

Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

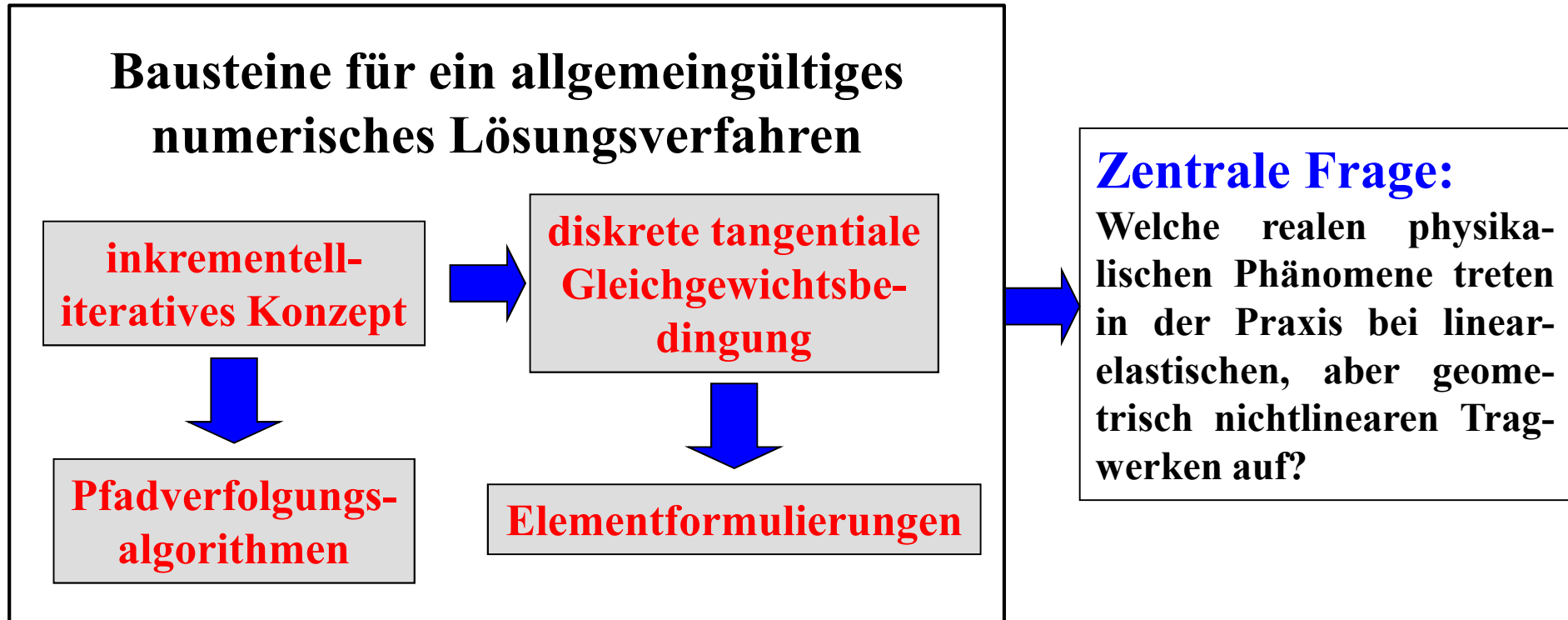
Vorlesung 5

Nichtlineare elastische Phänomene



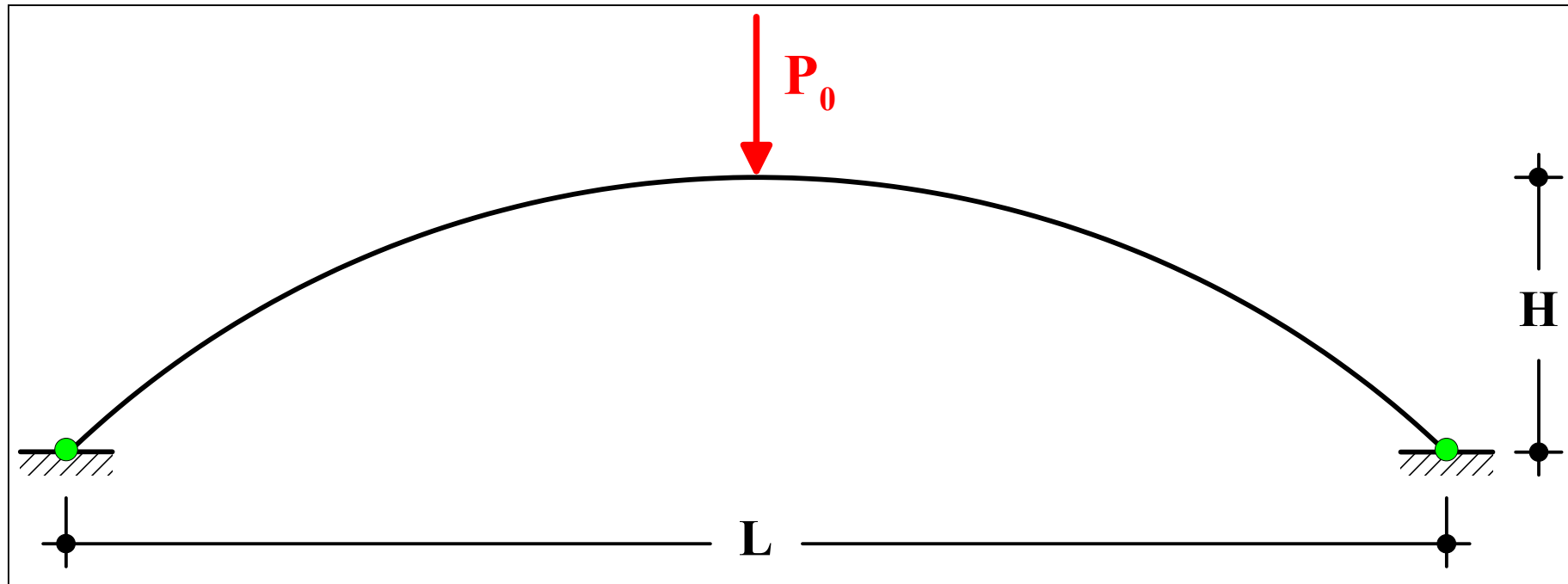
menum

Historische Perspektive: Vorlesungen 1 - 4



menum

Beispiel: Kreisbogen



Steifigkeitsdaten:

$E = 6897 \text{ kN/cm}^2$
 $A = 6.45 \text{ cm}^2$
 $I = 41.62 \text{ cm}^4$
 $\mu = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ kN/cm}^3$

Geometriedaten:

$L = 254.0 \text{ cm}$
 $H = \text{variabel}$

Lastdaten:

$P_0 = 8.90 \text{ kN}$



menum

Untersuchte Geometrien

Der Radius wurde in einer Parameterstudie variiert.



$R = 2032 \text{ cm}$



$R = 631 \text{ cm}$



$R = 381 \text{ cm}$

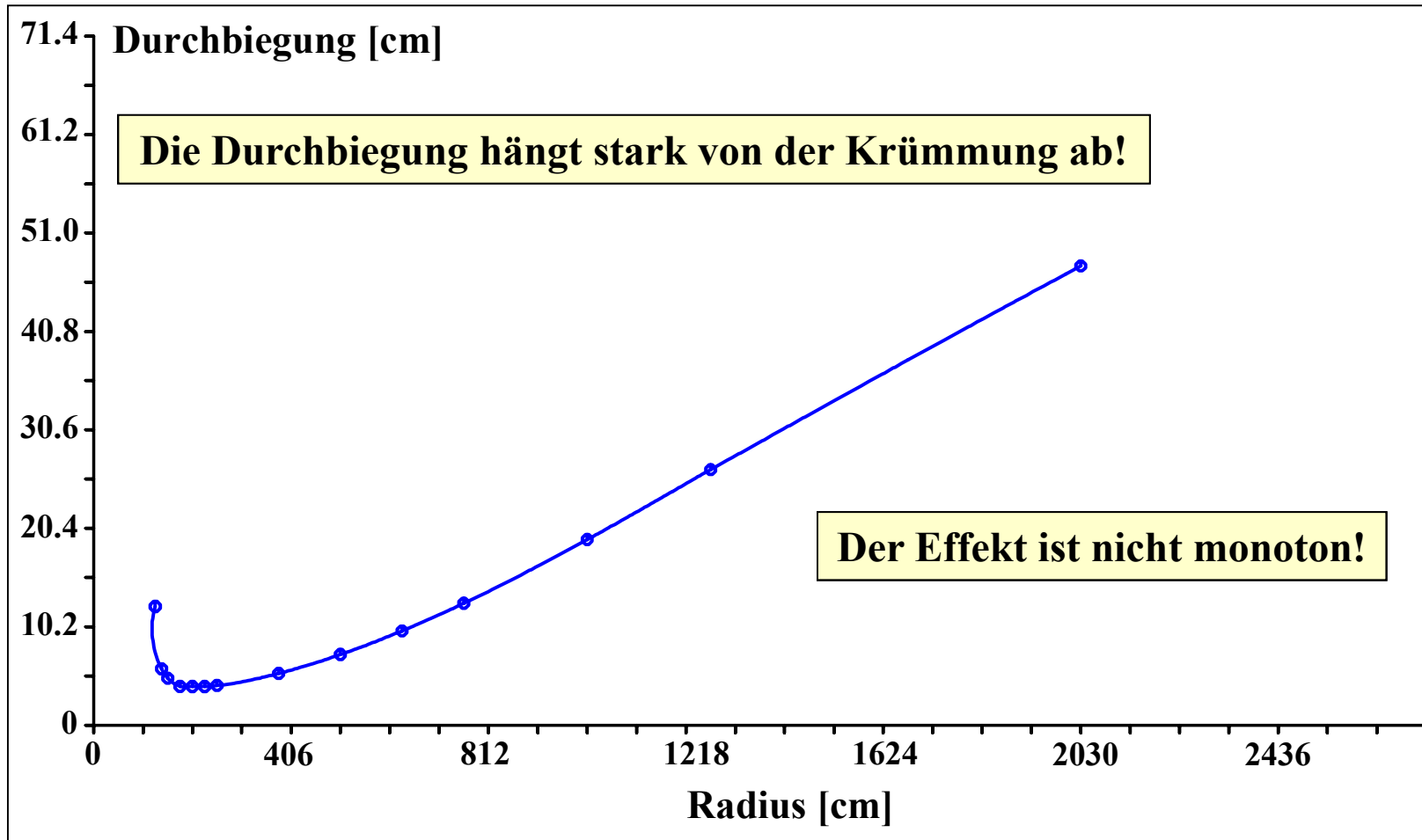


$R = 254 \text{ cm}$



menum

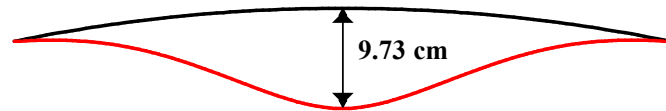
Lineare Berechnung: Abhängigkeit Verformung/Radius



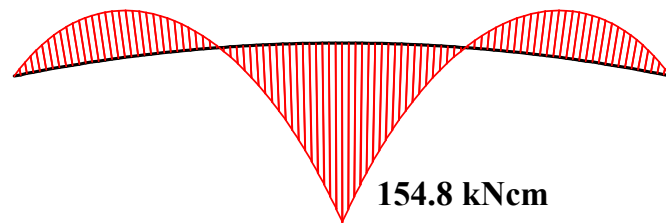
menum

Lineare Berechnung: Globales Tragverhalten

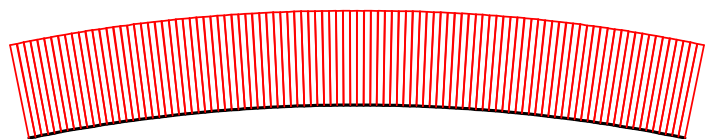
$R = 631 \text{ cm}$



Verformung



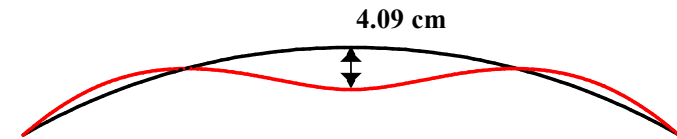
Biegemoment



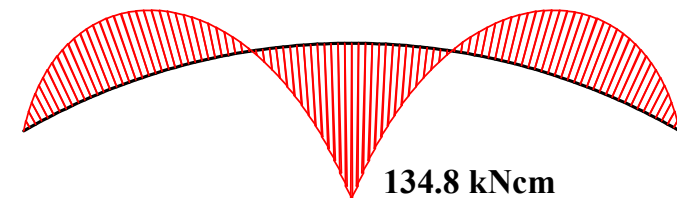
Normalkraft

-32.23 kN

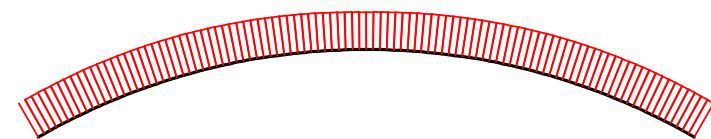
$R = 254 \text{ cm}$



Verformung



Biegemoment



Normalkraft

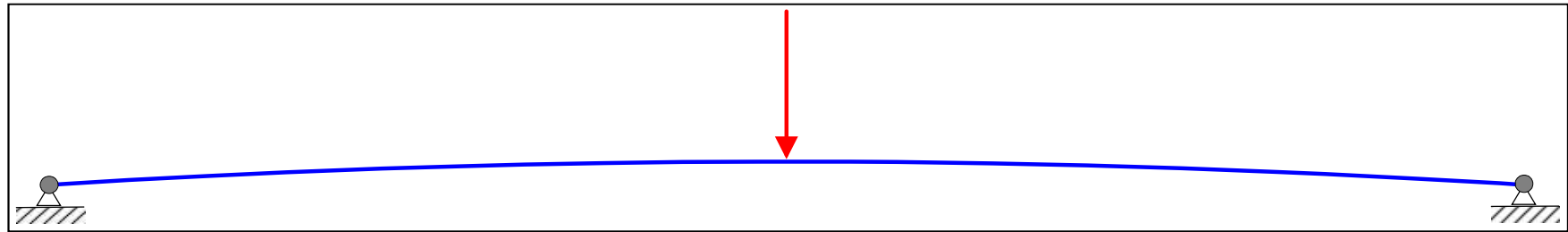
-13.88 kN



menum

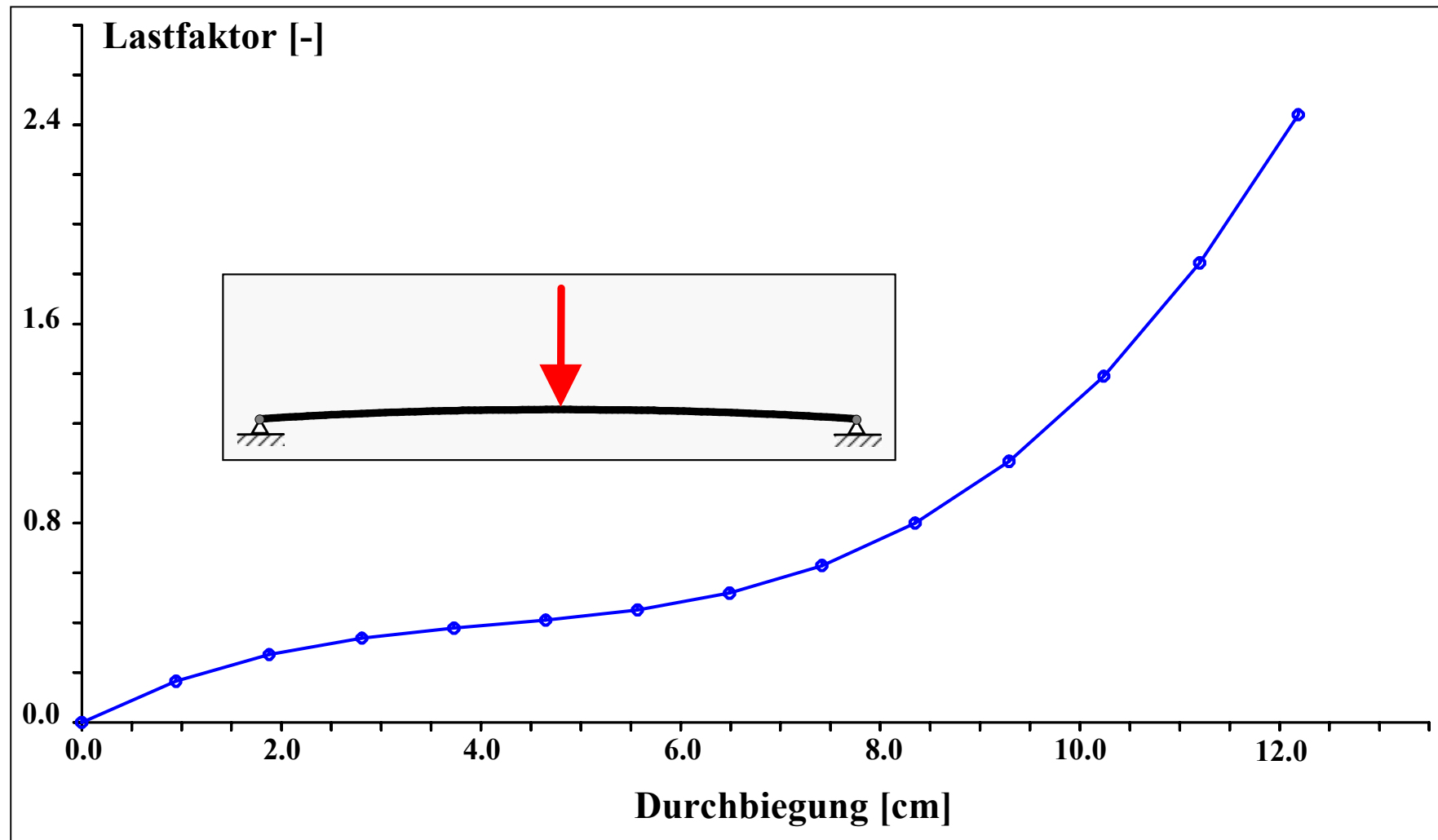
Geometrie 1: $R = 2032 \text{ cm}$

$$H = 3.97 \text{ cm}$$



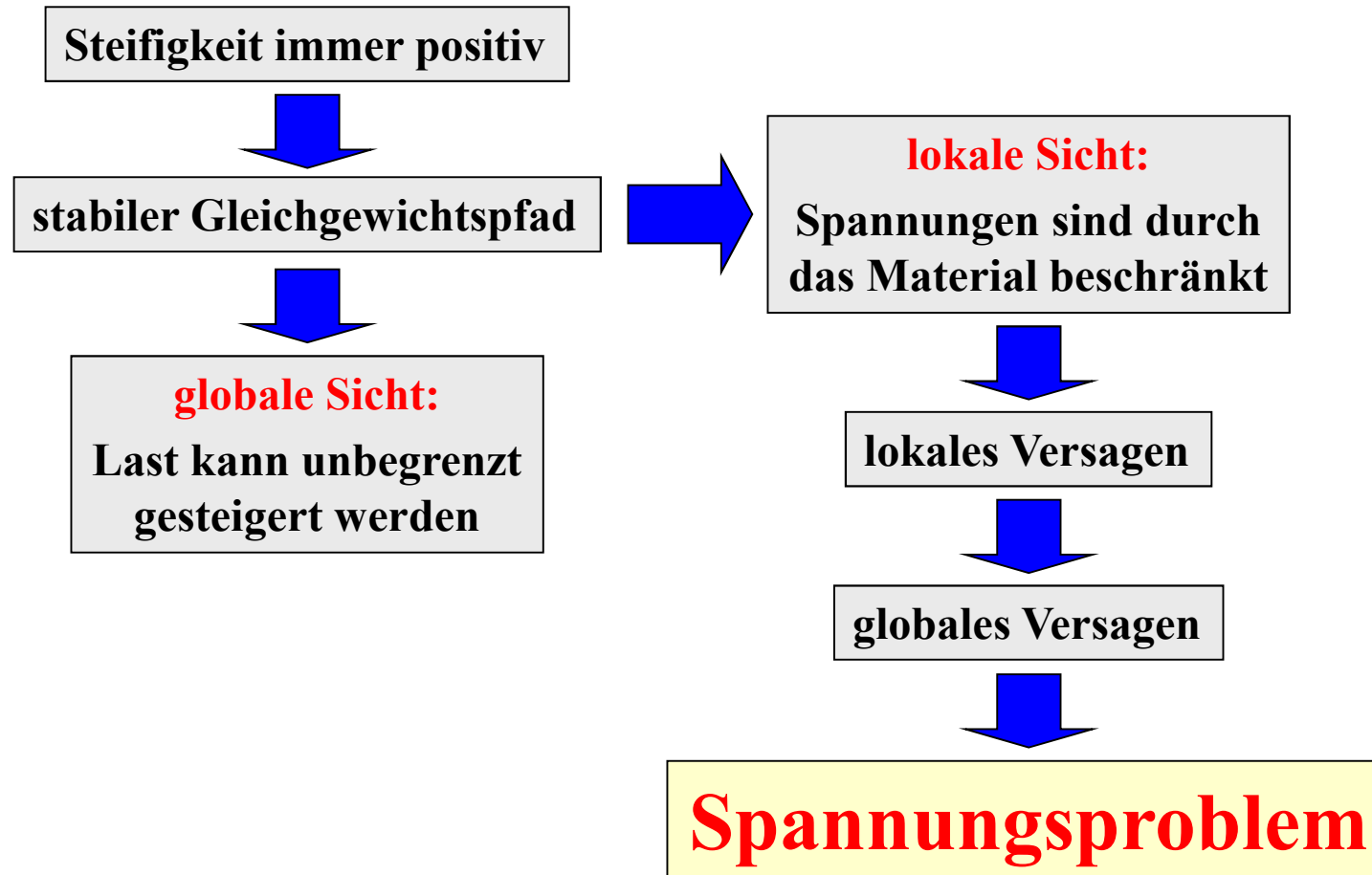
menum

Last-Verformungsdiagramm für $R = 2032 \text{ cm}$

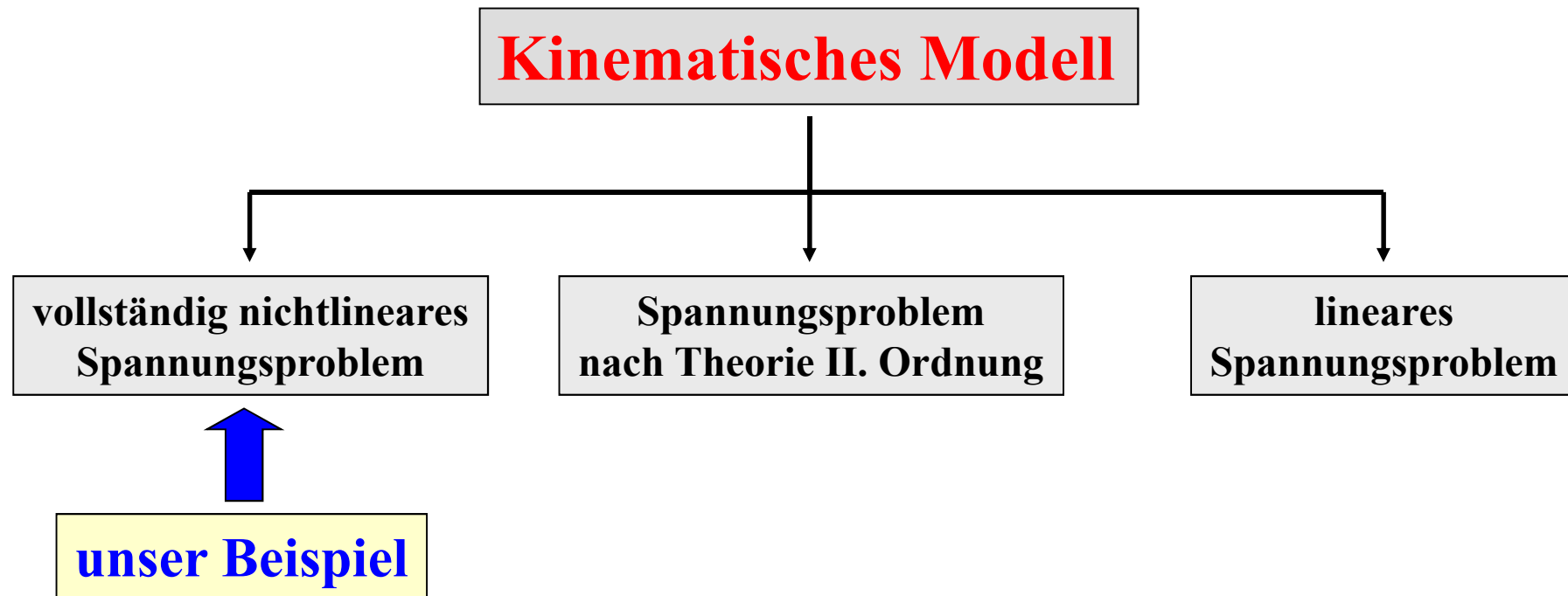


menum

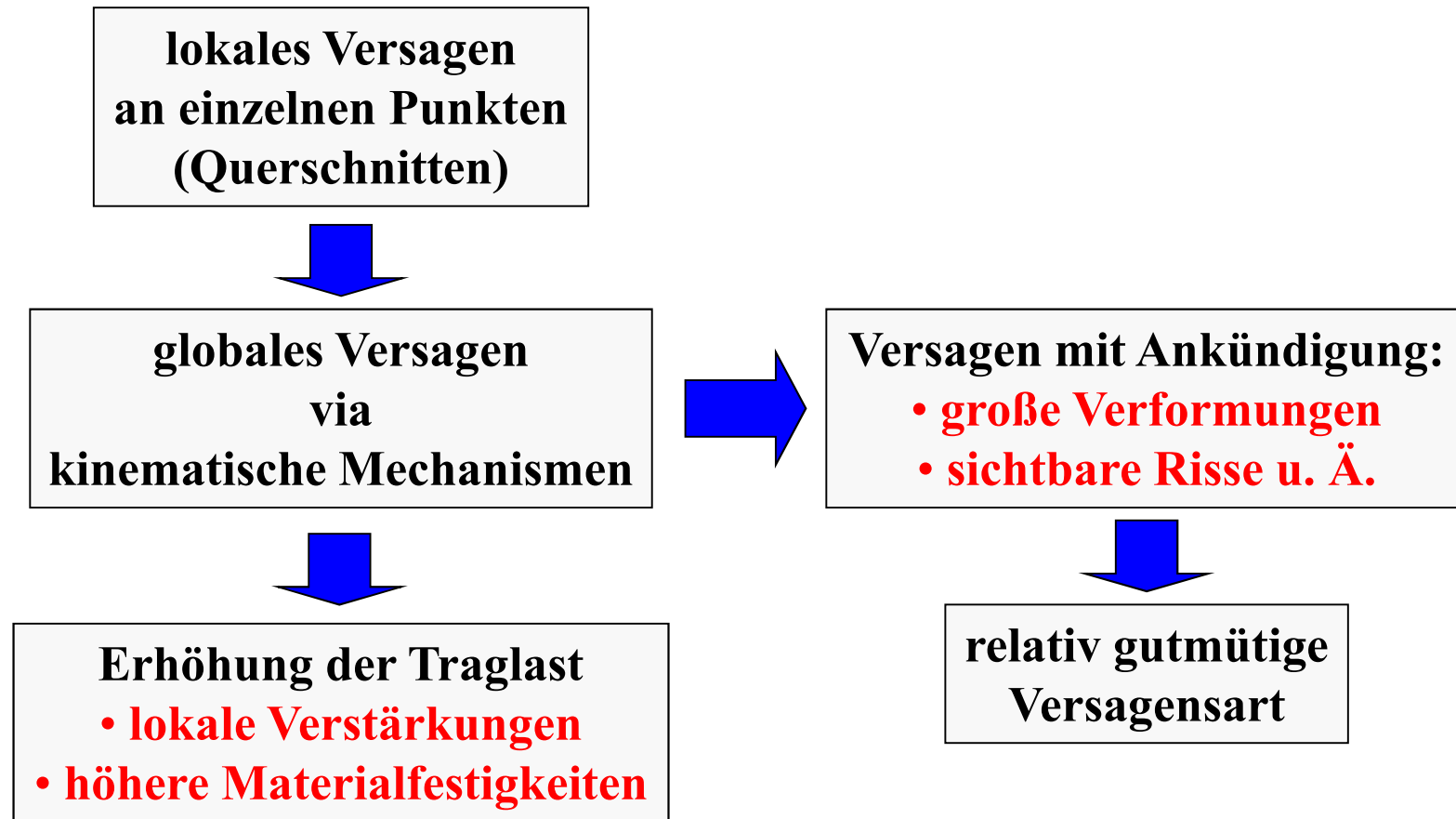
Spannungsproblem



Klassifikation von Spannungsproblemen



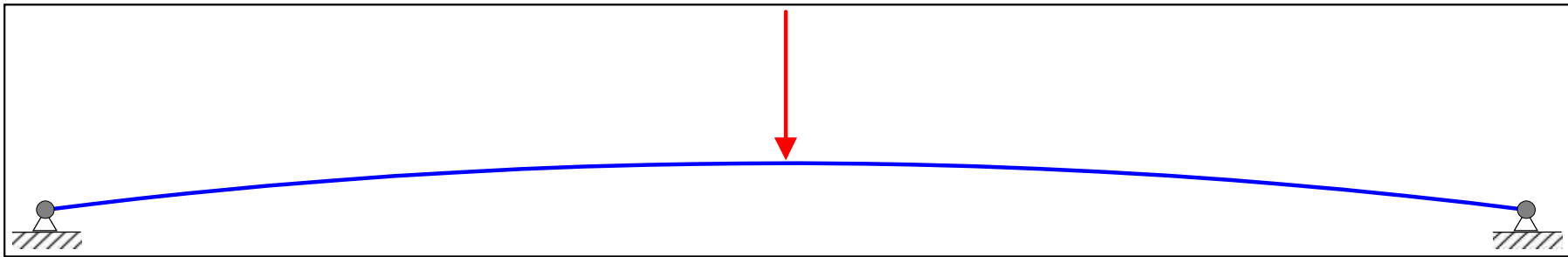
Eigenschaften von Spannungsproblemen



menum

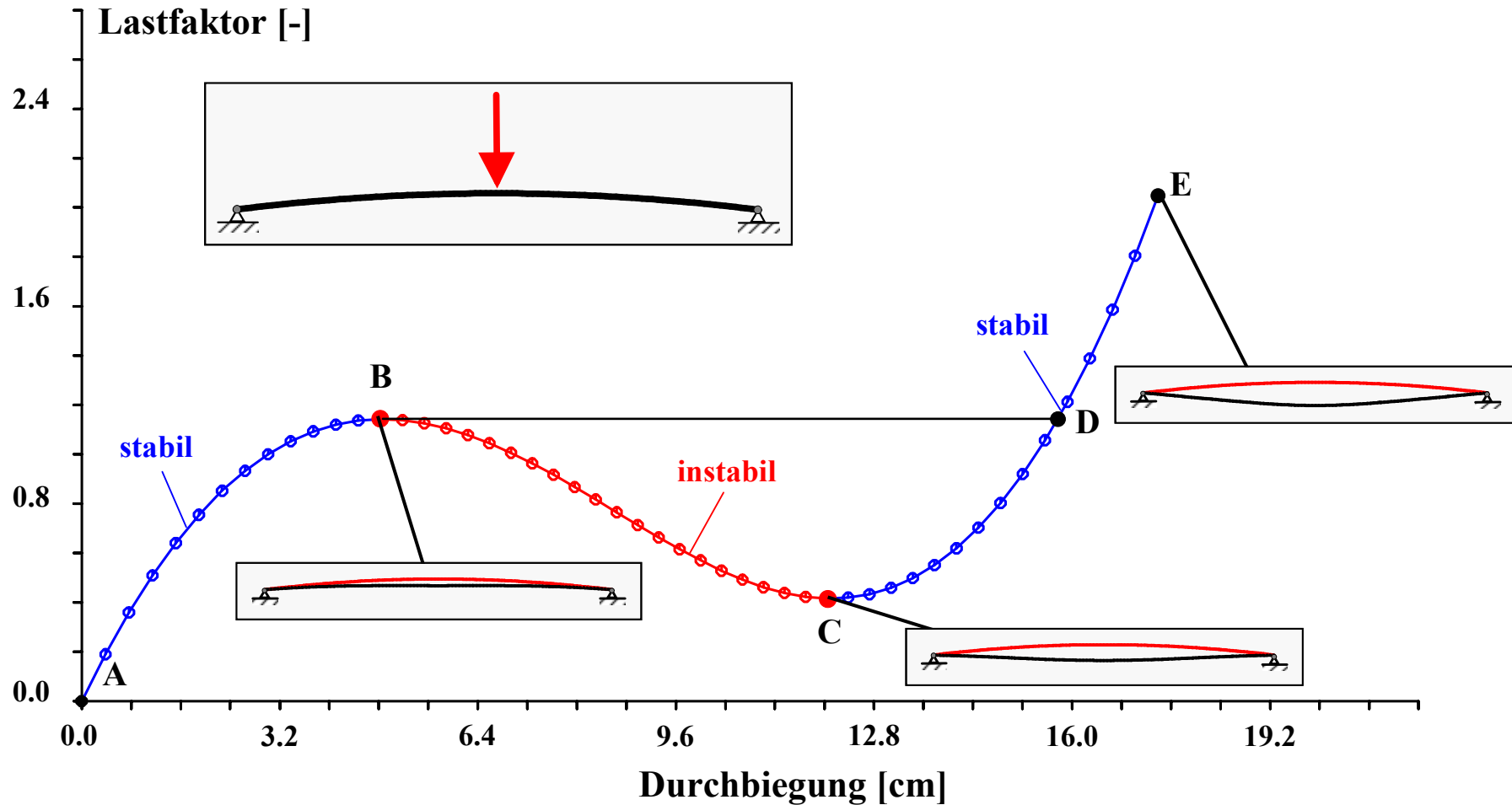
Geometrie 2: $R = 1016 \text{ cm}$

$$H = 7.97 \text{ cm}$$



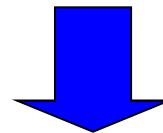
menum

Last-Verformungsdiagramm für $R = 1016 \text{ cm}$



LDL^T-Faktorisierung der symmetrischen Matrix

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} & \dots & K_{N1} \\ K_{21} & K_{22} & K_{32} & \dots & K_{N2} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{N3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{N1} & L_{N2} & L_{N3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} & \dots & L_{N1} \\ 0 & 1 & L_{32} & \dots & L_{N2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & L_{N3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

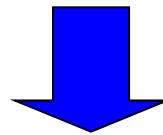


menum

Instabilitätsgrad

Definition:

i = Anzahl der negativen Diagonalelemente D_{kk}



Interpretation von i :

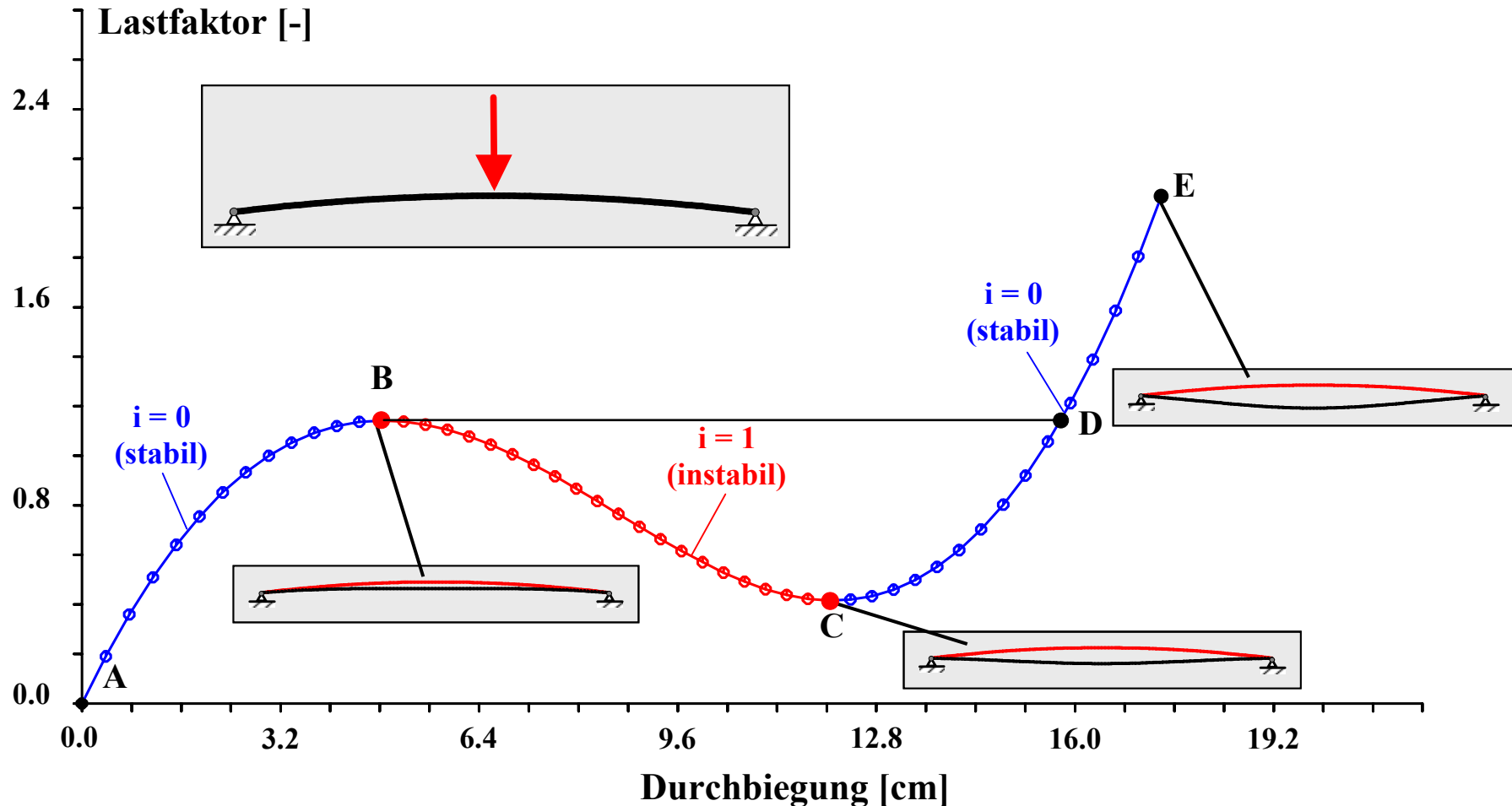
$i = 0$: Punkt stabilen Gleichgewichts

$i > 0$: Punkt instabilen Gleichgewichts



menum

Last-Verformungsdiagramm für $R = 1016 \text{ cm}$ mit Instabilitätsgrad

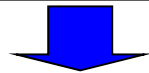


menum

Treten in der Wirklichkeit instabile Gleichgewichtszustände auf?

Wahrheit = Ergebnis eines Experiments

kraftgesteuertes
Experiment



Natur:

Die Last „ist da“ und kann nicht nach Erreichen des Maximums kleiner werden.

weggesteuertes
Experiment



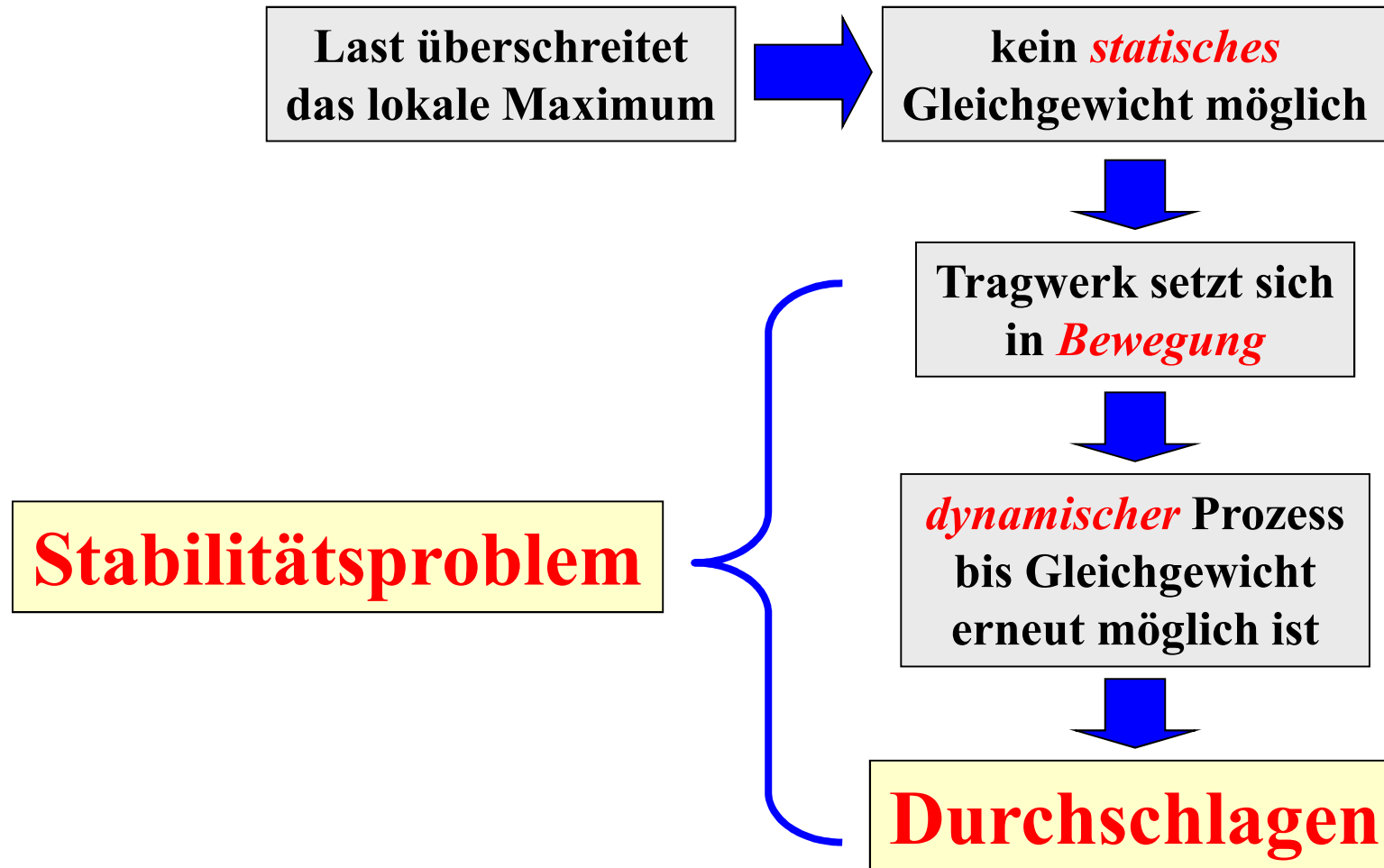
Labor:

Die Kraft wird als sekundäre Größe gemessen und kann abfallen.

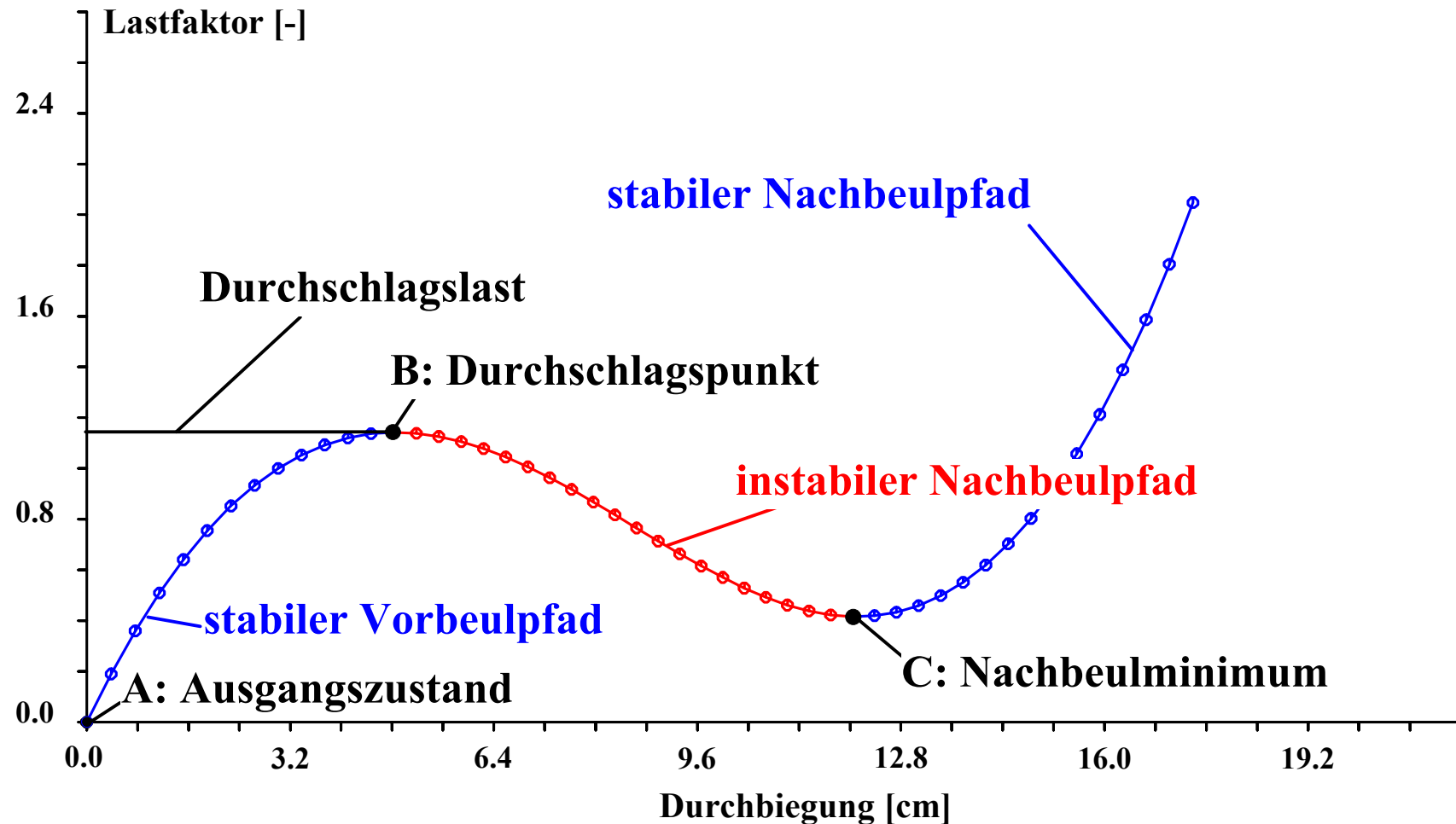


menum

Szenario für eine kraftgesteuerte Situation

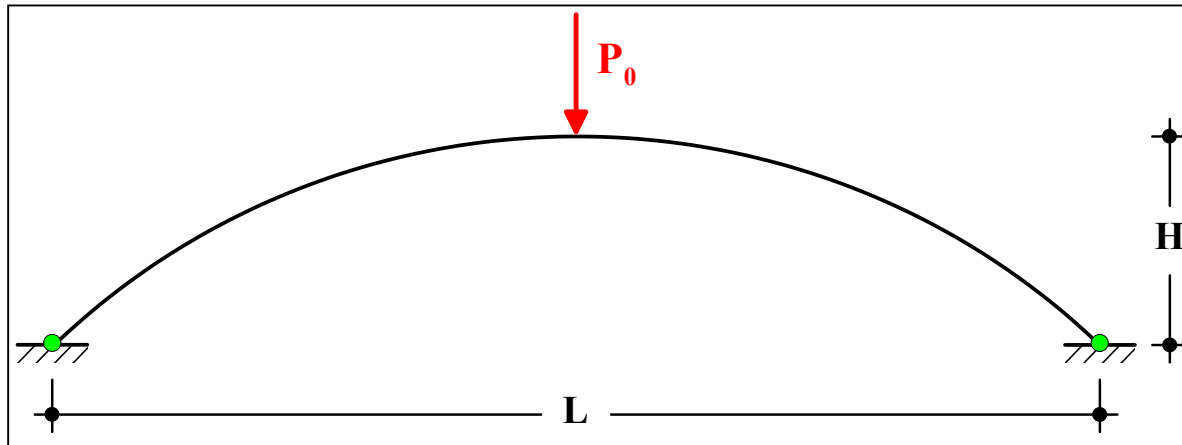


Last-Verformungsdiagramm für ein Durchschlagsproblem



menum

Simulation des Durchschlagsprozesses: Quasi-statische dynamische Berechnung



zeitabhängige Last:

$$P = P(t) = f(t) P_0$$

Dynamische Berechnung:

Abbildung der wahren Bewegung unter Berücksichtigung von Trägheits- und Dämpfungseffekten.

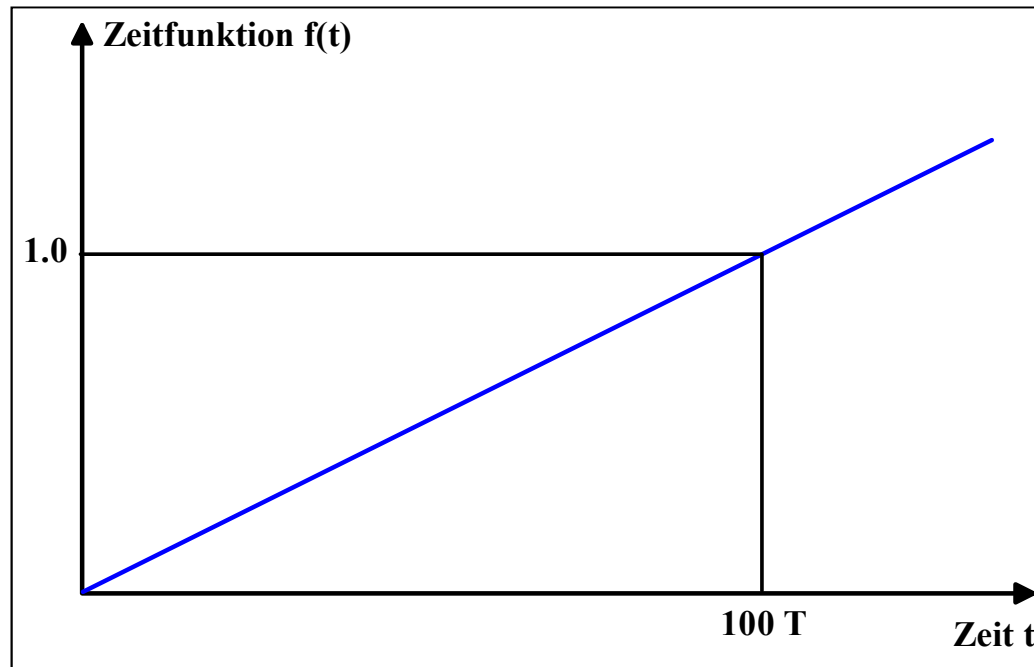
Quasi-statischer Prozess:

Die Last wird so langsam aufgebracht, dass keine merkbaren Schwingungen auftreten.



menum

Parameter der quasi-statischen Berechnung



berechnete Periode des Bogens: $T = 0.0177 \text{ s}$ ($f = 56.5 \text{ Hz}$)

Dämpfungsmodell: Rayleigh-Dämpfung mit hohem ξ

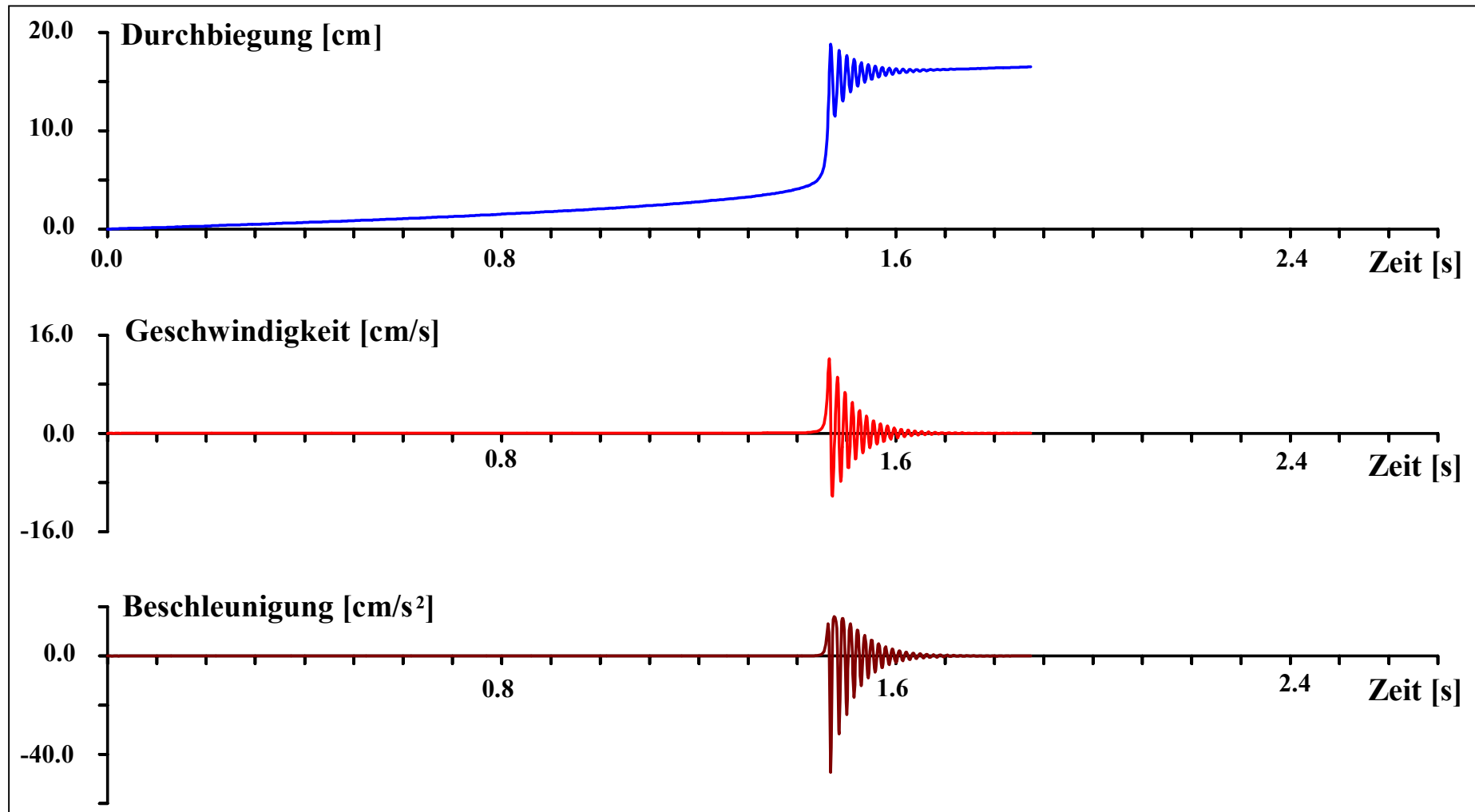
$$\xi_1 = 5 \%$$

$$\xi_2 = 10 \%$$



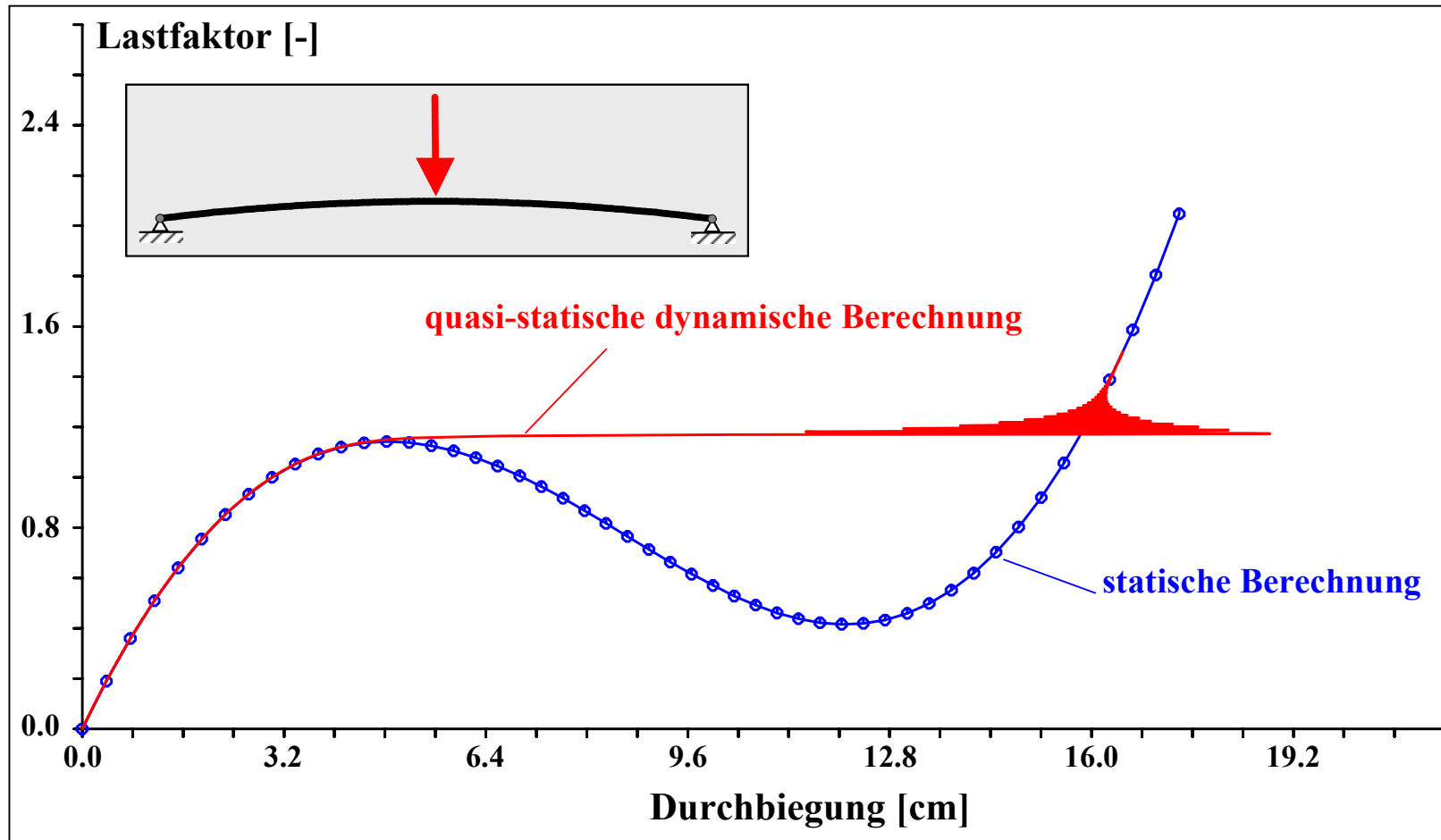
menum

Ergebnisse der quasi-statischen Berechnung



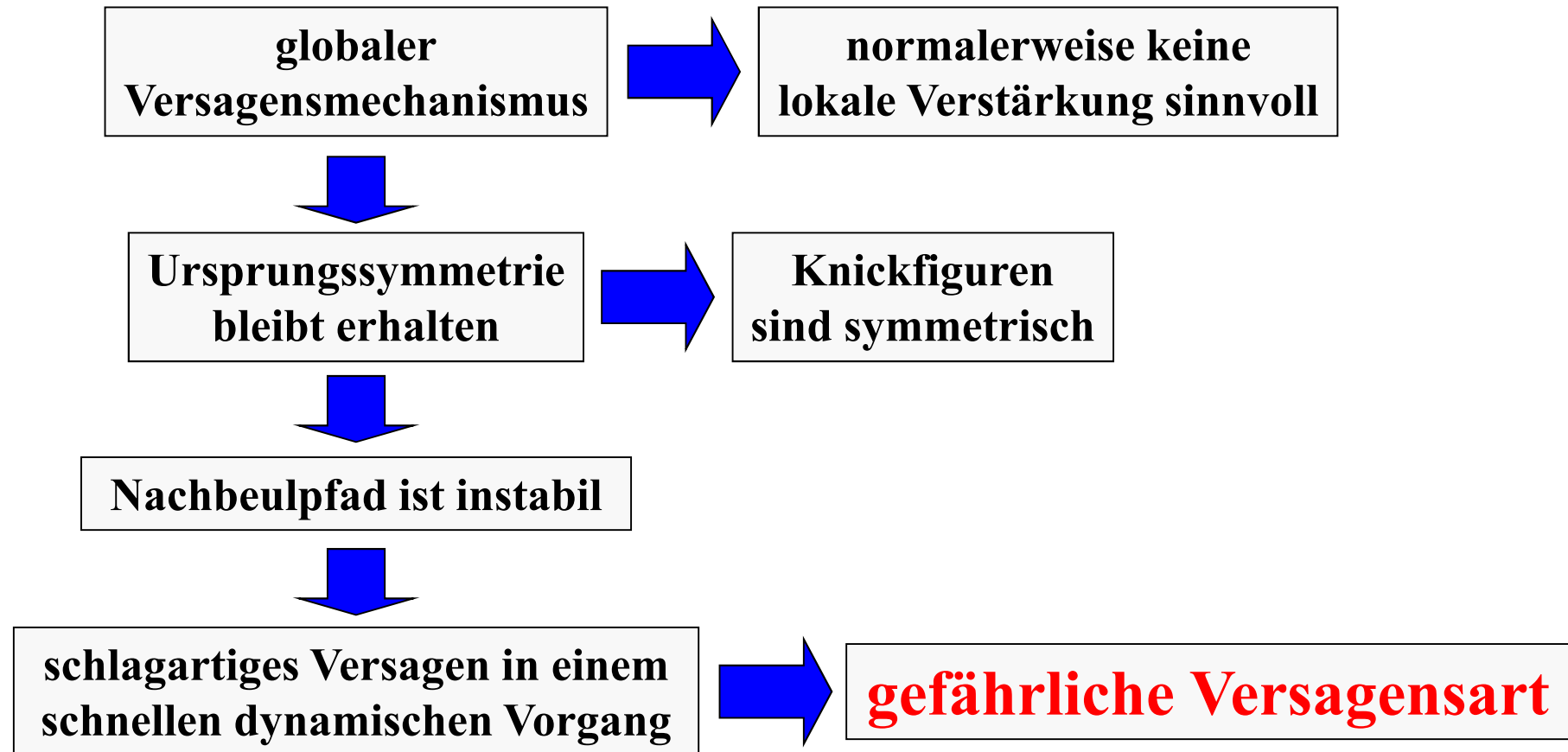
menum

Vergleich: Statische und quasi-statische Berechnung

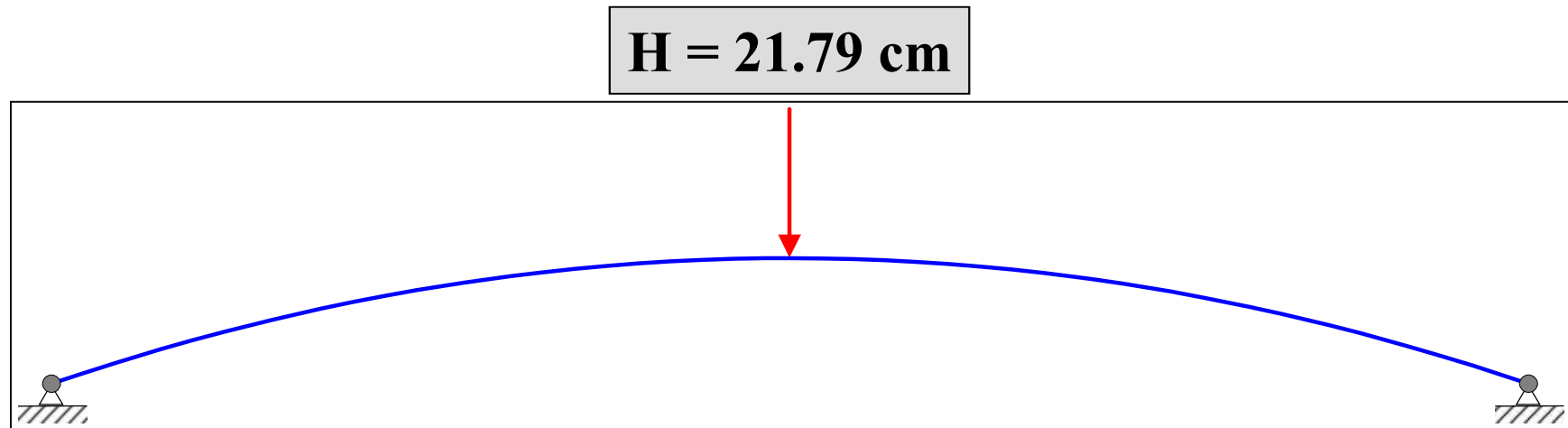


menum

Eigenschaften des Durchschlagproblems

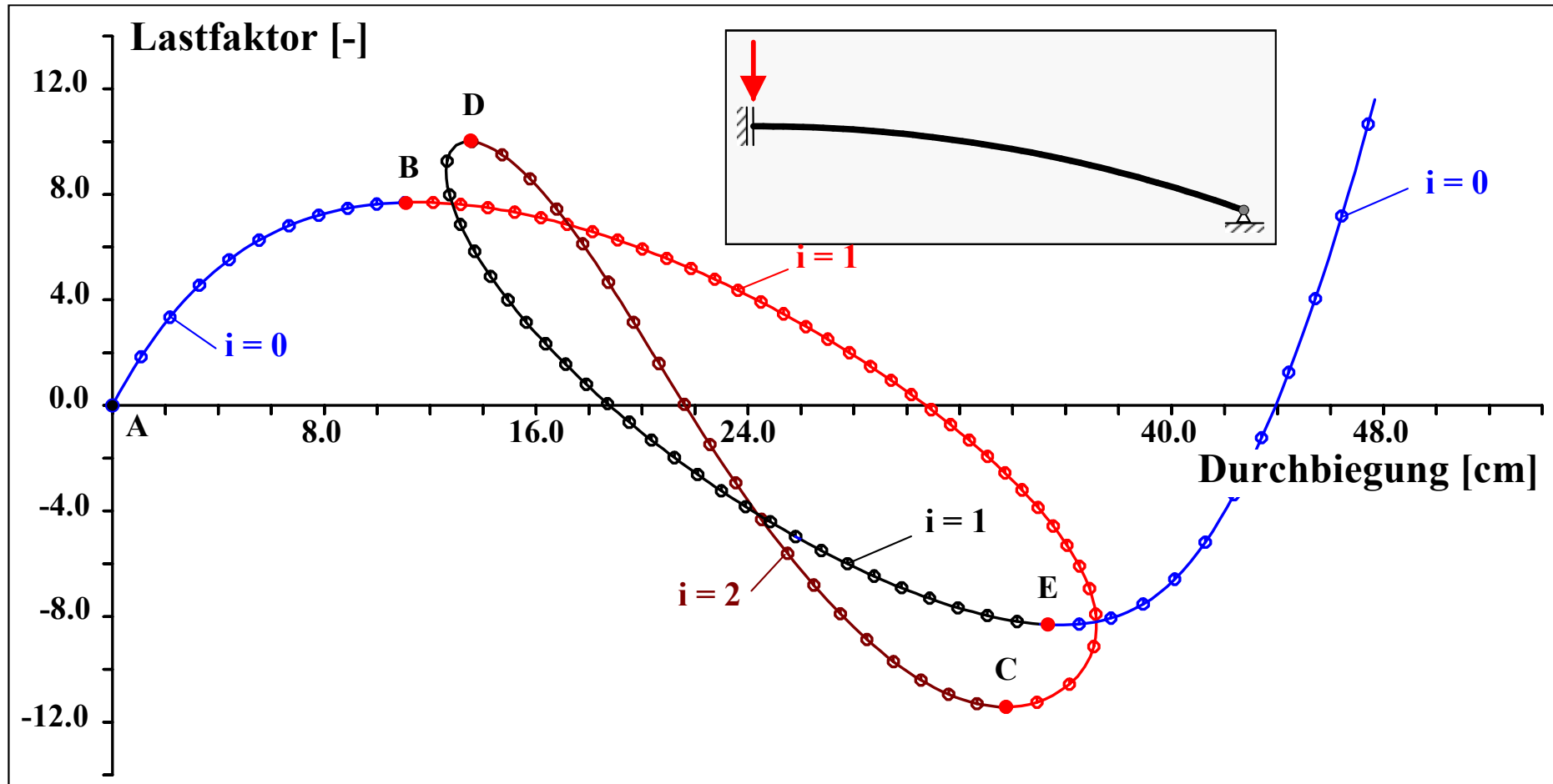


Geometry 3: $R = 381 \text{ cm}$



menum

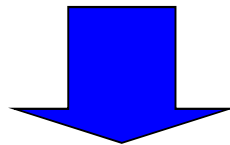
Last-Verformungsdiagramm für $R = 381$ cm: Antwort unter erzwungener Symmetrie



menum

Antwort unter erzwungener Symmetrie

- **Das Last-Verformungsdiagramm wird kompliziert:**
 - **mehrere Durchschlagpunkte (Punkte B, D)**
 - **Äste mit unterschiedlichem Instabilitätsgraden**
 - **Auftreten von Umkehrpunkten**
- **Knicklast gehört zum Punkt B (nicht D!)**

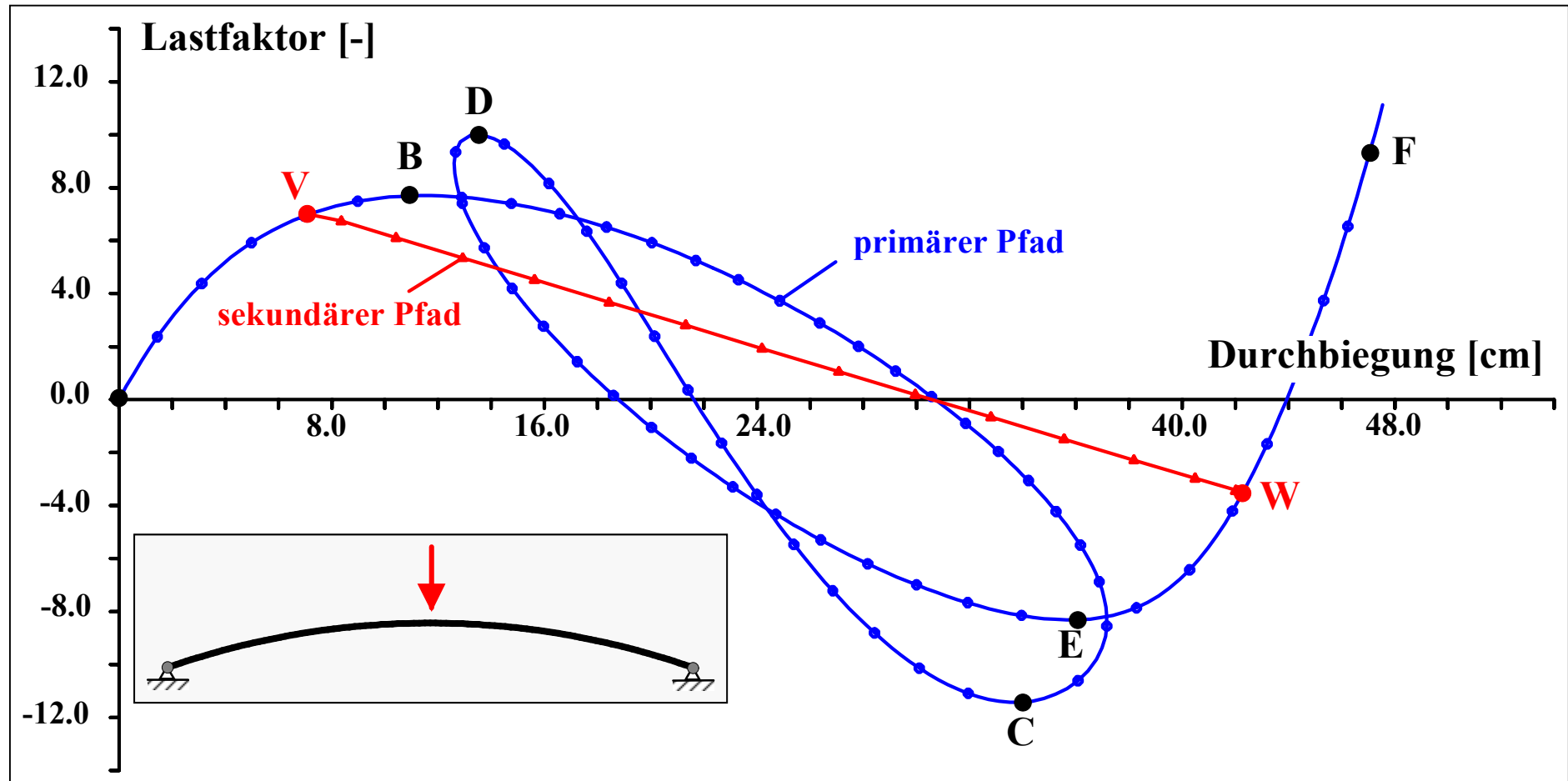


- ❖ **Verifikation durch Experimente?**
- ❖ **Ist das die wirkliche Antwort?**



menum

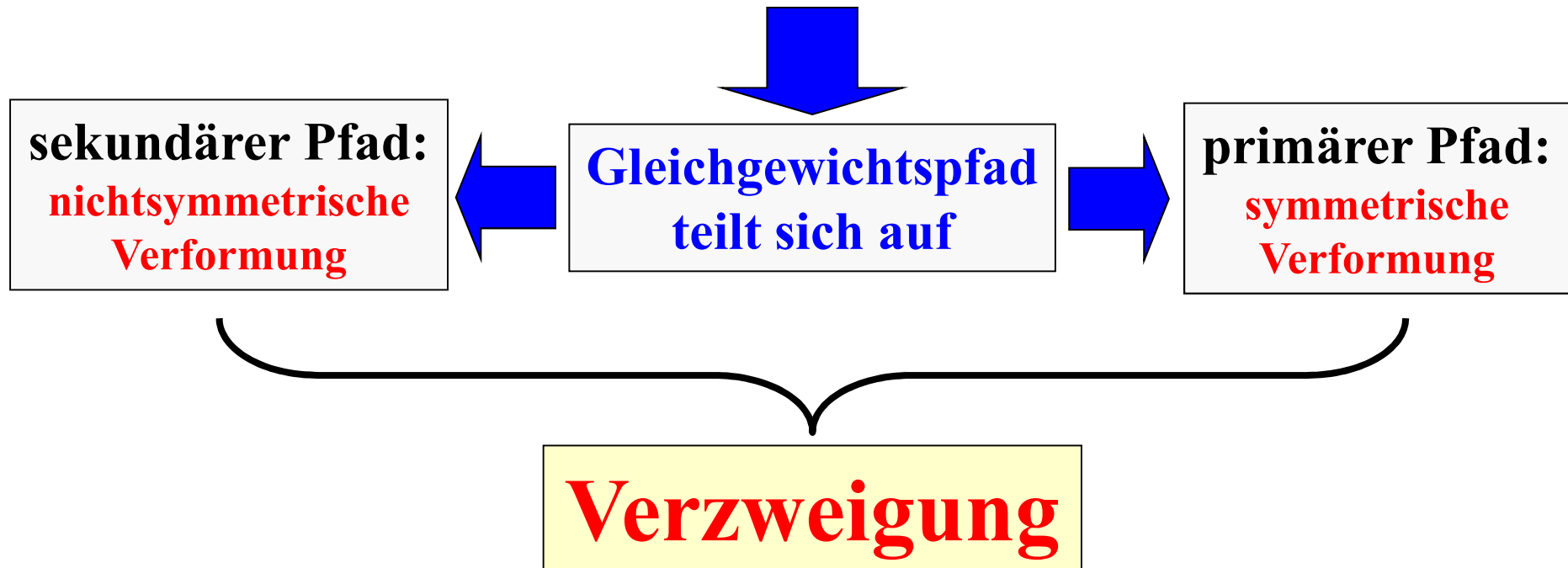
Last-Verformungsdiagramm für $R = 381 \text{ cm}$: Antwort des vollständigen Tragwerks



menum

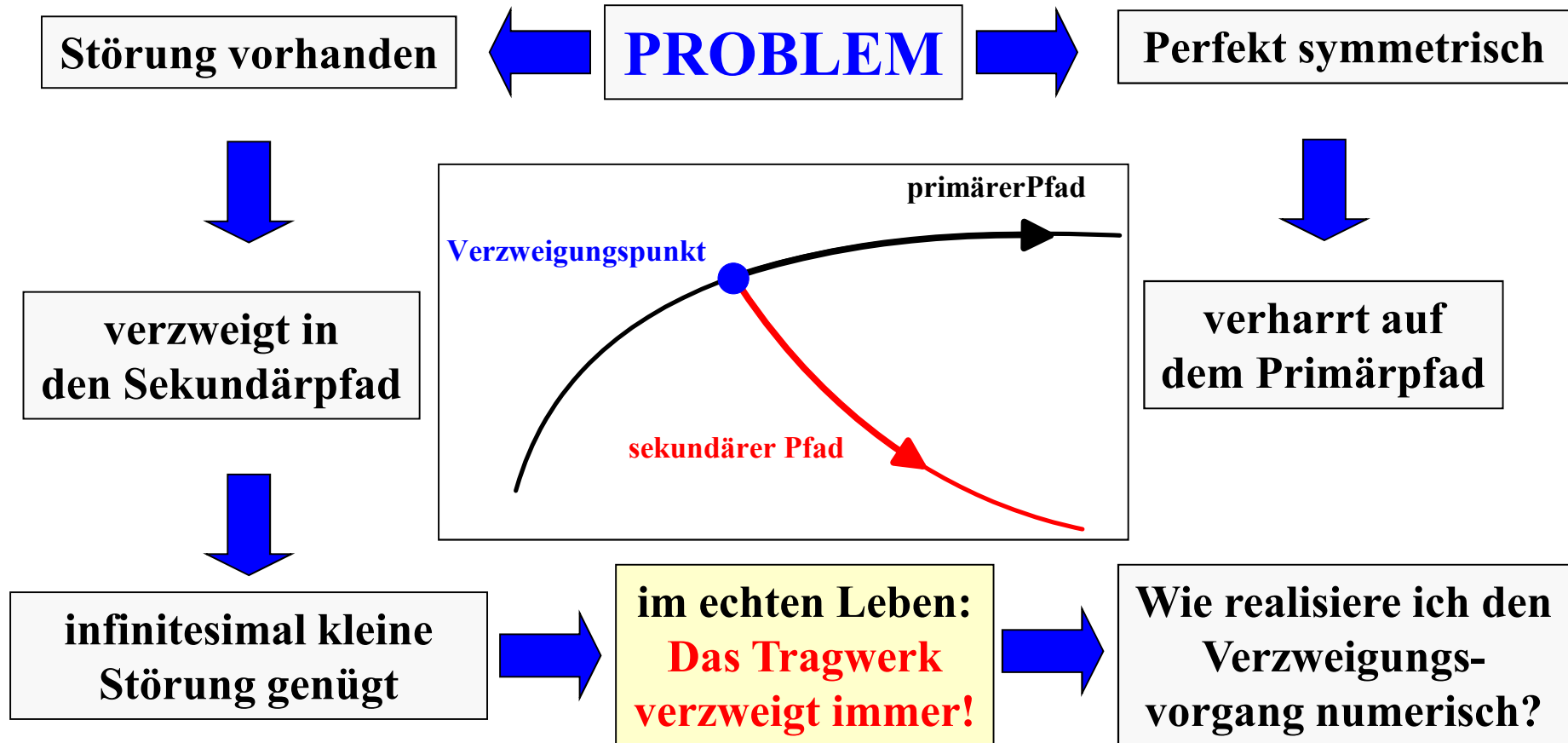
Antwort für das vollständige Tragwerk

Stabilitätsverlust vor Erreichen des Durchschlagpunktes



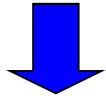
menum

Welchen Pfad nimmt das Tragwerk?

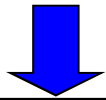


Rechentechnische Realisierung der Verzweigung

Verzweigungspunkt finden



Störung addieren



Amplitude?



zu klein



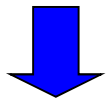
kehrt zum Primärpfad zurück



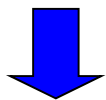
zu groß



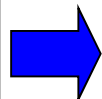
konvergiert gegen einen entfernten Punkt



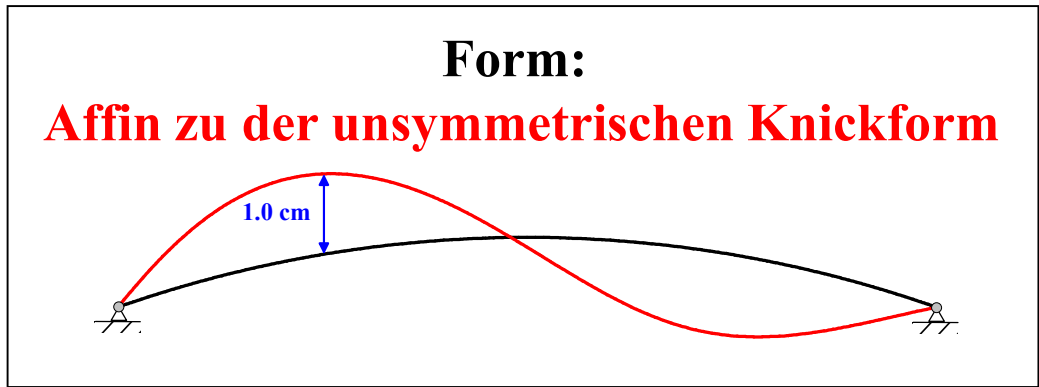
genau richtig



konvergiert zu Punkt
auf Sekundärpfad

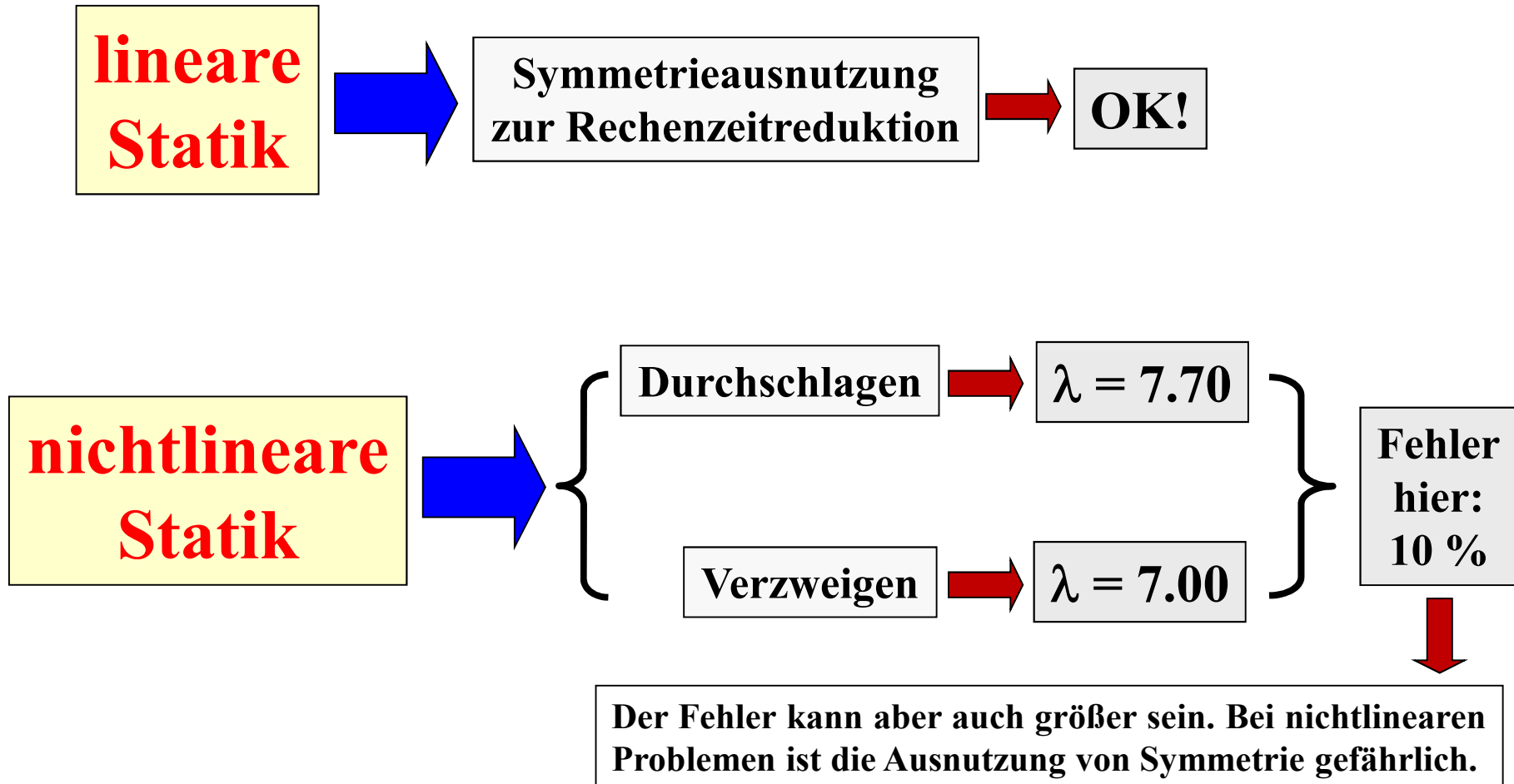


Weiterführung der Berechnung
auf dem Sekundärpfad



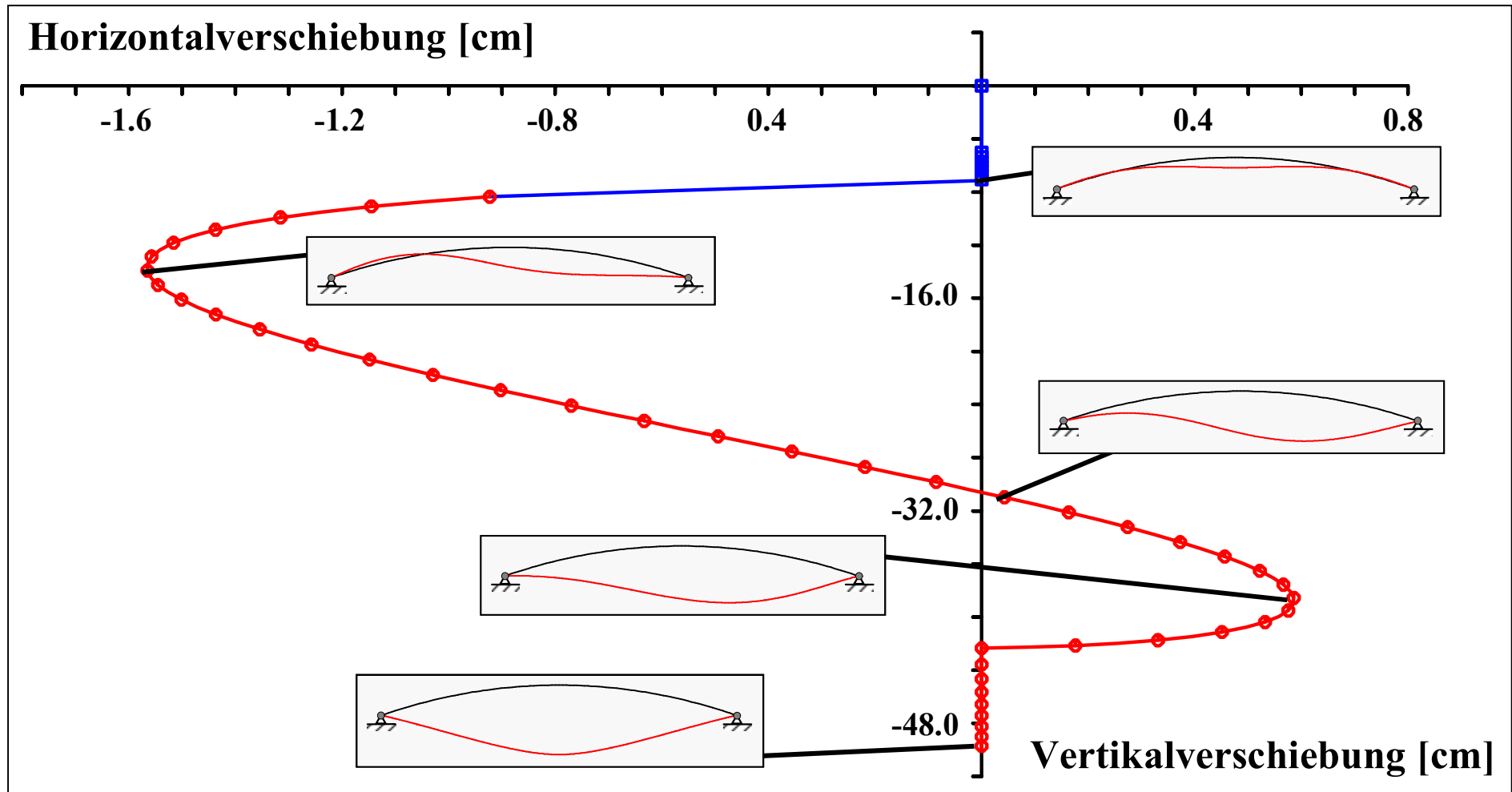
menum

Achtung: Symmetrische Tragwerke



menum

Verformungsgeschichte des Firstpunktes



menum

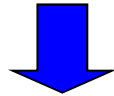
Imperfektionen

Bambusbrücke über den Fluss Koel (Indien)
Foto © Sidharthkochar
verwendet unter der Creative Commons Lizenz 3.0



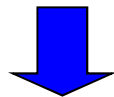
menum

STRUKTURMECHANIK

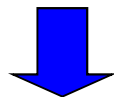


Idealisiertes Tragwerk:

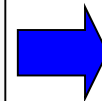
- **perfekt gerade Stabachsen**
- **konstante Querschnitte**
- **konstante Materialeigenschaften**
- ...



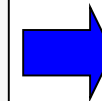
idealisierte Lösung



Übereinstimmung mit der Realität?



Antwort:
Experimente

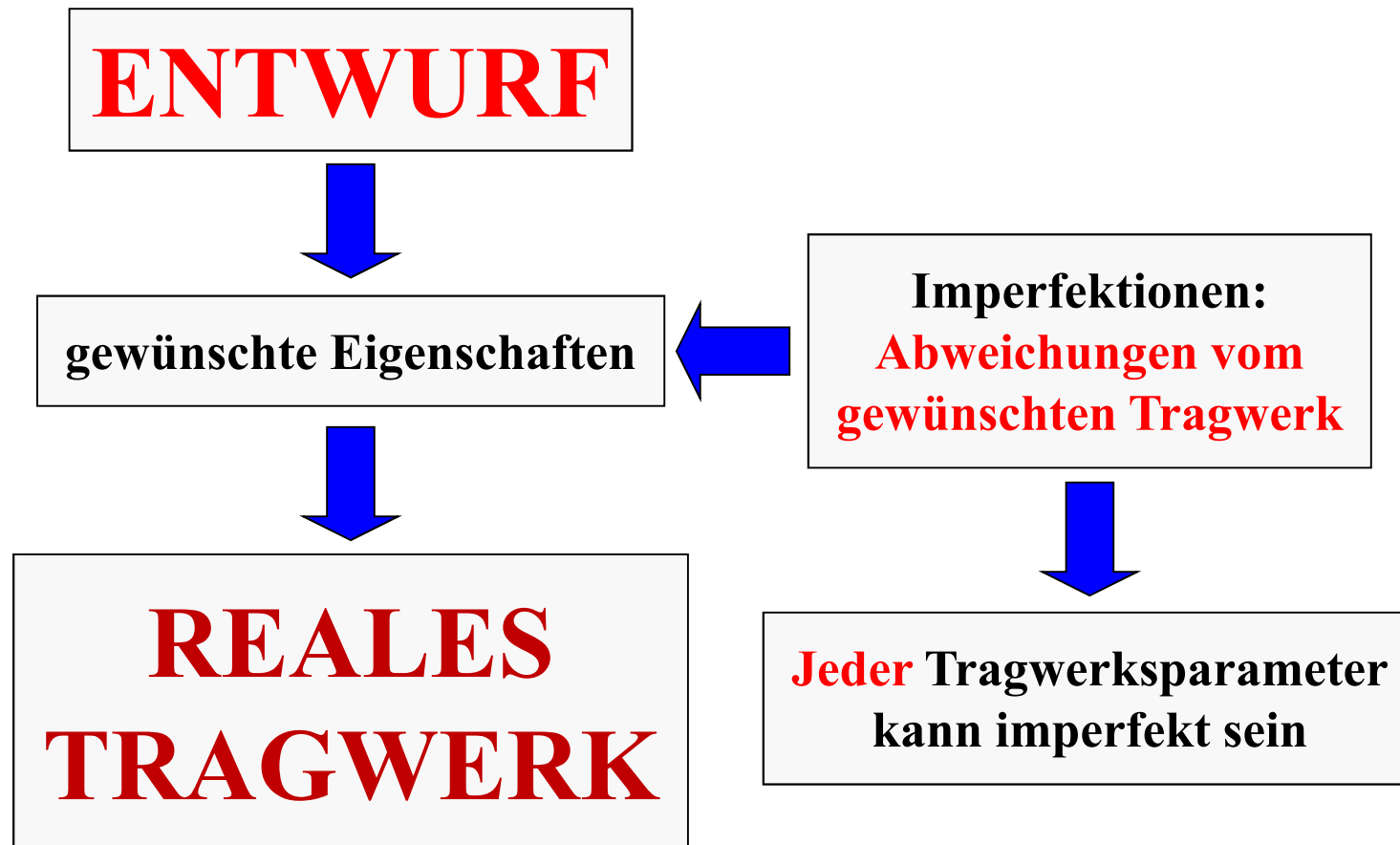


menum

« *La théorie c'est bon mais
ça n'empêche pas d'exister* »

Jean-Martin Charcot (* 29. November
1825 in Paris; † 16. August 1893 in
Morvan), französischer Pathologe und
Neurologe.

Tragwerke im richtigen Leben



menum

Imperfektionen: Überblick

- **Materialeigenschaften**

- Elastizitätsmodul
- Festigkeiten

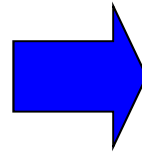
- **Querschnittsgeometrie**

- **Belastung**

- Größe der Last
- Angriffspunkte

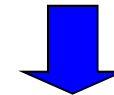
- **Geometrie**

- ...



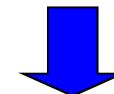
geometrische Imperfektionen:

- lokal – global
- stochastisch - systematisch



Bemessung:

ungünstigste Imperfektionen



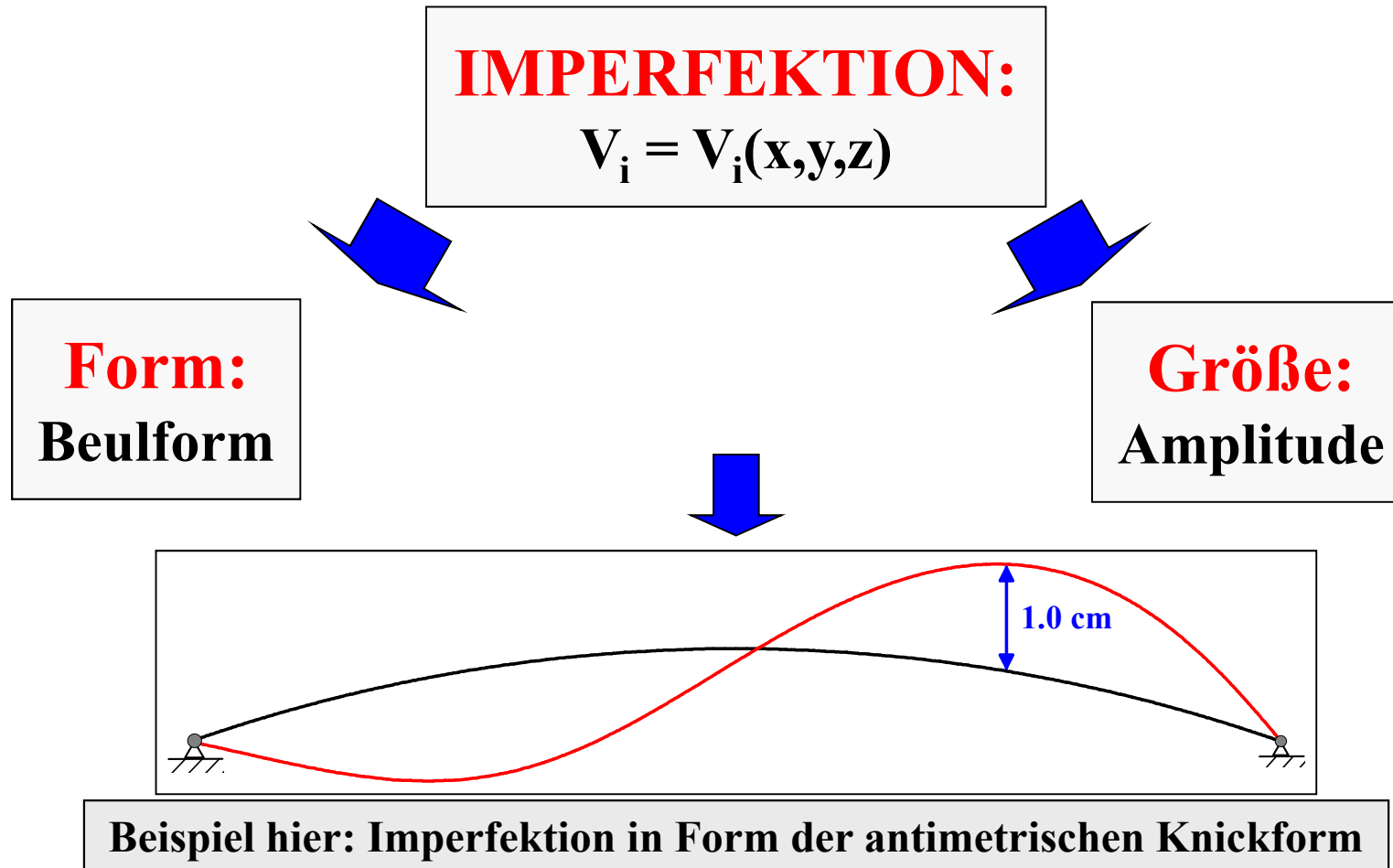
elastische Probleme:

Form affin zur ersten Knickform



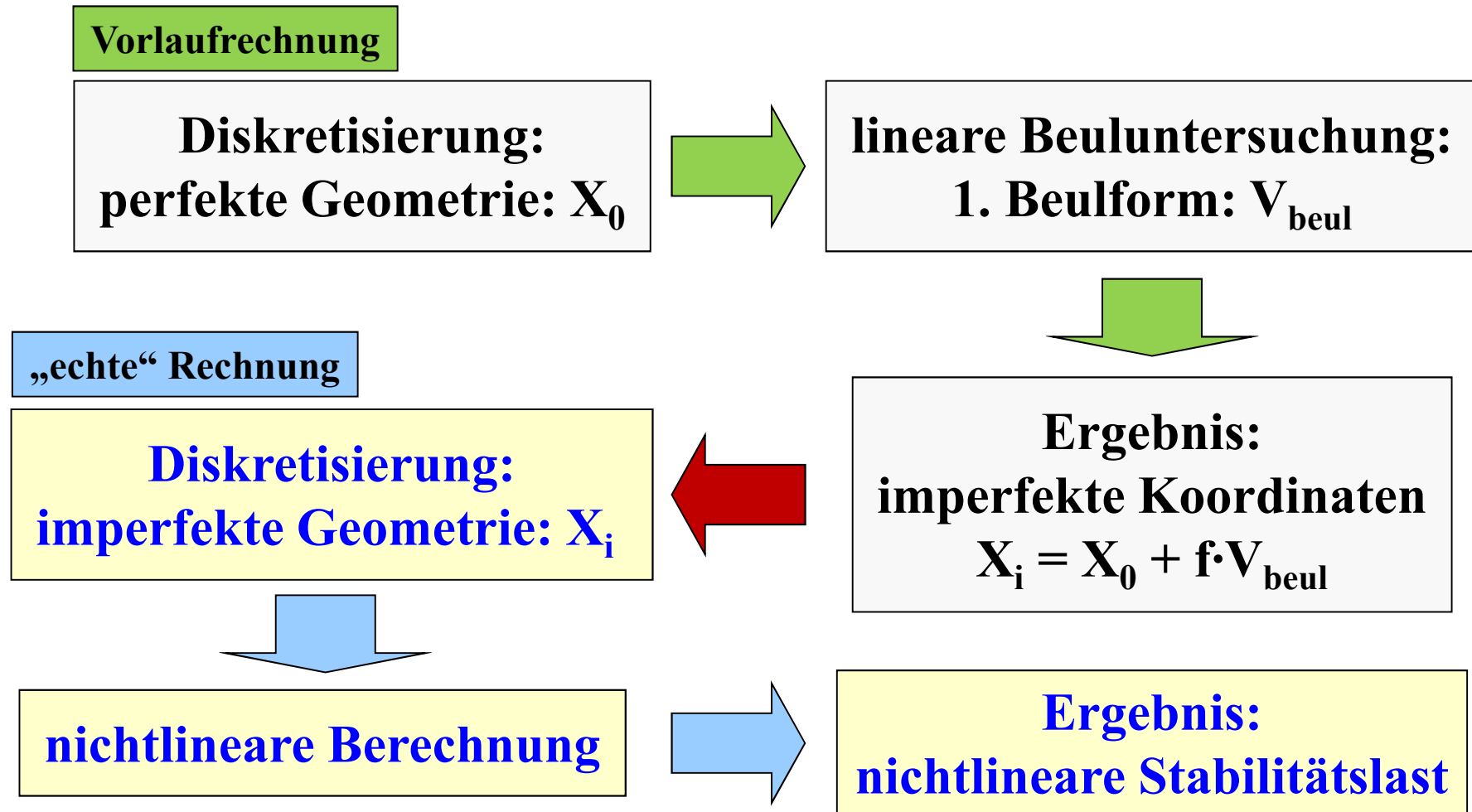
menum

Parametrisierung der Imperfektionen



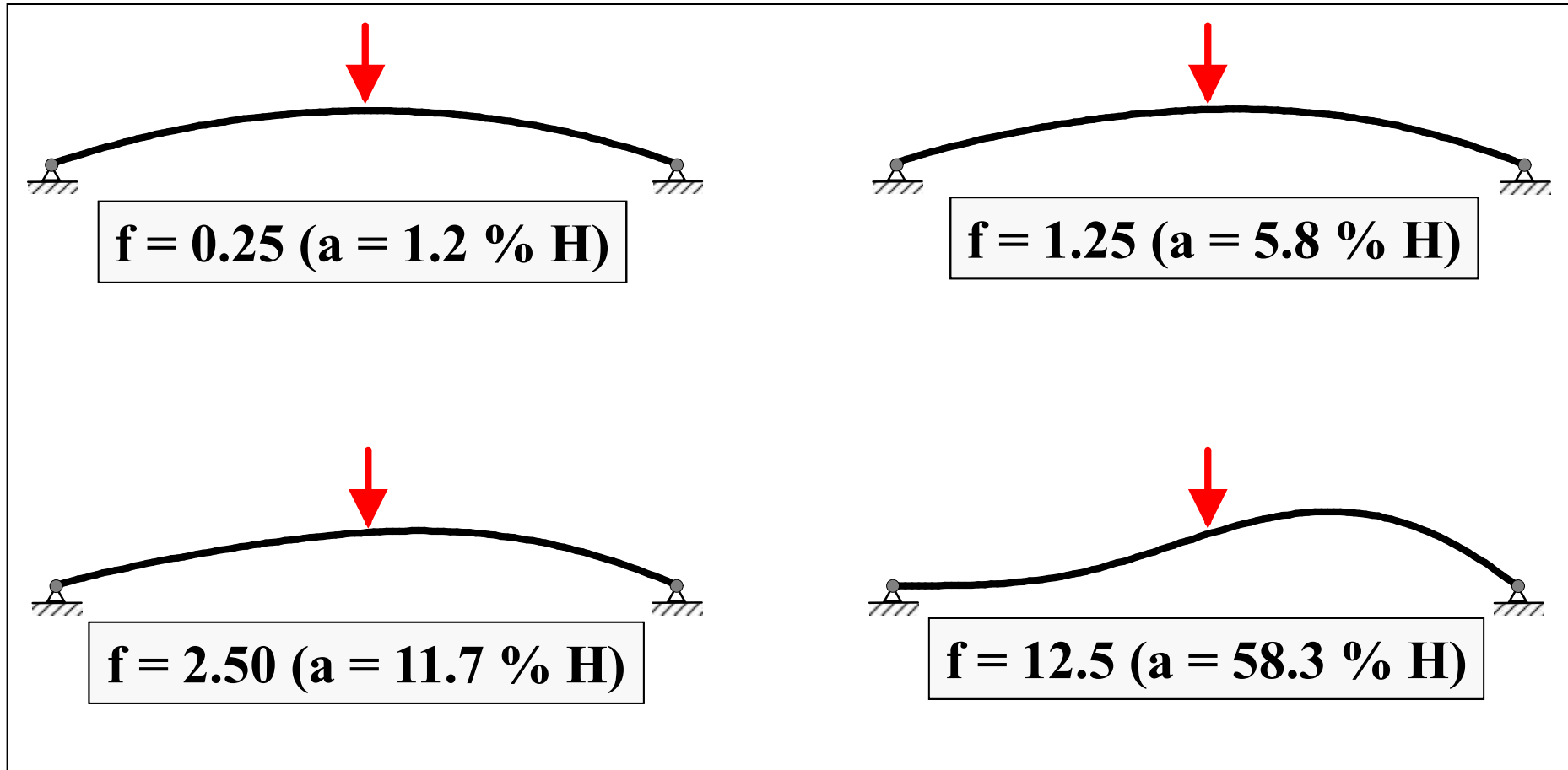
menum

Rechentechnische Realisierung



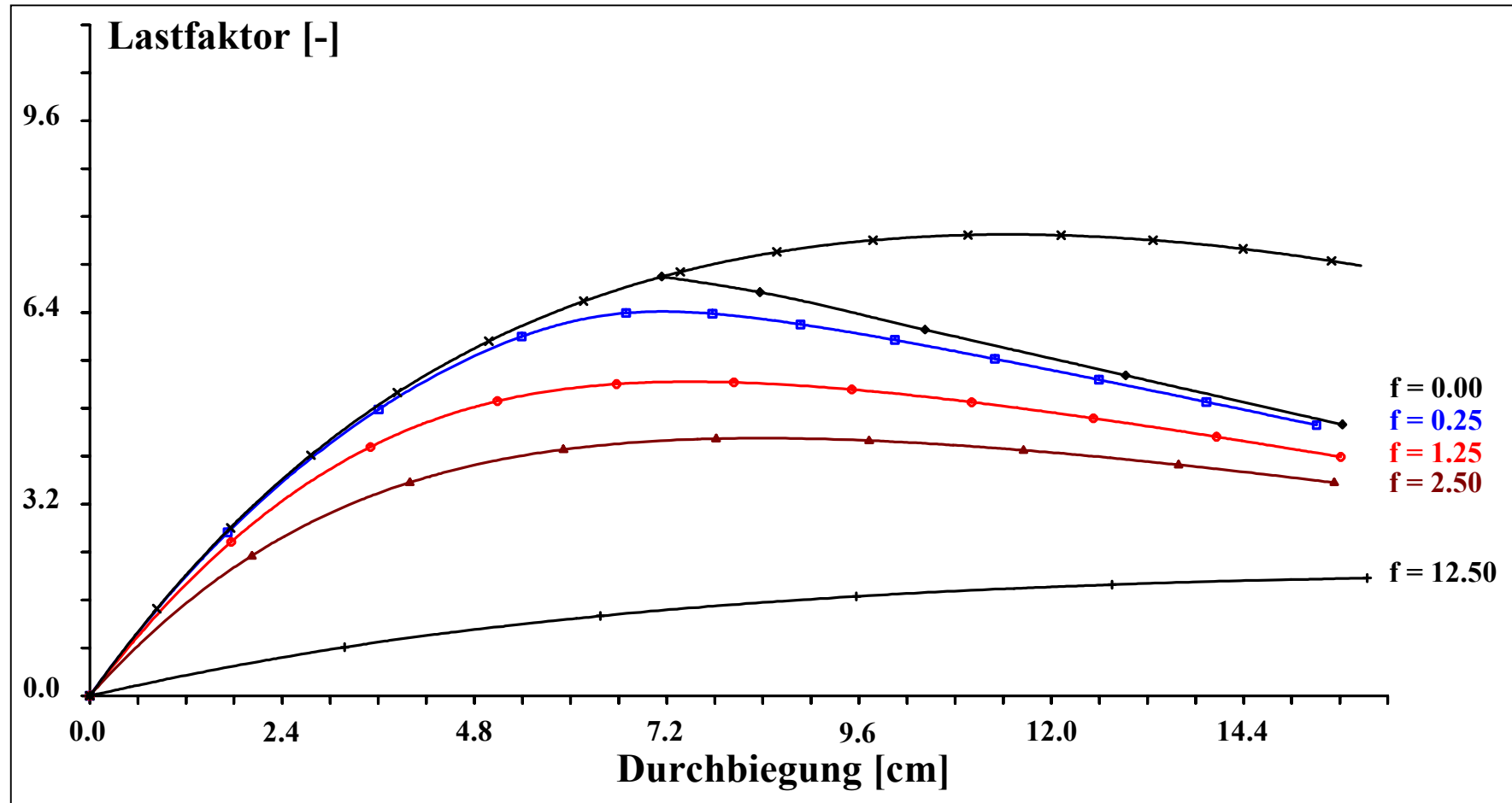
menum

Visualisierung der imperfekten Geometrien



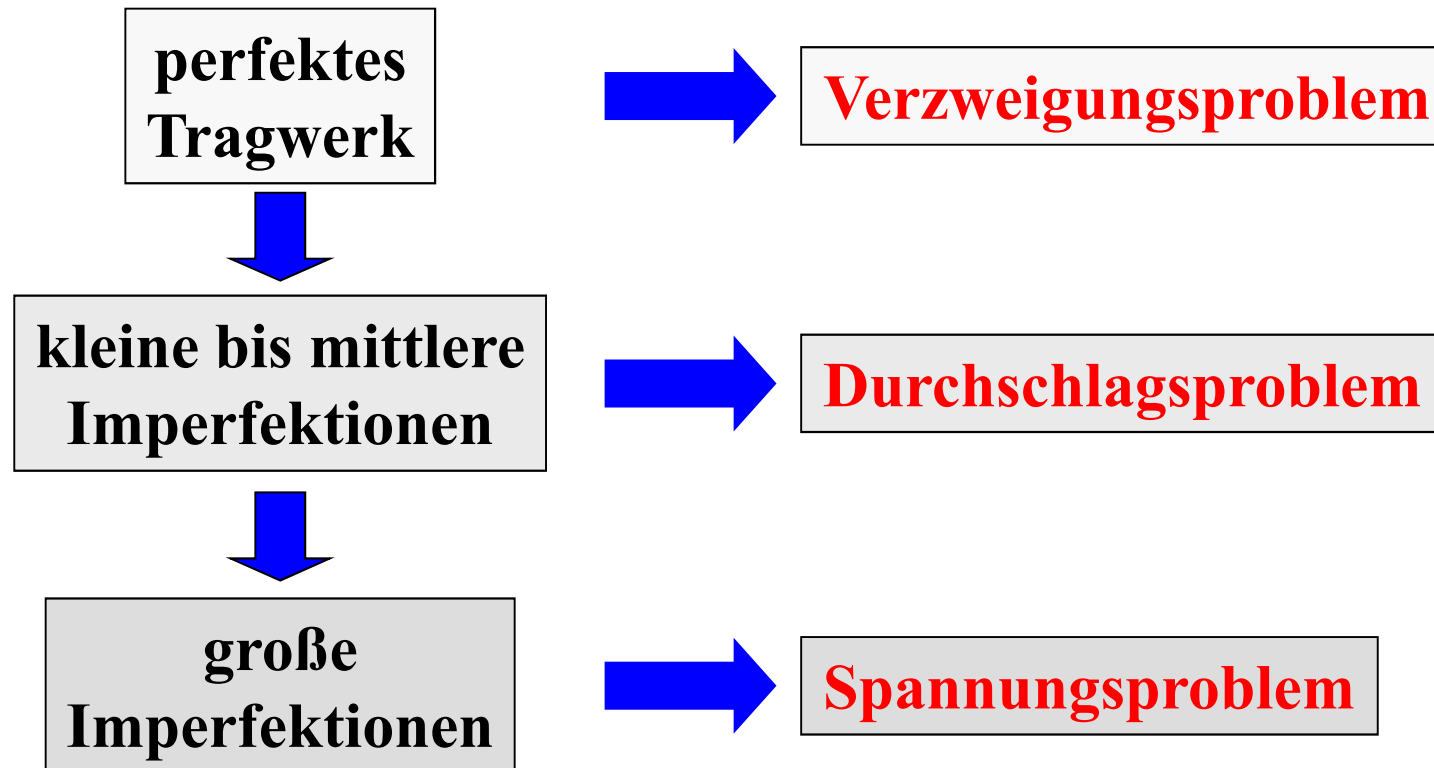
menum

Last-Verformungs-Kurve: Zoom des Anfangsbereichs



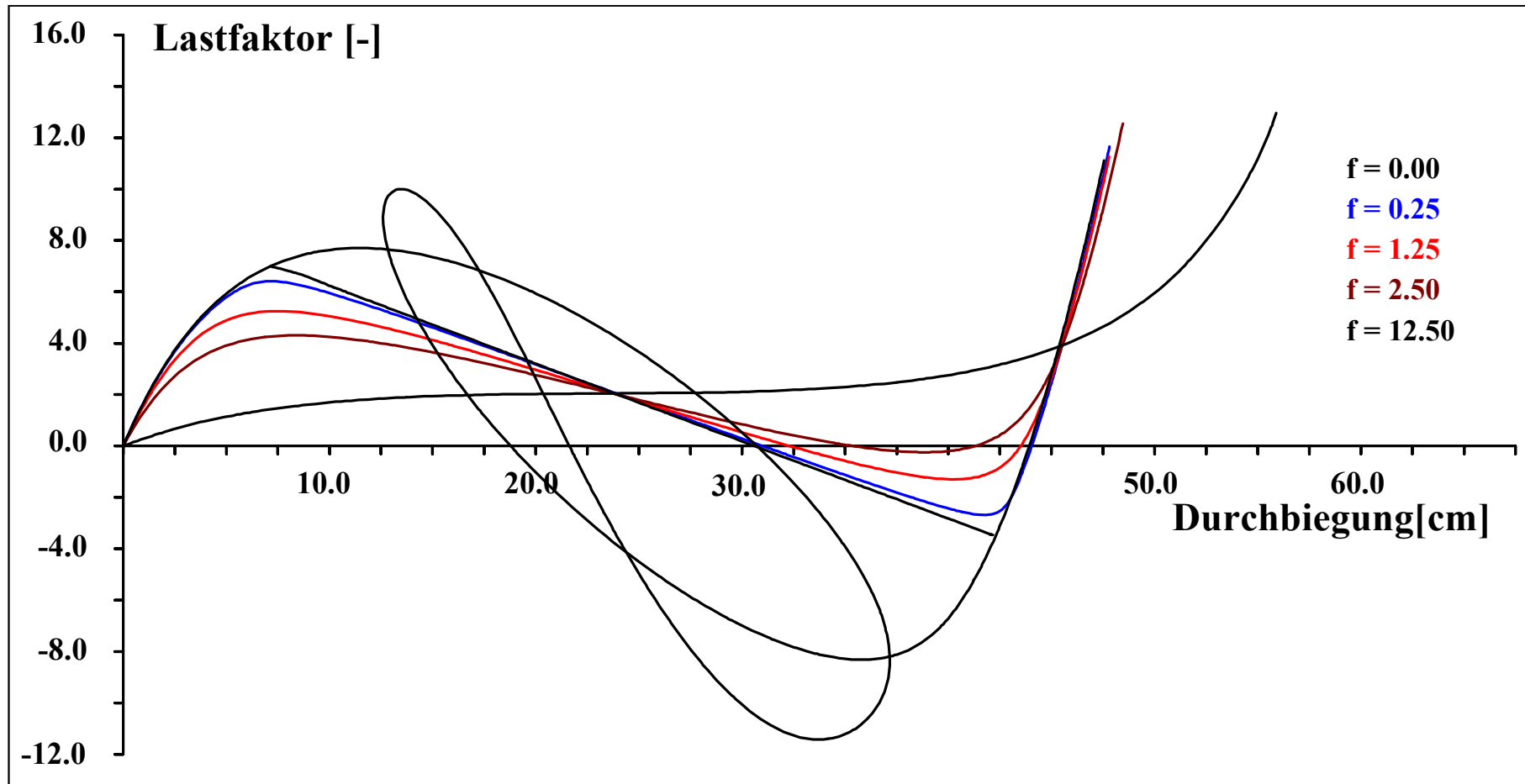
menum

Einfluss der Imperfektionen auf das Tragverhalten



menum

Last-Verformungs-Diagramm: Gesamtkurve



menum

Imperfektionsempfindlichkeit I

Reduktionsfaktor:

$$R_i = \frac{\lambda_{\text{crit}}(\mathbf{f} \neq \mathbf{0})}{\lambda_{\text{crit}}(\mathbf{f} = \mathbf{0})}$$

$\lambda_{\text{crit}}(\mathbf{f} = \mathbf{0})$: kritische Last des *perfekten* Tragwerks

$\lambda_{\text{crit}}(\mathbf{f} \neq \mathbf{0})$: kritische Last des *imperfekten* Tragwerks

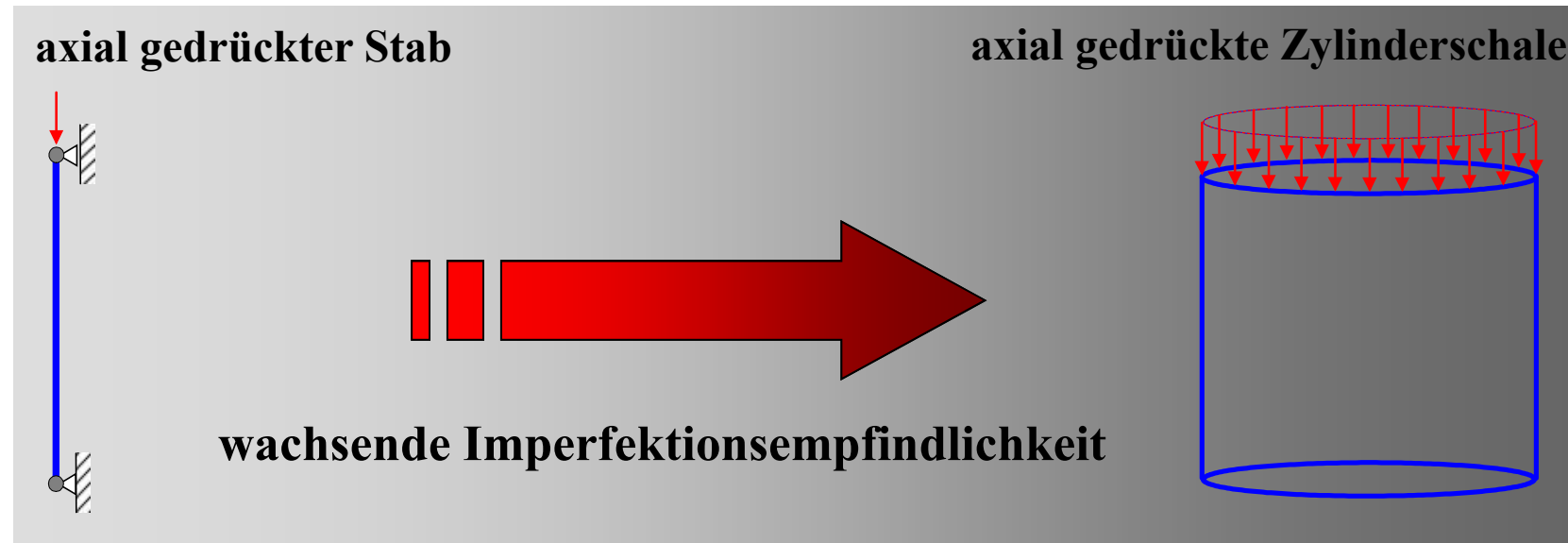


menum

Imperfektionsempfindlichkeit II

schwache Imperfektionsempfindlichkeit

starke Imperfektionsempfindlichkeit



Speziell bei Schalentragwerken kann die Imperfektionsempfindlichkeit, abhängig von der Schalengeometrie, sehr hoch sein mit Reduktionsfaktoren im Bereich von 4 oder 5. Somit kommt dem Nachweis der Beulsicherheit eine große Bedeutung zu. Was sagen die normativen Regelungen hierzu?



menum

Gute alte Zeit: DIN 1045-1978-12

Die uralte DIN 1045 von 1978 enthielt einen expliziten Abschnitt über räumliche Flächentragwerke:

24 Schalen und Faltwerke

24.3 Beuluntersuchungen

Schalen und Faltwerke sind, sofern die Beulsicherheit nicht offensichtlich ist, unter Berücksichtigung der **elastischen Formänderungen** infolge von Lasten auf Beulen zu untersuchen. Die Formänderungen infolge von Kriechen und Schwinden, die Verminderung der Steifigkeit beim Übergang vom Zustand I zum Zustand II und **Ausführungsungenauigkeiten**, insbesondere ungewollte Abweichungen von der planmäßigen Krümmung und von der planmäßigen Bewehrungslage, sind abzuschätzen.

Die Beulsicherheit darf nicht kleiner als 5 sein. Ist die näherungsweise Erfassung aller vorangegangenen Einflüsse bei der Übertragung der am isotropen Baustoff – theoretisch oder durch Modellversuche – gefundenen Ergebnisse auf den anisotropen Werkstoff Stahlbeton nicht ausreichend gesichert oder bestehen größere **Unsicherheiten** hinsichtlich der **möglichen Beulformen**, muss die Beulsicherheit um ein entsprechendes Maß **größer als 5** gewählt werden.



Aktuell: DIN 1045-1-2008-08

Die aktuelle DIN 1045 schweigt sich, ebenso wie der korrespondierende Eurocode 2, über Schalen aus Stahlbeton aus – es gibt hierfür keinen speziellen Abschnitt mehr. Im Gegenteil: im Abschnitt 1 der DIN „Anwendungsbereich“ werden für spezielle Bauwerke, zu denen auch Schalen zu rechnen sind, mögliche „zusätzliche Anforderungen“ erwähnt, die jedoch nicht näher spezifiziert sind:

„(5) Für die Bemessung von bestimmten Ingenieurbauwerken (z. B. Brücken, Segmenttragwerke, Dämme, Druckbehälter, Offshore-Plattformen, Flüssigkeitsbehälter) sind gegebenenfalls zusätzliche Anforderungen zu berücksichtigen.“

Damit ist es dem Aufsteller und Prüfer überlassen, wie er oder sie den Nachweise der Beulsicherheit zu führen bzw. zu bewerten hat – es sei denn, es gibt für spezielle Bauwerksklassen Spezialnormen oder Richtlinien, die zusätzlich zu den Allgemeinanforderungen der DIN 1045 zu beachten sind.

Für die statische Berechnung und Konstruktion von Kühltürmen beispielsweise gibt es eine entsprechende Richtlinie.



Bautechnische Richtlinie für Kühltürme BTR

Die VGB PowerTech ist der europäische technische Fachverband für die Strom- und Wärmeerzeugung, dem unter anderem auch die großen Stromanbieter angehören. Er ist Herausgeber der Richtlinie „BTR – Bautechnik bei Kühltürmen“ für „den bautechnischen Entwurf, die Berechnung, die Konstruktion und die Ausführung von Kühltürmen“.

Dort findet sich in der Ausgabe 2010 ein Absatz über die nachzuweisende Beulsicherheit:

3.2.5 Beulsicherheit

„Die Beulsicherheit ist mit dem Sicherheitsbeiwert $\gamma_B \geq 5$ für die Lastfallkombination $G+W^e+W^i$ nachzuweisen.“

3.3.4 Verfahren zum Beulsicherheitsnachweis

„Der Nachweis der Beulsicherheit darf numerisch nach klassischer Stabilitätstheorie unter Berücksichtigung der realistischen Steifigkeiten des gesamten Kühlturmtragwerks geführt werden. Dies setzt voraus, dass die zulässigen Ausführungstoleranzen eingehalten werden.

Der Nachweise darf alternativ ...“



Zusammenfassung & nächste Schritte

Wir haben in dieser Vorlesung anhand eines Beispiels die Bandbreite der möglichen Phänomene, die durch geometrische Nichtlinearität in einem linear-elastischen Tragwerk entstehen können, kennengelernt: *Spannungsprobleme*, *Durchschlagsprobleme*, *Verzweigungsprobleme*, *Imperfektionsempfindlichkeit*. Insbesondere kommt einem möglichen Stabilitätsversagen eine besondere Bedeutung zu, da diese Versagensart plötzlich, ohne Vorankündigung, eintritt.

Somit ist für die Durchführung eines Beulnachweises die Kenntnis der kritischen Stabilitätslast erforderlich. Nach unserem jetzigen Wissensstand würden wir eine Durchschlagslast mittels einer inkrementell-iterativen Berechnung gewinnen, aus der wir das lokale Lastmaximum ablesen können. Für die Detektierung eines Verzweigungspunkts haben wir noch keine Methodik entwickelt.

Die Auffindung von Stabilitätspunkten ist die Domäne der *Stabilitätstheorie*. Ziel ist es, möglichst unter Umgehung der aufwändigen Pfadverfolgung, einen möglichst guten Schätzwert der kritischen Last zu erhalten. Dieses Thema bildet den Inhalt der nächsten Vorlesung.



menum