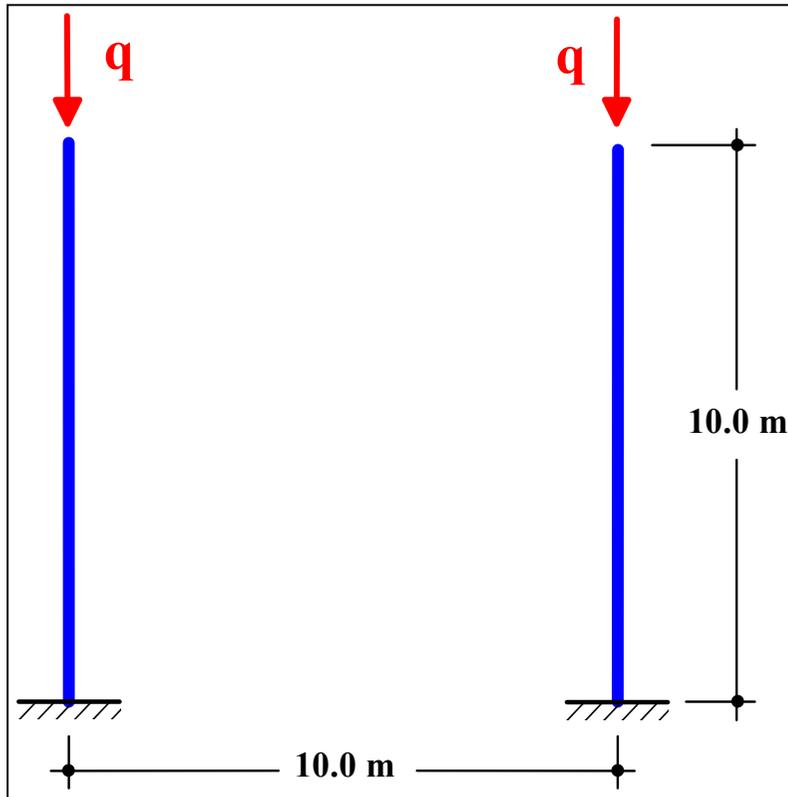


Problem A: Kurzer Kreiszyylinder



menu

Problemstellung



Materialeigenschaften:

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

Dünner Zylinder:

$$h/R = 0.02/10.0 = 0.002$$

Schalenmodell:

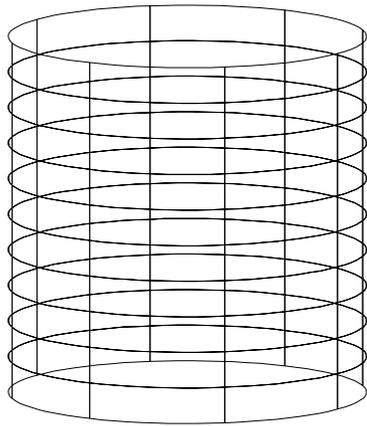
- Elemente in konvektiven Koordinaten
- NACS-Familie von R. Harte
- Elemente sind gekrümmt
- bikubische Ansatzfunktionen

Es wird der Einfluss der Diskretisierung auf die Genauigkeit untersucht. Hierbei kann die Netzdichte in zwei Richtungen (Umfangsrichtung und Höhenrichtung) variiert werden.

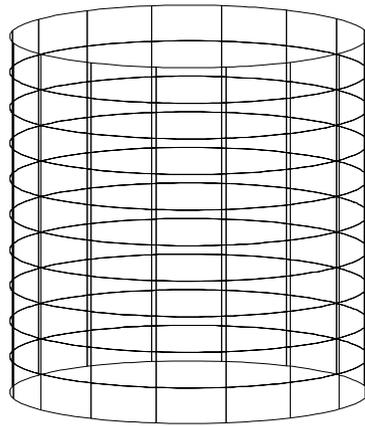


menum

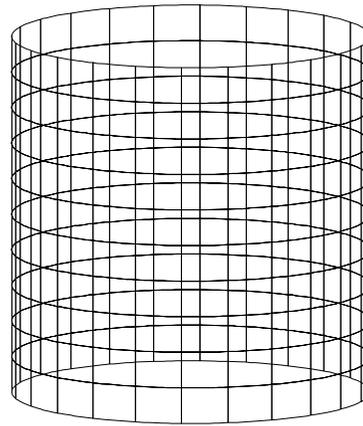
Untersuchte Diskretisierungen



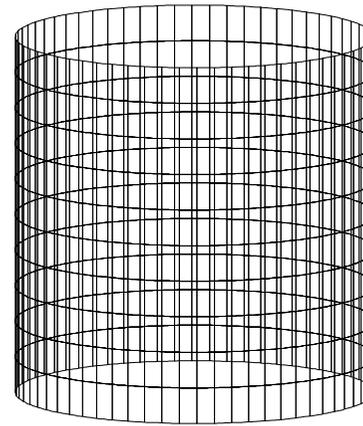
Raster 10 x 008



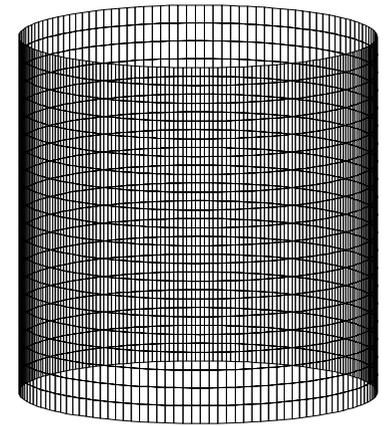
Raster 10 x 016



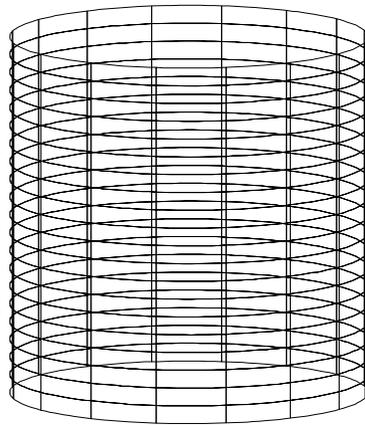
Raster 10 x 032



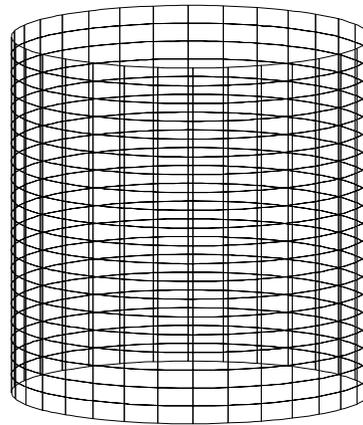
Raster 10 x 064



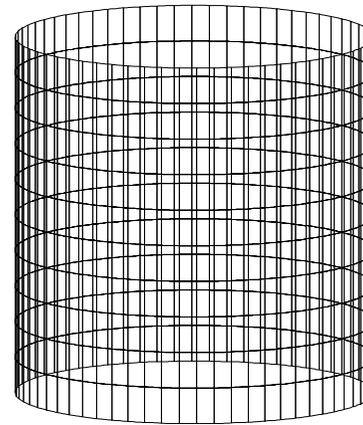
Raster 10 x 128



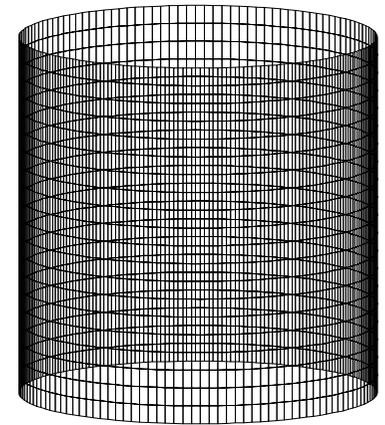
Raster 20 x 016



Raster 20 x 032



Raster 20 x 064

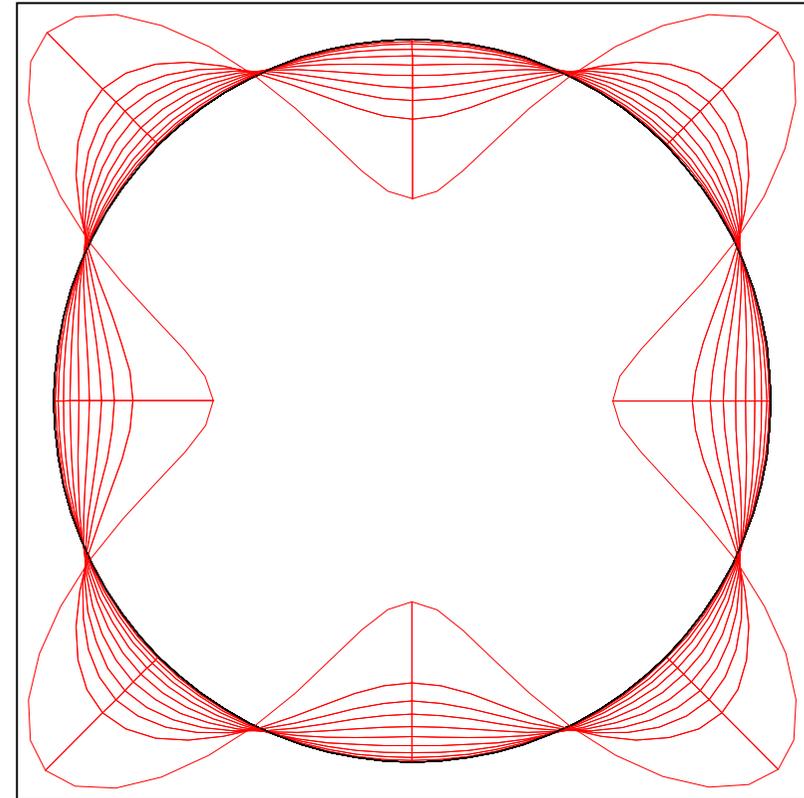
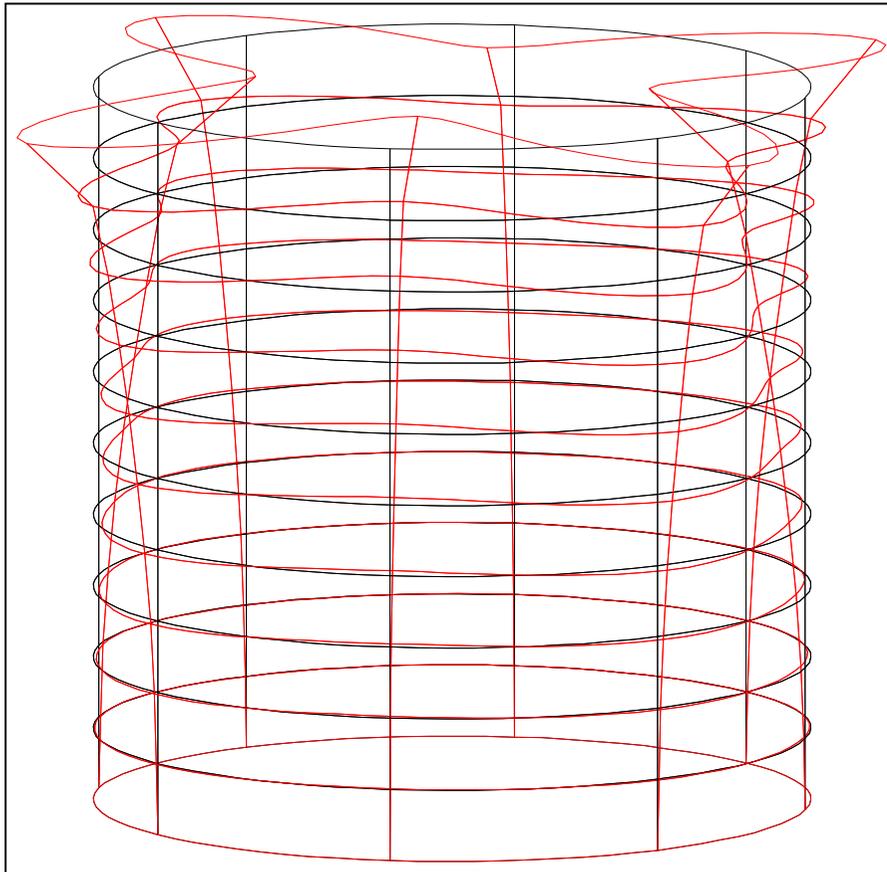


Raster 20 x 128



menum

Beulberechnung mit Elementtraster 10x008

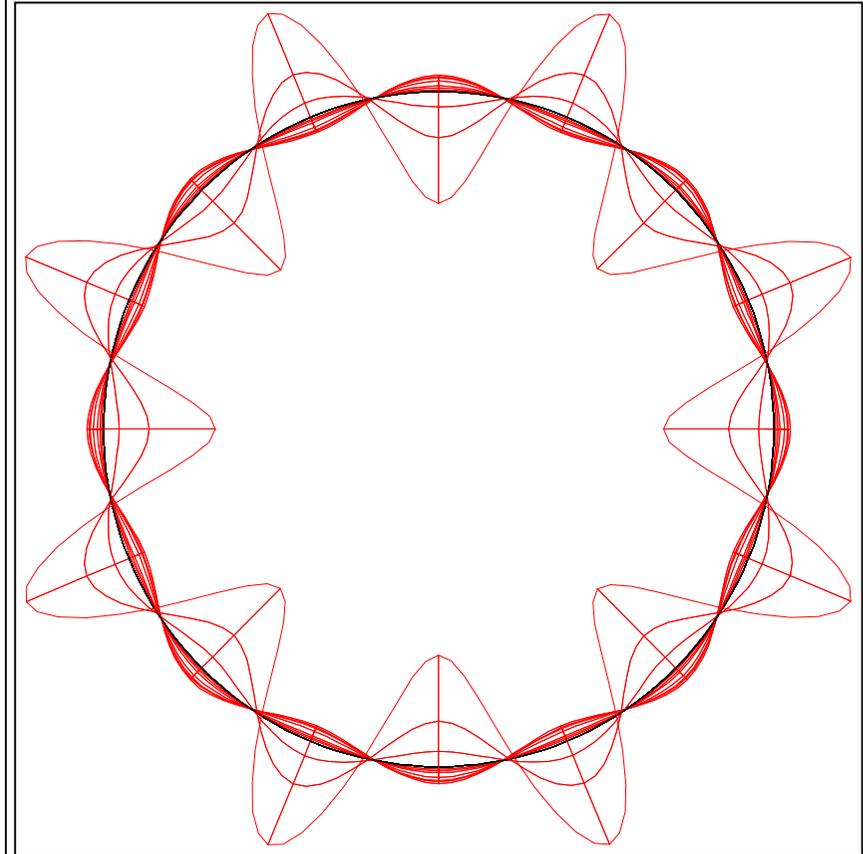
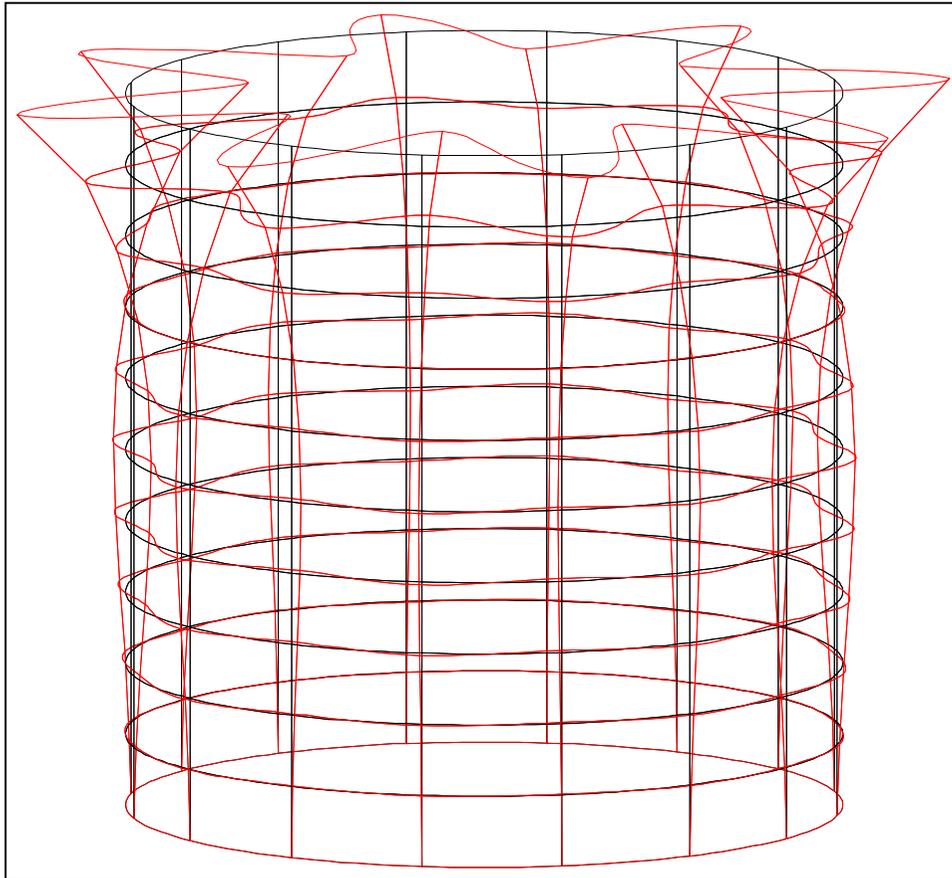


Wellenzahl 4, Beullast: $q_{\text{beul}} = 5162 \text{ kN/m}$



menum

Beulberechnung mit Elementtraster 10x016

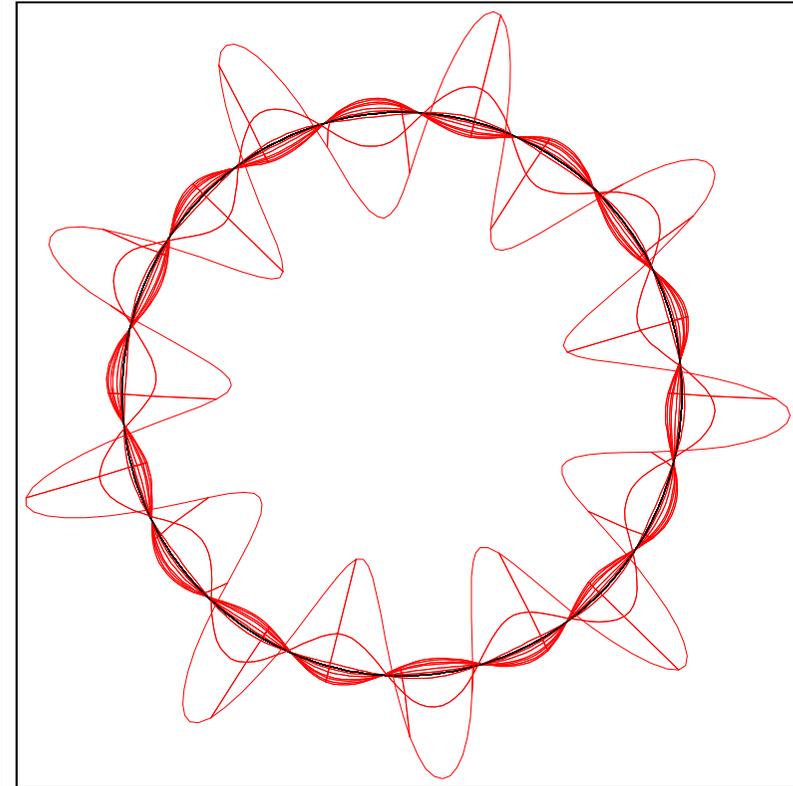
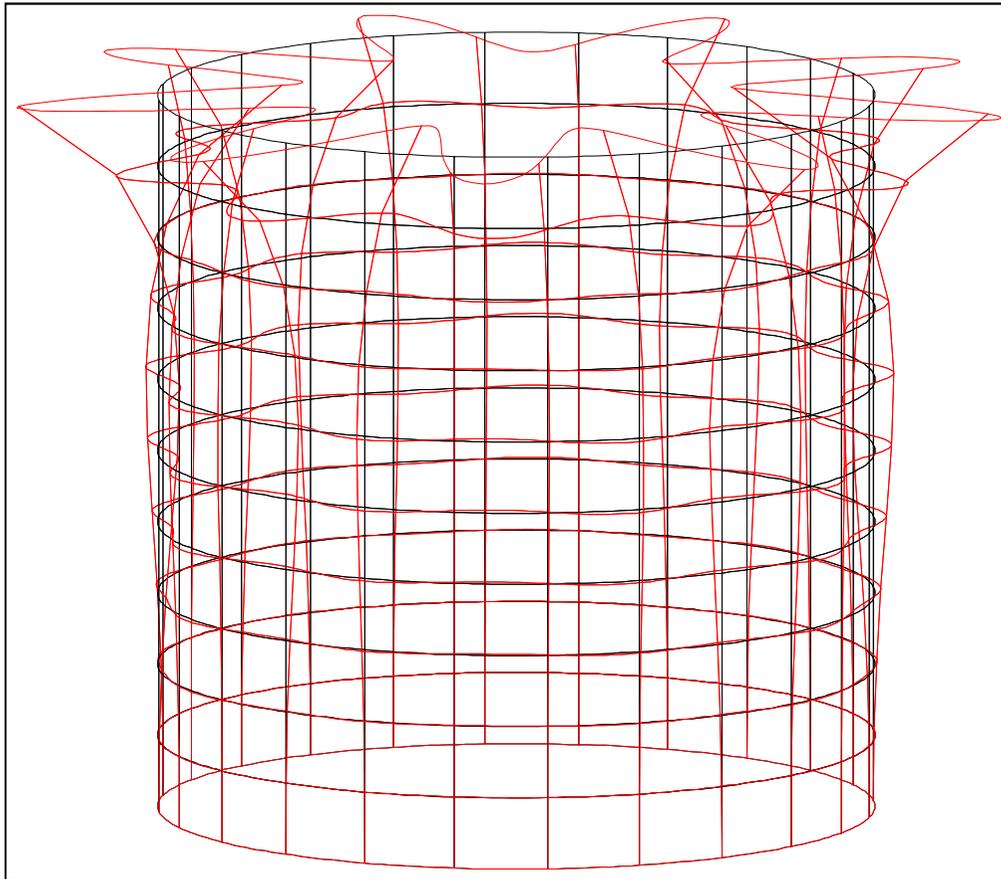


Wellenzahl 8, Beullast: $q_{\text{beul}} = 3932 \text{ kN/m}$



menum

Beulberechnung mit Elementtraster 10x032

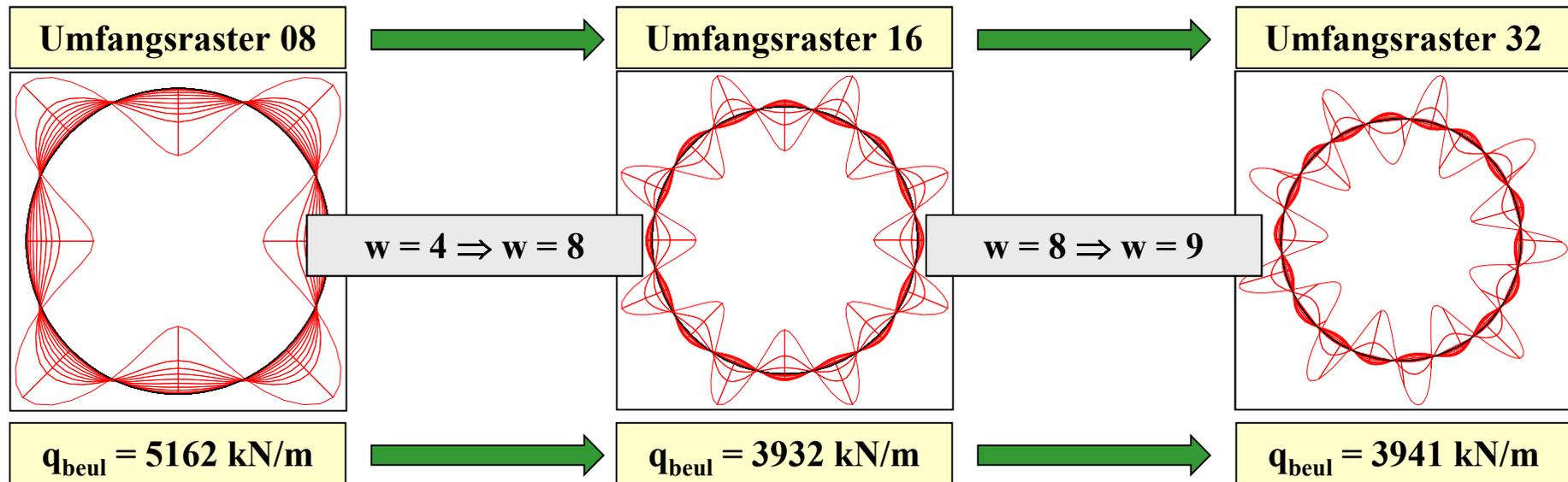


Wellenzahl 9, Beullast: $q_{\text{beul}} = 3941 \text{ kN/m}$



menum

Warum ergibt sich keine monotone Konvergenz?



Durch die kontinuierliche Netzverfeinerung in Umfangrichtung steigt die Wellenzahl von 4 auf 8 und dann auf 9. Der Übergang von 4 Wellen auf 8 Wellen führt zu einer enormen Reduktion der Beullast auf 76 %. Die Ausbildung einer weiteren Welle verringert jedoch die Beullast nicht weiter – es kommt zu einem leichten Anstieg. Womit ist dieses zunächst unlogisch erscheinende Verhalten zu erklären?

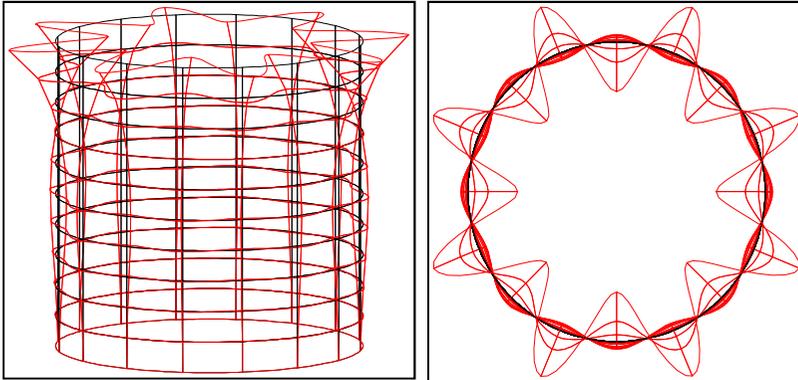


menum

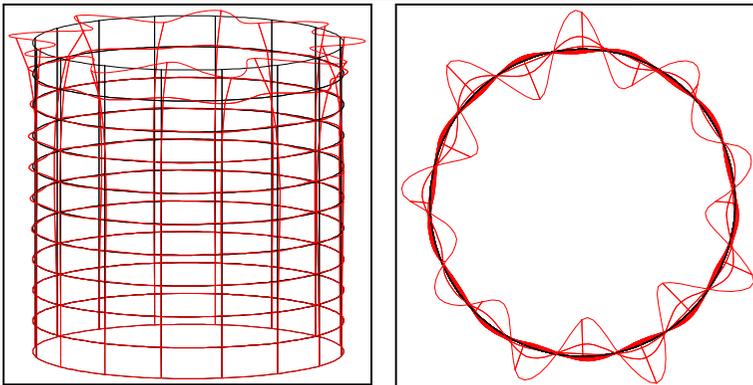
Was ist mit den höheren Beulformen?

Raster 10x016

Beulform 1: $w = 8$, $q_{\text{beul}} = 3932 \text{ kN/m}$



Beulform 2: $w = 9$, $q_{\text{beul}} = 4041 \text{ kN/m}$



Die Diskretisierung mit 16 Umfangselementen enthielt bereits die Beulform mit 9 Vollwellen, allerdings erst als 2. Beulform mit einer kritischen Last von $q_{\text{beul}} = 4041 \text{ kN/m}$.

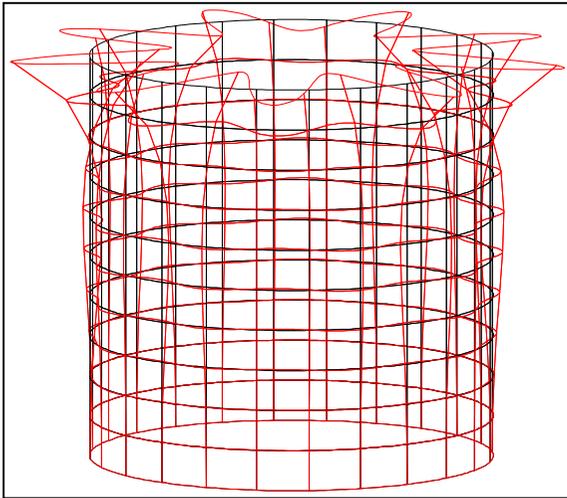
Durch Netzverdichtung auf 32 Umfangselemente verschwand die Form mit 8 Wellen und die 9-wellige Form wurde relevant. Somit ist es nicht ganz richtig, die 8-wellige kritische Last mit 16 Elementen mit der 9-welligen Last mit 32 Elementen zu vergleichen. Vergleicht man physikalisch gleiche Beulformen (also die mit 9 Wellen), erhält man eine Reduktion der kritischen Last von $q_{\text{beul},16} = 4041 \text{ kN/m}$ auf $q_{\text{beul},32} = 3941 \text{ kN/m}$ und wir haben monotone Konvergenz.



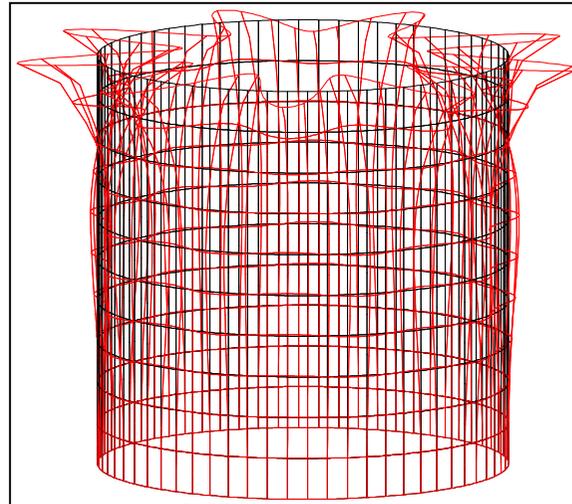
menum

Konvergenz des Rasters mit 10 Höhenelementen

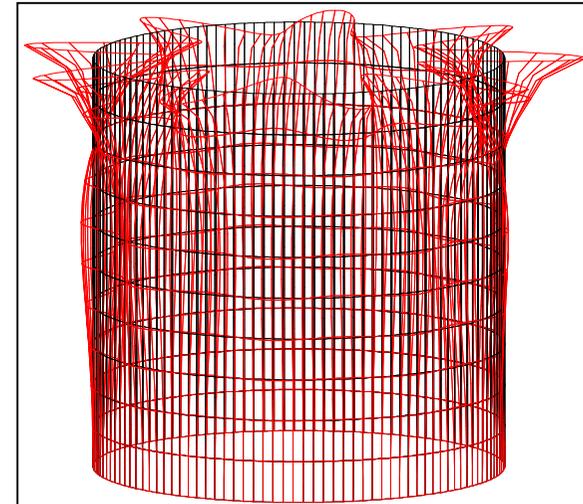
Eine weitere Netzverfeinerung in Umfangsrichtung führt zu keiner Änderung der Wellenzahl: wir haben somit mit 32 Elementen *Konvergenz der Beulform*. Die *Beullast* konvergiert ebenfalls bei weiterer Netzverdichtung.



Raster 032: $q_{\text{beul}} = 3941 \text{ kN/m}$



Raster 064: $q_{\text{beul}} = 3892 \text{ kN/m}$



Raster 128: $q_{\text{beul}} = 3890 \text{ kN/m}$

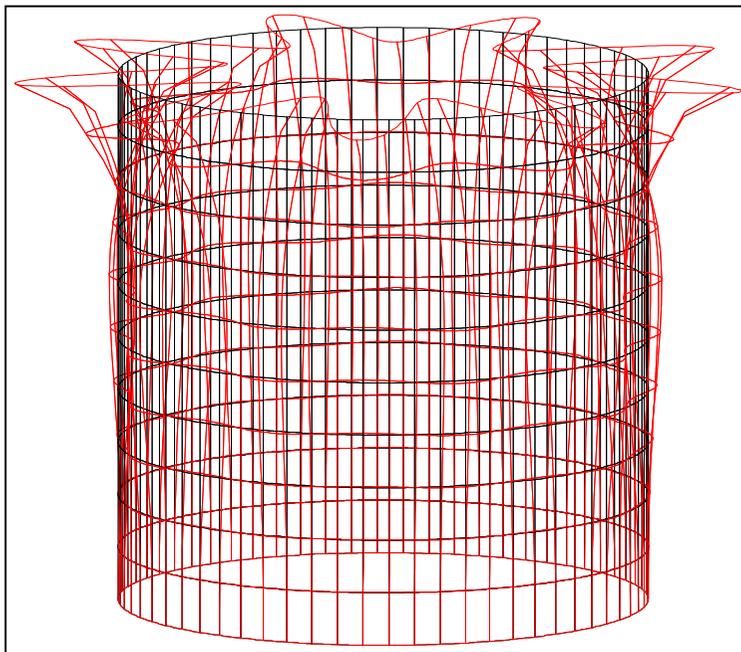
Angesichts der kleinen Änderung von Raster 64 auf Raster 128 ist Konvergenz in Umfangsrichtung bei 64 Elementen erreicht. Die Frage ist jetzt noch, wie sich das Netz in Höhenrichtung auf die Ergebnisse auswirkt.



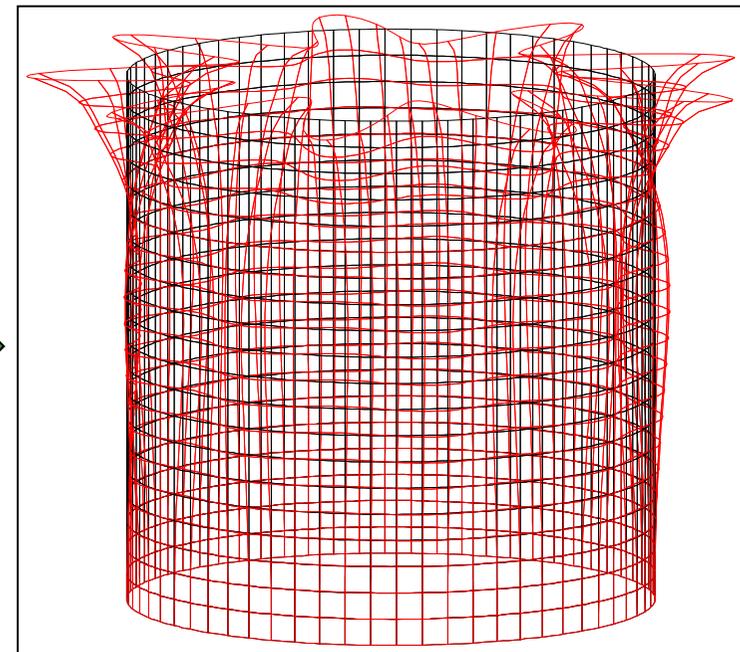
menum

Einfluss der Auflösung in Höhenrichtung

Eine weitere Verfeinerung in Höhenrichtung von 10 auf 20 Höherelemente wirkt sich nur marginal auf das Ergebnis aus, da sich nur Wellen im oberen Zylinderbereich ausbilden und dort praktisch nur eine Halbwelle erkennbar große Amplituden besitzt. Warum die kritische Last nicht fällt, bleibt unklar.



Raster 10x064: $q_{\text{beul}} = 3892 \text{ kN/m}$



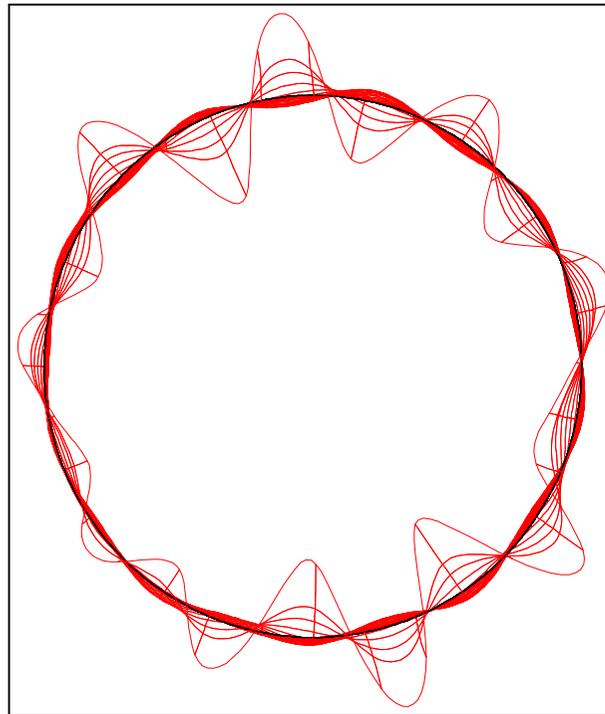
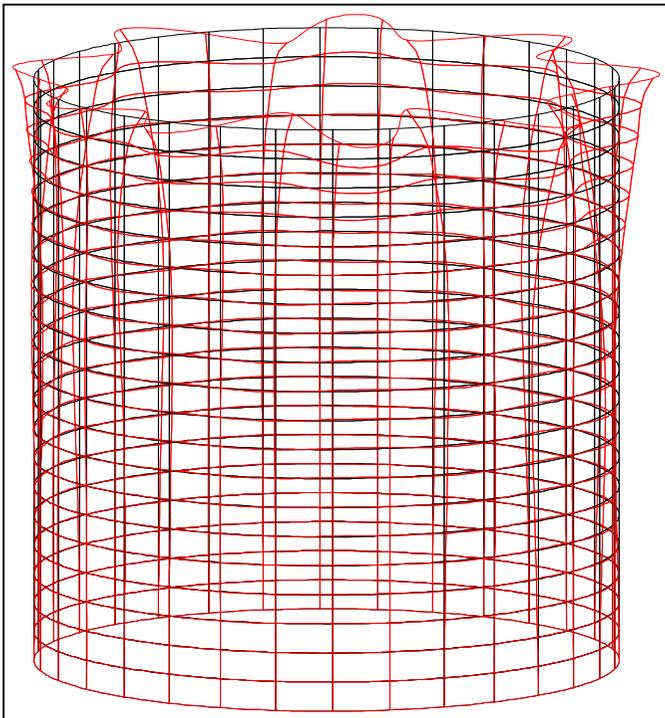
Raster 20x064: $q_{\text{beul}} = 3894 \text{ kN/m}$



menum

Einfluss der Iterationsgenauigkeit

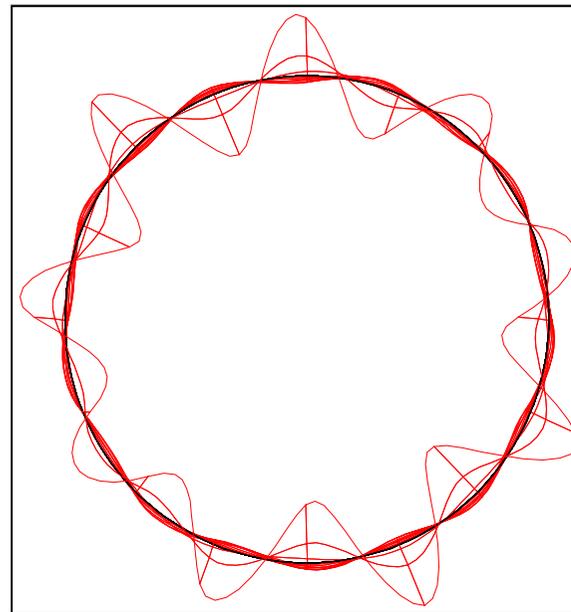
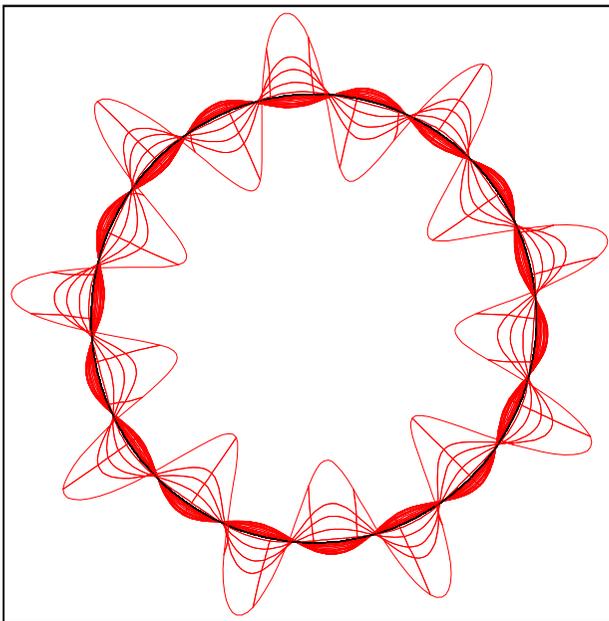
Die Eigenwertlösung wurde iterativ durchgeführt, wobei der Benutzer eine Genauigkeit vorgeben kann. Bislang wurde eine sehr kleine Fehlertoleranz gewählt, was eine hohe Anzahl von Iterationen nach sich zog. Setzt man, um die Iterationszahl zu reduzieren, die Genauigkeit herab, ergeben sich (Beispiel hier: Raster 20x32) plötzlich unsymmetrische Eigenformen. Warum?



menum

Achtung bei gleichen oder fast gleichen Eigenwerten!

Es ergeben sich aufgrund der Symmetrie zwei Eigenformen mit gleicher Wellenzahl und kritischer Last. Die Wellen der Eigenformen sind, um Orthogonalität der Eigenformen herzustellen, gegeneinander verdreht. Da bei gleichem Eigenwert jede Linearkombination der Eigenformen ebenfalls eine Eigenform darstellt, benötigt man viele Iterationen, um die Eigenformen sauber zu trennen.



menum

Ergebnisse

Wir erkennen Konvergenz gegen einen bestimmten Wert. Die Konvergenz erfolgt von oben, d.h. der Diskretisierungsfehler überschätzt die Beullast – das FE-Ergebnis liegt damit auf der unsicheren Seite.

Bei zu geringer Elementzahl können wir die Wellenzahl nicht korrekt abbilden. Damit ist nicht nur die kritische Last falsch, sondern auch das Beulmuster. Bei Netzverfeinerung konvergiert das FE-Beulmuster gegen das wahre Beulmuster.

Die ermittelte Wellenzahl von 9 Vollwellen lässt sich nachträglich auch mit einem Teilzylinder abbilden:

Halbzylinder:

Die 4.5 Vollwellen erzeugen einen Nulldurchgang bei 180° , den man mit einer Antimetriebedingung abbilden kann.

Viertelzylinder:

Die 2.25 Vollwellen erzeugen bei 90° ein Maximum, zu dem das nächste Viertel symmetrisch verläuft.

Bei einer Wellenzahl von beispielsweise 7 ergibt sich keinerlei Regelmäßigkeit, so dass das Ansetzen von Symmetrie bzw. Antimetriebedingungen nicht empfehlenswert ist.

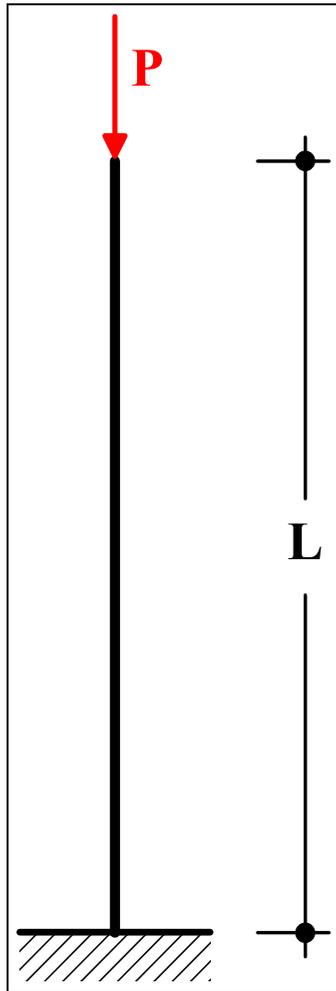


Langer stabartiger Kreiszyylinder

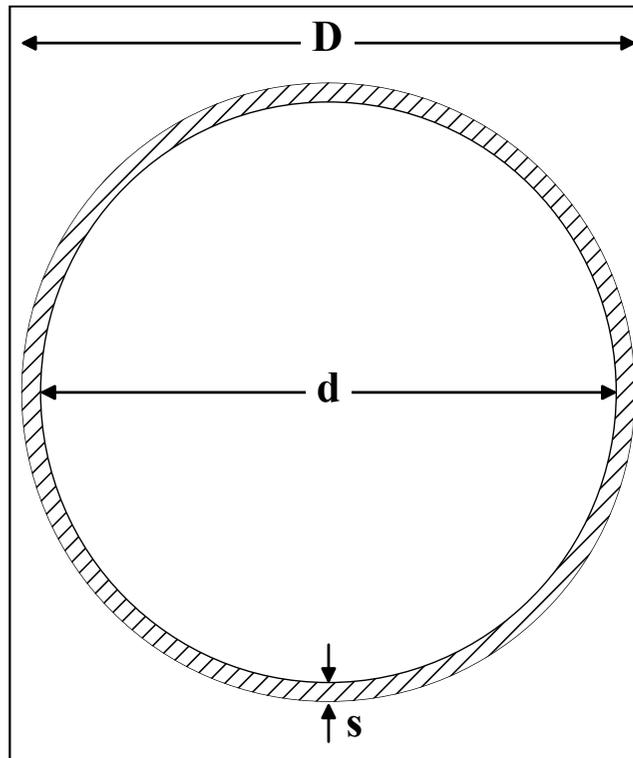


menum

Problemstellung



Im folgenden Beispiel soll untersucht werden, in wie weit ein stabartiges Verhalten durch eine Abbildung mit Schalenelementen gelingt. Wegen der Eindeutigkeit der Randbedingungen wird ein eingespannter Stab untersucht. Als Querschnitt wird ein Standardrohrquerschnitt verwendet.



Querschnittsgeometrie:

$$D = 101.6 \text{ mm}$$
$$s = 3.6 \text{ mm}$$



Querschnittswerte:

$$A = 11.08 \text{ cm}^2$$
$$\kappa_S = 0.5 \text{ (Schubflächenfaktor)}$$
$$I = 133.24 \text{ cm}^4$$

Material Stahl:

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2, \nu = 0$$



Stabtheorie

Für den eingespannten Stab ergibt sich die Knicklänge zu $2L$, so dass für die Eulersche Knicklast P_{ki} gilt:

$$P_{\text{krit,euler}} = \frac{EI \cdot \pi^2}{s_k^2} = \frac{EI \cdot \pi^2}{4L^2}$$

Die Eulerlösung basiert auf der Stabtheorie nach Bernoulli, die Schubverzerrungen explizit vernachlässigt. Da ein Schalenmodell grundsätzlich immer Schubverformungen beinhaltet, kann ein Vergleich Balken-Schale nur gegen die Lösung einer Schubverzerrungstheorie erfolgen. Da diese nicht vorliegt, wird sie numerisch mit einem schubweichen Balken erzeugt. Bei einer Diskretisierung mit 16 Elementen ergibt sich für den Bernoulli-Balken exakt die Euler-Lösung, so dass man die numerischen Lösungen als exakt ansehen kann. Im Nachfolgenden sind die beiden Balkenlösungen P_{ki} und P_{ks} für unterschiedliche Systemlängen gegenübergestellt.

	Systemlänge L [cm]								
	40	60	80	100	120	150	200	250	300
P_{ki} [kN]	4314.85	1917.71	1078.71	690.38	479.43	306.83	172.59	110.46	76.71
P_{ks} [kN]	4013.20	1856.20	1059.00	682.27	475.50	305.22	170.28	110.25	76.61
P_{ks}/P_{ki}	0.93	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00



Diskretisierungsdichte des Schalenmodells

Als Schalenelement wird der Elementtyp Ase4 (U. Montag: „Konzepte zur Effizienzsteigerung numerischer Simulationsalgorithmen für elasto-plastische Deformationprozesse“, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1997) verwendet, der innerhalb des Elements eine konstante Krümmung bzw. Verwindung gestattet. Für die Systemlänge $L = 150 \text{ cm}$ ($L/D = 15.3$, stabartige Geometrie) wird eine Konvergenzstudie durchgeführt für unterschiedliche Netzeinteilungen in Umfangsrichtung (N_φ) und Mantelrichtung (N_z). Die Last wird als Linienlast $q = 9.661 \text{ kN/m}$ am oberen Rand aufgebracht. Der Wert von q ergibt durch Division der Eulerlast P_{ki} durch den Zylinderumfang U .

kritischer Lastfaktor λ_{beul}				
N_φ	N_z			
	32	64	128	256
16	1.0066	0.9778	0.9708	0.9690
32	1.0244	0.9958	0.9886	0.9868
64	1.0290	1.0003	0.9931	0.9913

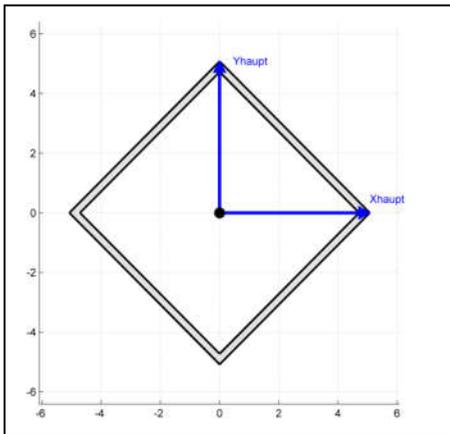
Wie zu erwarten, fällt die kritische Last mit steigender Netzdichte in Mantelrichtung ab, da die FE-Methode das Problem grundsätzlich zu steif annähert. Dem widerspricht scheinbar das Verhalten bei feinerer Umfangsvernetzung, denn hier steigt der kritische Beulfaktor an. Warum?



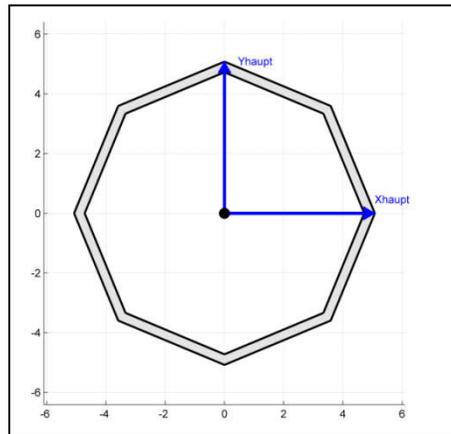
Diskretisierung in Umfangsrichtung: Abbildung der Querschnittssteifigkeit

Durch die Diskretisierung wird der Kreisringquerschnitt durch ein Polygon abgebildet. Dieses Polygon liegt vollkommen innerhalb des Kreises. Errechnet man für die entstehenden Polygone die Querschnittswerte, so nähern sich diese von unten an die exakten Werte an. Eine grobe Netzeinteilung in Umfangsrichtung unterschätzt damit Querschnittssteifigkeit, so dass eine Netzverfeinerung zu einer größeren Querschnittssteifigkeit und damit zu einem höheren Beulfaktor führt. Daraus erklärt sich das zunächst überraschende Konvergenzverhalten

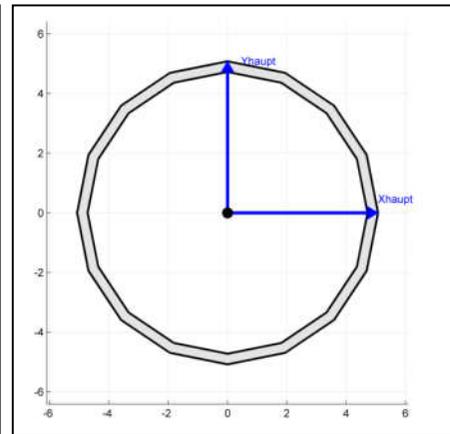
$$N_{\varphi} = 4$$



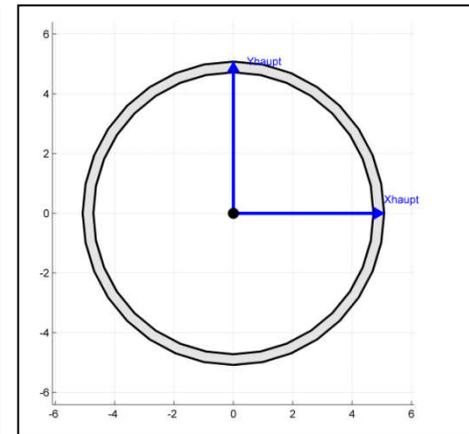
$$N_{\varphi} = 8$$



$$N_{\varphi} = 16$$



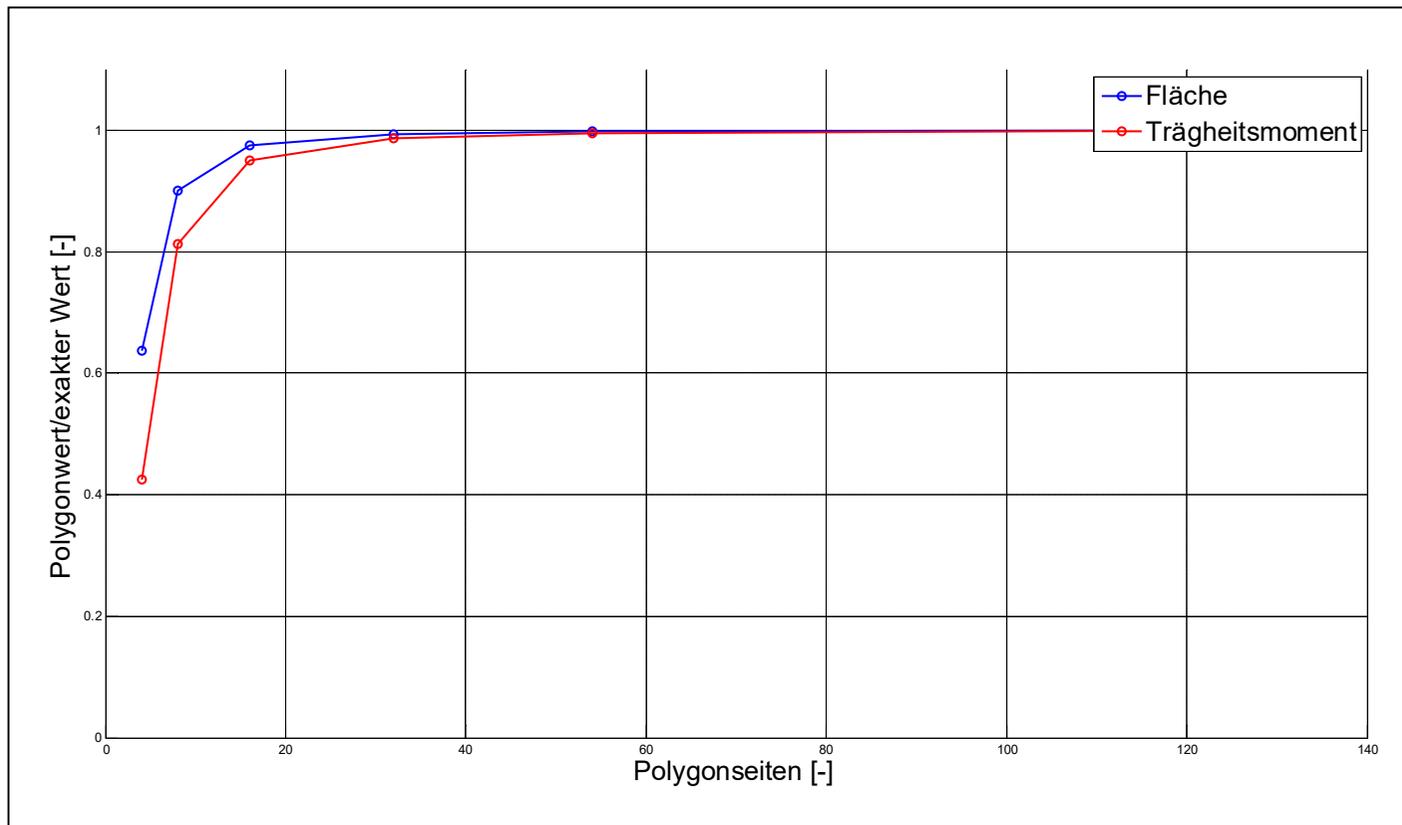
$$N_{\varphi} = 32$$



menum

Konvergenz der Querschnittswerte

Man erkennt deutlich die asymptotische Annäherung der Polygonquerschnittswerte an die Kreisringquerschnittswerte.



Stabilitätsuntersuchung der Schalenmodells

Aus der Konvergenz der Querschnittswerte der vorherigen Folie und den Beuluntersuchungen für $L = 150$ cm ergab sich eine ausreichende Netzdichte von 64×256 Elementen. Für diese Netzdichte wurden die Beullasten für unterschiedliche Systemlängen berechnet.

Neben den unvermeidbaren Schubverformungen, die zu einer Querschnittsverwölbung führen, kann ein Schalenquerschnitt zusätzlich ovalisieren. Eine Ovalisierung ist in der Balkentheorie grundsätzlich ausgeschlossen.

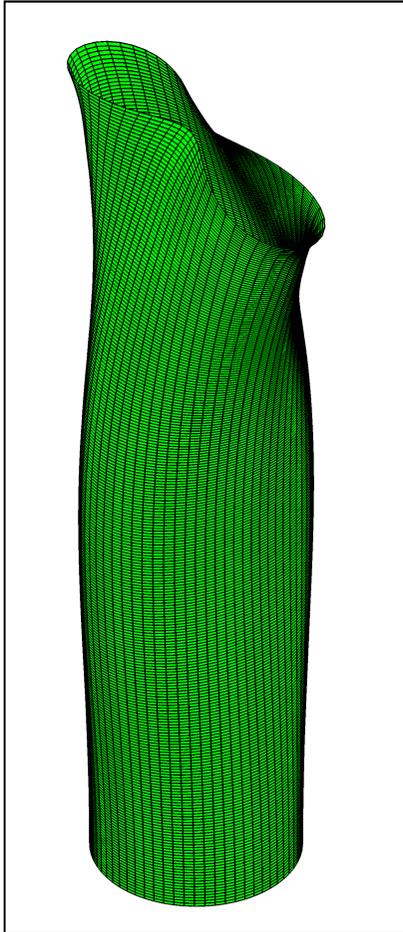
Bei $L=40$ cm, welches mit $L/D \approx 4$ den allgemein akzeptierten Grenzwert für die Gültigkeit der Balkentheorie darstellt, weicht die kritische Last der Schale deutlich von der Balkenlösung ab. Die Beulform zeugt ein Ovalisierungsversagen, so dass hier die Balkenlösung falsch ist. Ab einer gewissen Länge, die hier nicht genau bestimmt wurde, ergibt sich balkenartiges Verhalten, dessen Beullasten sehr gut mit der schubweichen Balkenlösung korrespondieren.

	Systemlänge L [cm]								
	40	60	80	100	120	150	200	250	300
P_{kf} [kN]	3061.24	1822.83	1048.81	677.85	473.20	304.15	171.70	110.12	76.59
P_{ks} [kN]	4013.20	1856.20	1059.00	682.27	475.50	305.22	170.28	110.25	76.61
P_{kf}/P_{ks}	0.76	0.98	0.98	0.99	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00

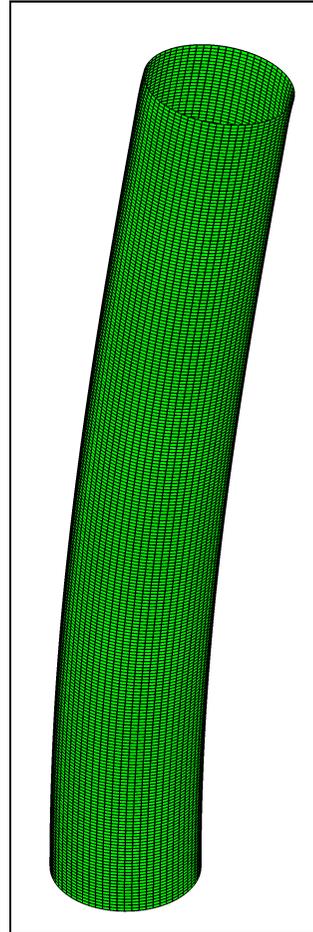


Beulformen

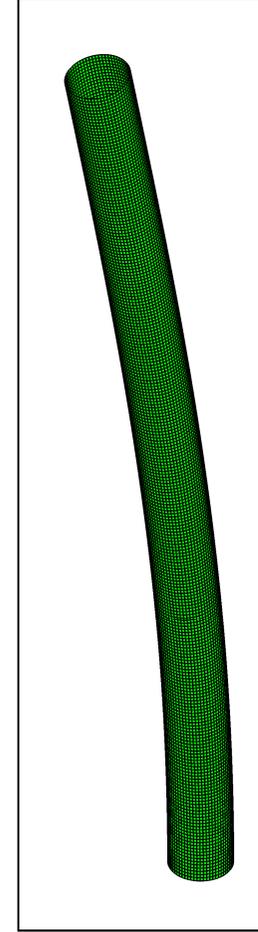
L = 40 cm



L = 60 cm



L = 150 cm



menum

Fazit

Mit einem Schalenmodell lassen sich grundsätzlich sämtliche Beulformen erfassen: Schalenbeulen, Stabknicken und Übergangsformen.

Der vorliegende Fall stellte als Kreiszyylinder ein echtes Schalenproblem dar. Die hier erzielten Ergebnisse gelten unmittelbar nur für den verwendeten Elementtyp, der durch eine konstante Elementkrümmung eine näherungsweise Erfassung der Tragwerkskrümmung erlaubt. Bei Verwendung von facettenartigen Elementtypen müssten entsprechende Konvergenzuntersuchungen erneut angestellt werden.

Interessanterweise gestaltet sich die Abbildung eines Faltwerks, welches aus ungekrümmten Teilflächen besteht, schwieriger als die Modellierung einer echten Schale. Die Gründe hierfür werden im nächsten Beispiel erläutert: der Beuluntersuchung eines I-Profiles.



menum

Faltwerke



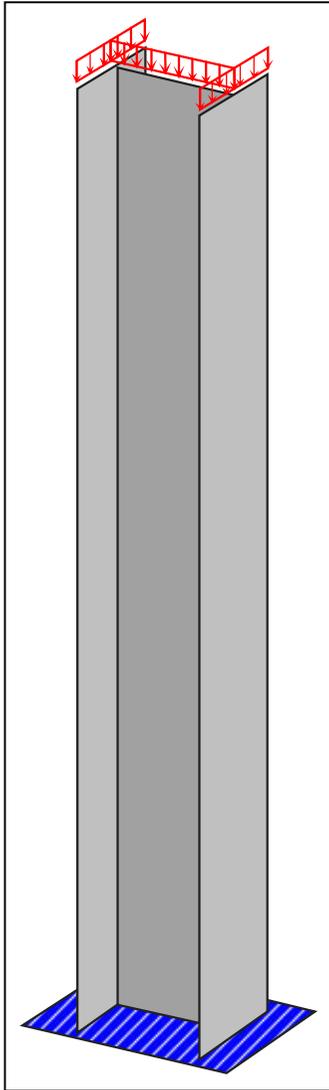
menum

Kragstütze mit I-Profil



menum

Folded Structures: I-Beam



The buckling of an I-beam under constant axial stress shall be analyzed. In order to study the possible mechanisms of instability, the beam is to be discretized as a three-dimensional structure using uncurved shell elements.

Each four-node shell element possesses 6 degrees of freedom at each of its nodes: $U_x, U_y, U_z, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$.



menum

TraLaLa

**Schon berechnet
aber noch nicht
eingearbeitet**



menum

Raumfachwerke



menum

Maybe later????



menu