

Fachwerkrahen unter Einzellast

1. Problemstellung

Untersuchung eines einhüftigen Rahmens, welcher durch zwei Fachwerkstäbe gebildet, und dessen Kopfpunkt durch eine Einzellast beansprucht wird.

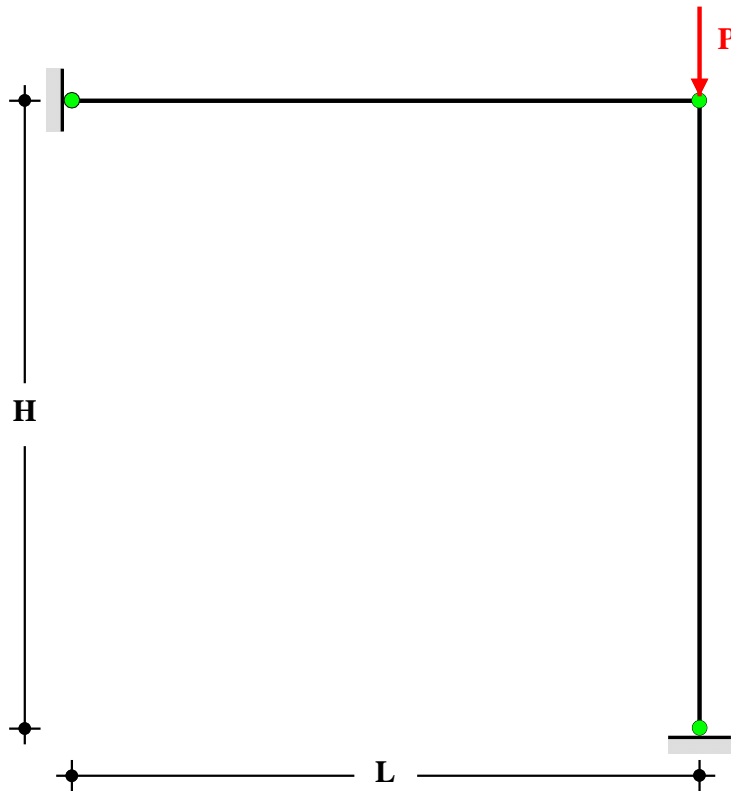


Bild 1: System und Belastung

Zahlenwerte: $H = L = 100.0 \text{ cm}$, $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, $A = 10.0 \text{ cm}^2$, $P_{\text{ref}} = 8000 \text{ kN}$

2. Lineares Verhalten

Bei Gleichgewicht am unverformten System geht die gesamte Stabkraft in den Vertikalstab – der Horizontalstab trägt nicht zum Gleichgewicht bei. Als Verformung tritt einzig eine vertikale Absenkung des Lastangriffspunktes auf

3. Nichtlineares Verhalten

Die Vertikalverschiebung des Lastangriffspunktes führt bei Betrachtung großer Verformungen zu einer Längenänderung des Horizontalstabs. Dadurch entstünde eine Stabkraft als Zugkraft, die in Richtung des verformten Stabs wirkt. Diese Zugkraft besitzt demnach eine Vertikalkomponente, die zusätzlich zum Vertikalstab einen Teil der äußeren Last aufnimmt. Die Horizontalkomponente führt dazu, dass der Punkte nach links gezogen wird. Dadurch stellt sich wiederum der Vertikalstab schräg, so dass dessen (große) Druckkraft jetzt ebenfalls eine Horizontalkomponente hat, die den Punkt weiter nach links drückt. Da die Druckkraft in V groß ist, überwiegt der Einfluss der U-Verschiebung deutlich denjenigen der V-Verschiebung und die aus beiden nichtlinearen Effekten resultierende Kraft S_H ergibt sich als Druckkraft. Die Vertikalkomponente dieser Druckkraft wirkt nun jedoch in Lastrichtung und erhöht damit die Stabkraft des Vertikalstabs. Die Horizontalverschiebung des Lastangriffspunkts besitzt somit eine mit den Abtriebskräften der Theorie II. Ordnung vergleichbare Wirkung.

3.1. Berechnung mit 49 Lastschritten

Zunächst wächst der FG U sehr langsam an, während V nahezu linear mit der Last steigt (vgl. Bild 3.1.1) Das Verhalten ist zunächst nahezu linear. Danach wird U kontinuierlich größer, ohne dass sich eine nennenswerte Nichtlinearität in V zeigt. Sehr ähnlich sieht das Last-Stabkraft-Diagramm in Bild 3.1.2 aus.

Da die Stabkräfte negativ sind, wird die dadurch erzeugte geometrische Steifigkeit ebenfalls negativ und das Tragwerk ist damit stabilitätsgefährdet. Das zeigt sich darin, dass sich ab einem bestimmten Lastniveau die Kurven rapide abflachen und bei einem Lastfaktor von $\lambda = 7.73$ ein Maximum ausbilden.

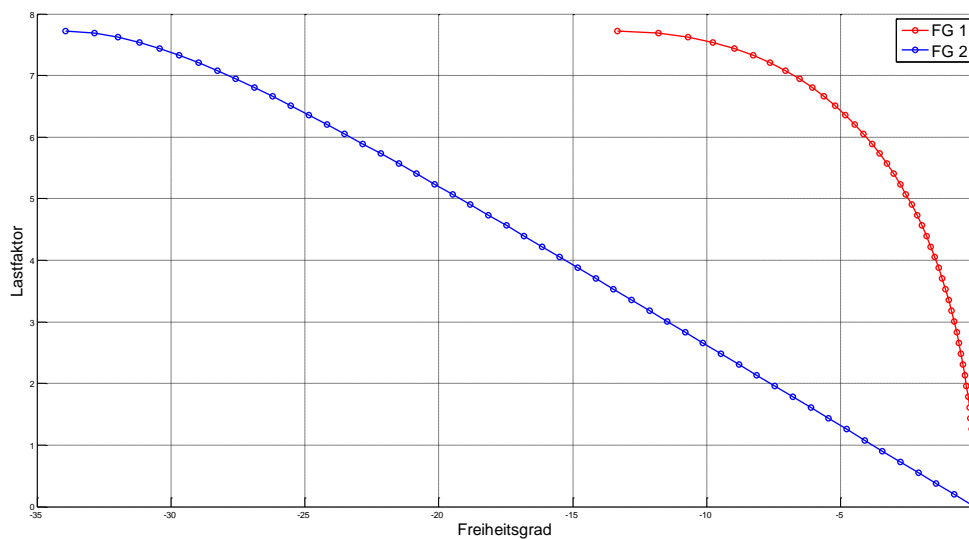


Bild 3.1.1: Last-Verformungs-Diagramm nach 49 Lastschritten

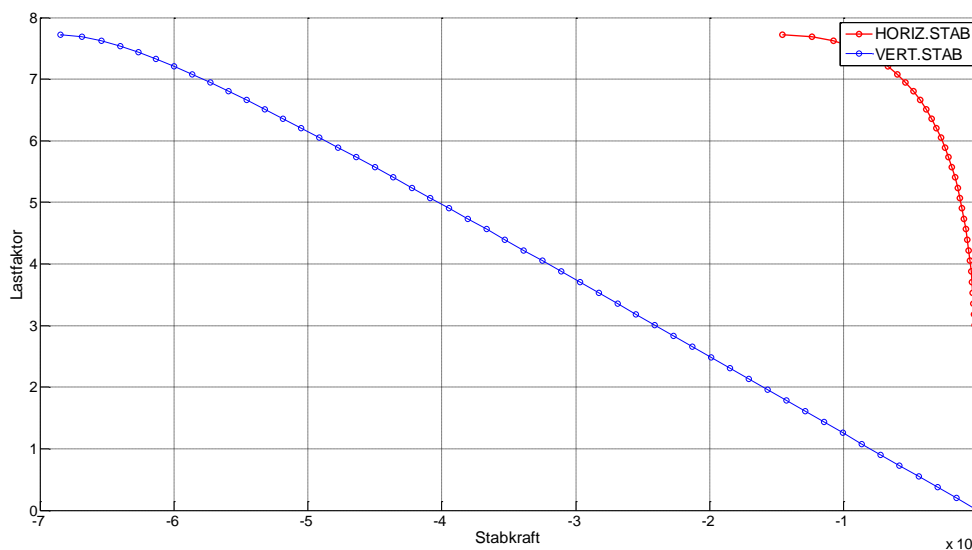


Bild 3.1.2: Last-Stabkraft-Diagramm nach 49 Lastschritten

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

Bild 3.1.3 und Bild 3.1.4 tragen die Stabkräfte und die Verschiebungen gegeneinander auf. Man erkennt deutlich den Übergang von einem rein eindimensionalen Tragverhalten in Richtung des Vertikalstabes hin zu einem gekoppelten Lastabtragungsverhalten.

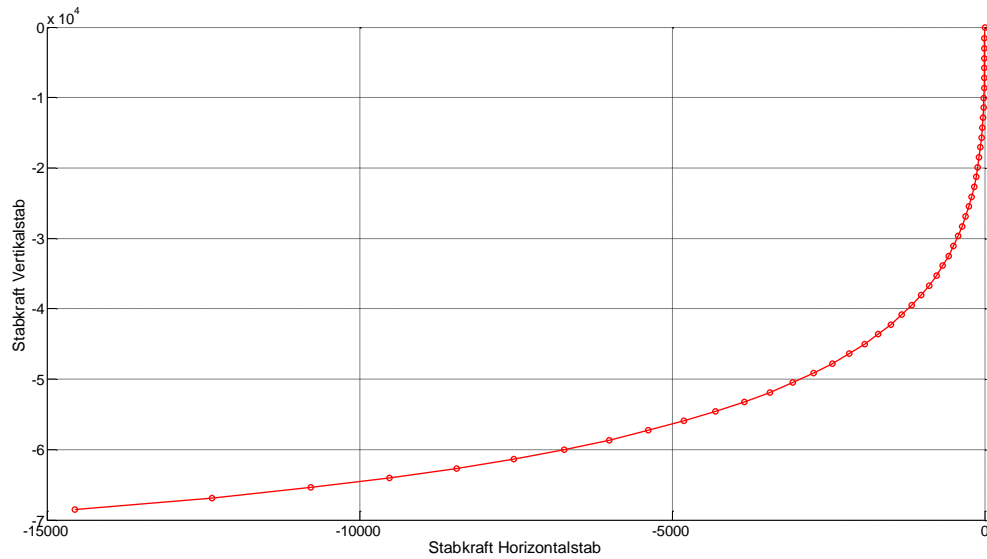


Bild 3.1.3: Stabkraft-Stabkraft-Diagramm nach 49 Lastschritten

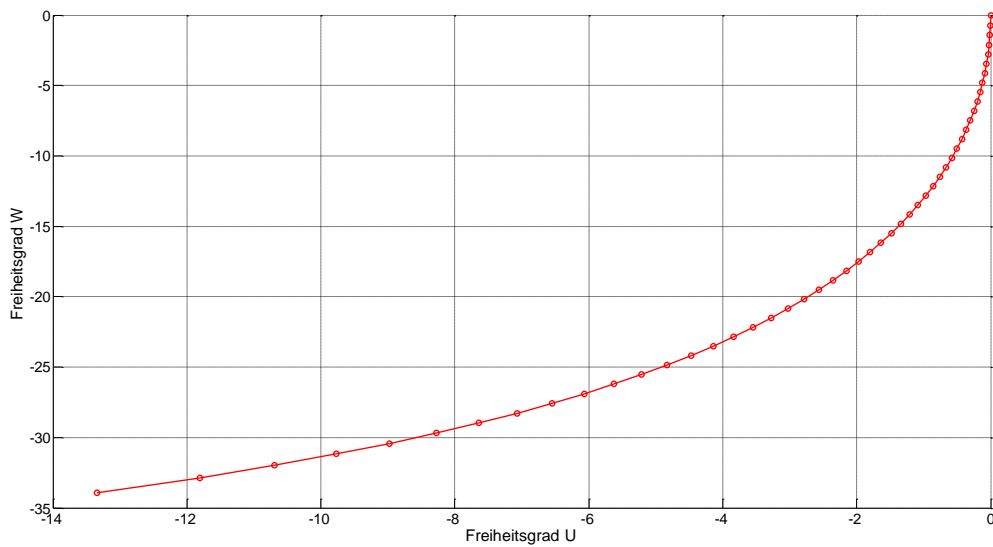


Bild 3.1.4: Bewegung des Lastangriffspunktes in der Ebene nach 49 Lastschritten

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

Im abschließenden Bild 3.1.5 schließlich ist die verformte Struktur im Knickzustand mit einem Überhöhungsfaktor von 1.0 dargestellt: Die dargestellten Verformungen stellen also den wahren Zustand dar.

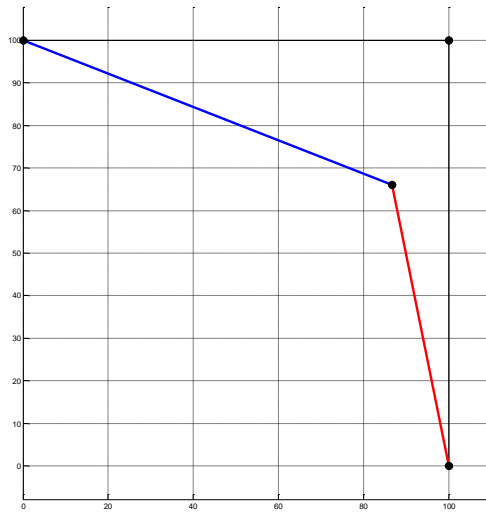


Bild 3.1.5: Verformungssituation im Knickzustand

3.2. Berechnung mit 70 Lastschritten

Nach Überschreiten des Stabilitätspunktes muss zur Herstellung von Gleichgewicht das Lastniveau sinken, wobei die Verformungen weiter wachsen. Das wäre nur möglich bei einem weggesteuerten Versuch. Die Bewegung verlagert sich immer mehr in die horizontale Richtung, und die horizontale Stabkraft holt gegenüber der vertikalen auf. Es ist sogar so, dass ab einem gewissen Punkt die Vertikalkraft kleiner wird und eine Umlagerung auf den Horizontalstab zu verzeichnen ist.

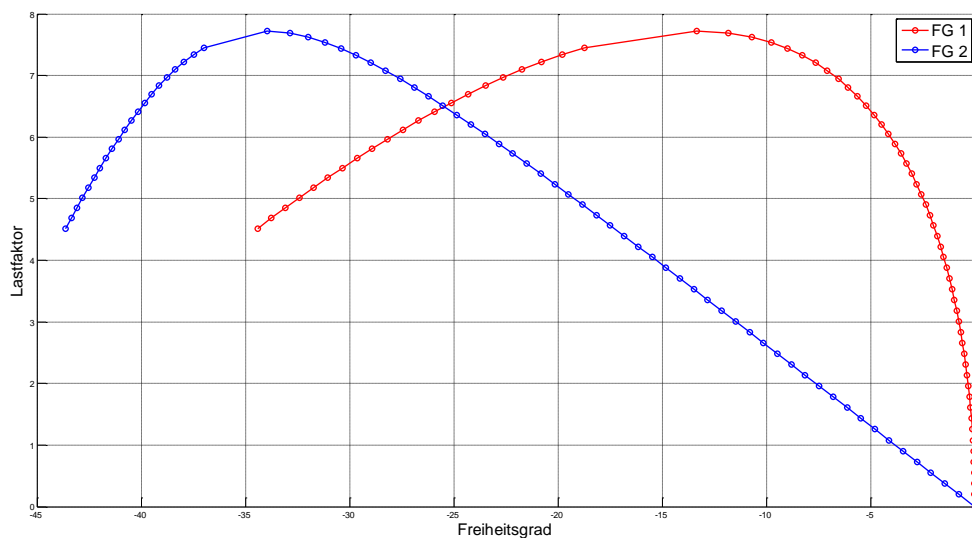


Bild 3.2.1: Last-Verformungs-Diagramm nach 70 Lastschritten

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

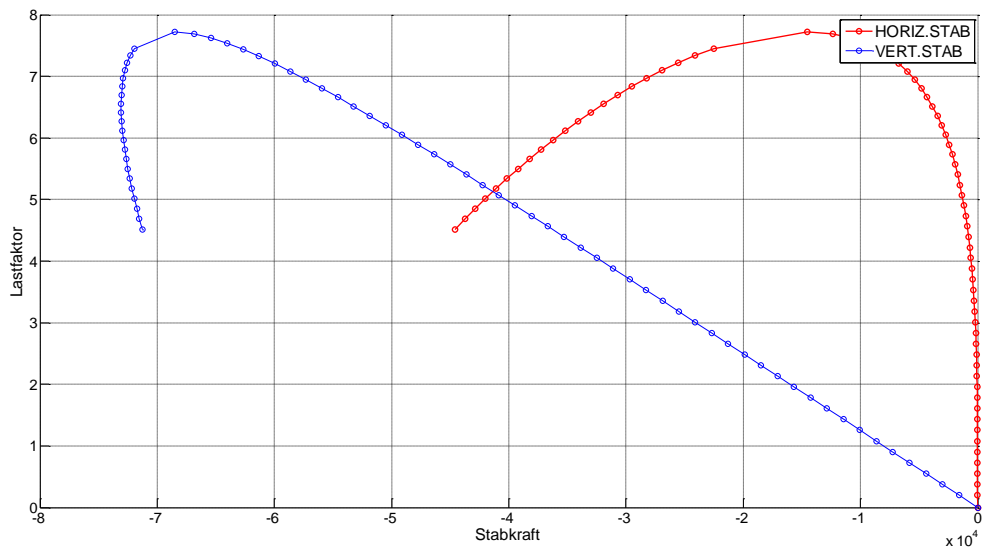


Bild 3.2.2: Last-Stabkraft-Diagramm nach 70 Lastschritten

3.3. Berechnung mit 95 Lastschritten

Jetzt ist der Lastfaktor praktisch Null, und das System steht trotzdem mit nahezu gleich großen Verformungskomponenten und Stabkräften mit sich selbst im Gleichgewicht (Bilder 3.3.1 und 3.3.2).

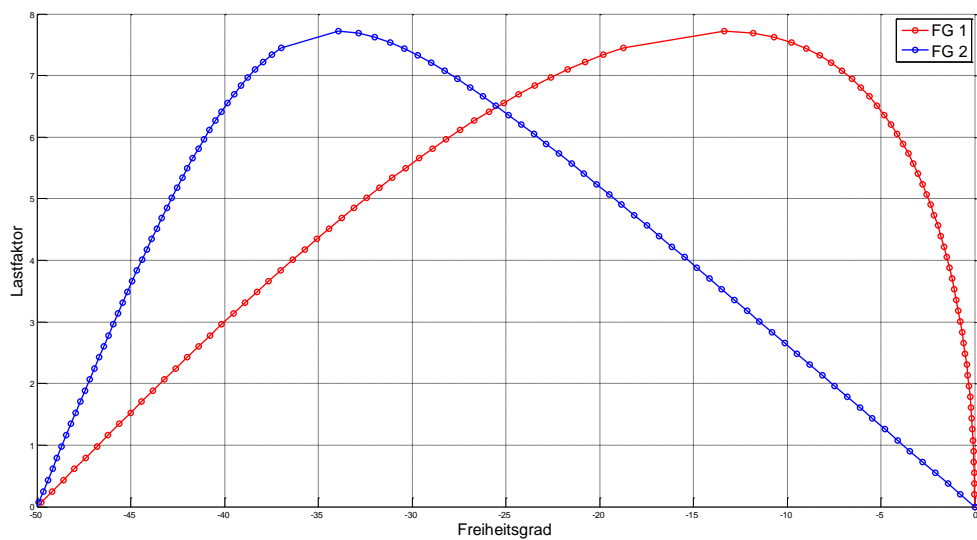


Bild 3.3.1: Last-Verformungs-Diagramm nach 95 Lastschritten

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

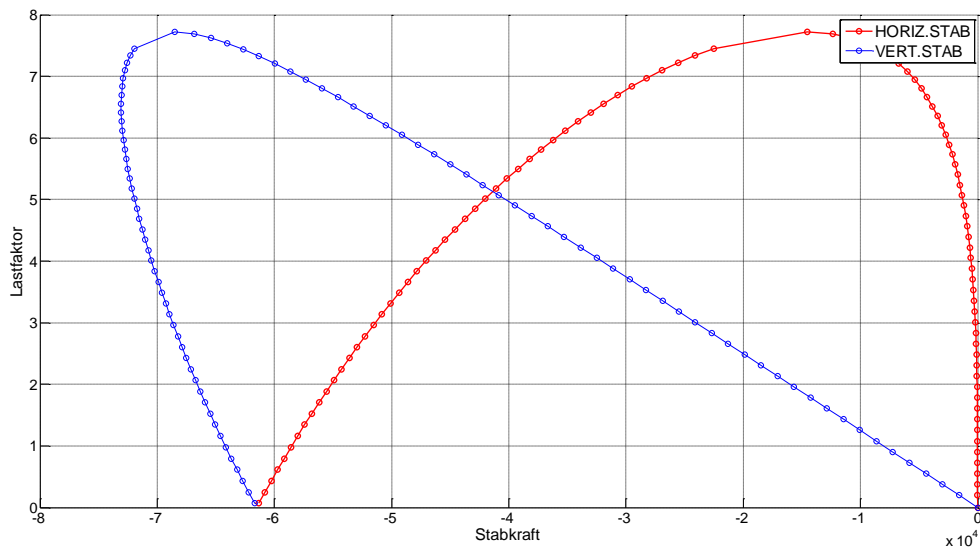


Bild 3.3.2: Last-Stabkraft-Diagramm nach 95 Lastschritten

Als Zahlenwerte ergeben sich:

$$\text{Lastfaktor } \lambda = 0.066294$$

$$\text{Verformungen } U = -49.78 \text{ cm, } V = -49.91 \text{ cm}$$

$$\text{Stabkräfte : } S_H = -61319.4 \text{ kN, } S_V = -61694.4 \text{ kN}$$

Der Lastangriffspunkt liegt jetzt genau in der Mitte der Diagonalen. Beide Stabkräfte besitzen die gleiche Wirkungslinie und können deshalb die großen Druckkräfte direkt in die Lager leiten (vgl. Bild 3.3.3).

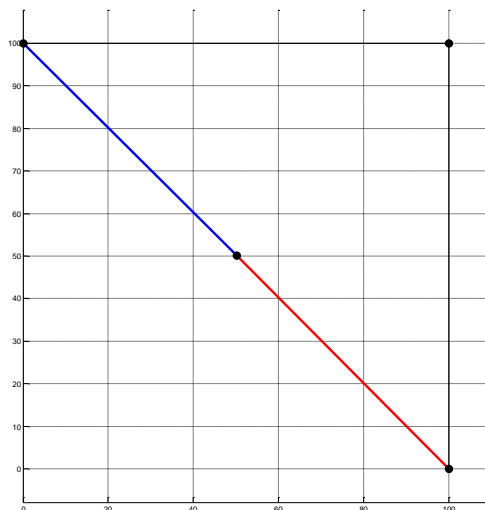


Bild 3.3.3: Gleichgewichtszustand ohne Belastung

Durch das Bogenlängenverfahren wurde der vollständig unbelastete Zustand nicht exakt getroffen. Analytisch würde man $U = V = -50 \text{ cm}$ und zugehörige Stabkräfte von -61508 kN ermitteln. Dieser selbstequilibrierende Zustand ist instabil: Eine infinitesimal kleine Störung würde, je nach Richtung der Störung, das System in den Ausgangszustand zurückspringen

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

lassen, oder in die andere Richtung in einen neuen, vom Urzustand weit entfernten Alternativzustand in Bewegung setzen. Wie sieht dieser Alternativzustand aus?

3.4. Berechnung mit 193 Lastschritten

Nach Durchlaufen eines minimalen, sogar negativen Lastniveaus (Bild 3.4.2), welches symmetrisch zur positiven Stabilitätslast liegt, gewinnt das System seine Stabilität zurück und die Last kann wieder anwachsen. Im Verformungszustand $U = V = -100$ cm ergibt sich wieder ein Gleichgewichtszustand ohne äußere Last. Dieser Zustand stellt damit die stabile Alternativkonfiguration dar, die ohne Lasteinwirkung unendlich lange bestehen bleiben würde. Der Lastangriffspunkt befindet sich jetzt bei den Koordinaten $x=0$ und $y=0$. Damit hat sich das Tragwerk vollkommen umgedreht: Der ursprüngliche Horizontalstab verläuft jetzt vertikal, und der Vertikalstab liegt horizontal.

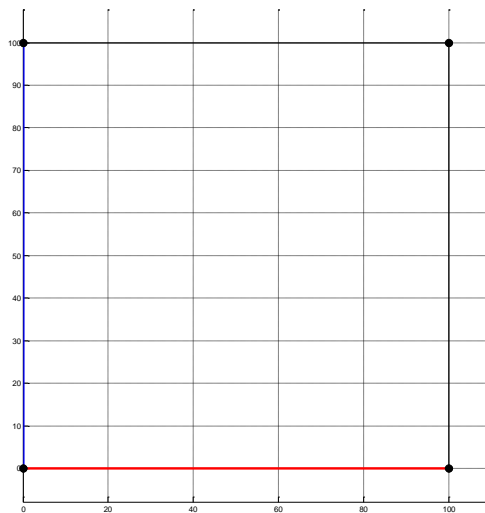


Bild 3.4.1: Stabiler unbelasteter Alternativgleichgewichtszustand

Interessant ist das Last-Stabkraftdiagramm in Bild 3.4.3. Beide Stabkräfte starten bei Null und durchlaufen einen geschlossenen Zyklus, der wiederum bei null endet. Beide Kurven verlaufen spiegelbildlich zueinander: Nach Durchlaufen des instabilen unbelasteten Gleichgewichtszustandes, bei dem der Lastangriffspunkt in der Mitte der Diagonalen liegt, tauschen die Stäbe ihre Funktion und zeigen dadurch ein exakt ausgetauschtes Verhalten.

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

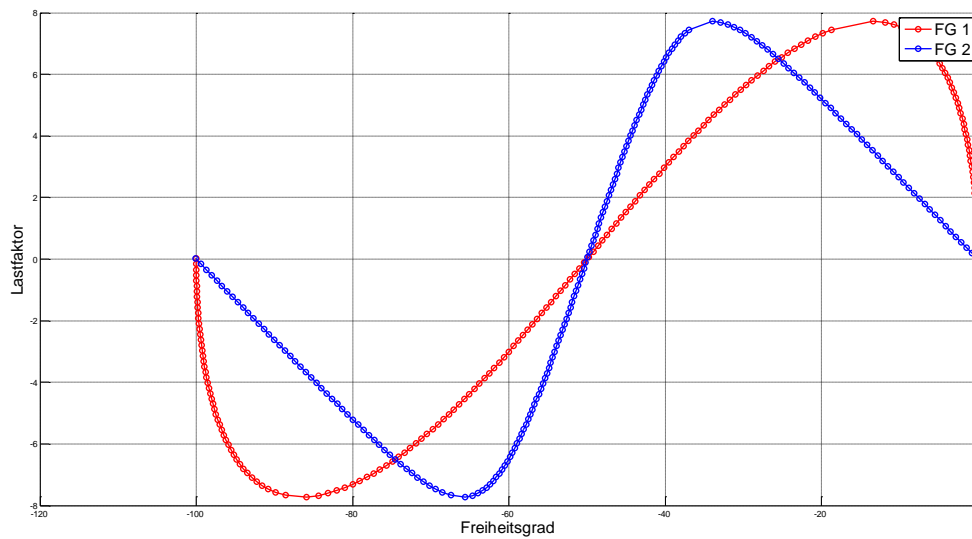


Bild 3.4.2: Last-Verformungs-Diagramm nach 193 Lastschritten

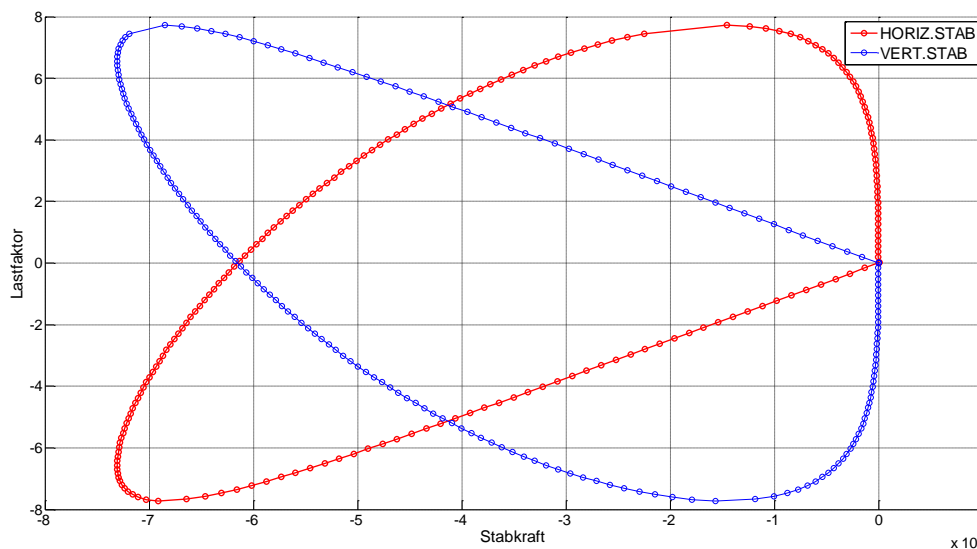


Bild 3.4.3: Last-Stabkraft-Diagramm nach 193 Lastschritten

Trägt man die Ergebnisse der beiden Größen jeweils gegeneinander auf, kann man in Bild 3.4.4 den Weg erkennen, den der Lastangriffspunkt in der Ebene zurücklegt. Bild 3.4.5 zeigt die Art und Weise, wie sich die relative Größe der beiden Stabkräfte unablässig verändert.

Besäßen die Bilder quadratische Abmessungen, wären die Kurven spiegelsymmetrisch zur Diagonalen.

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

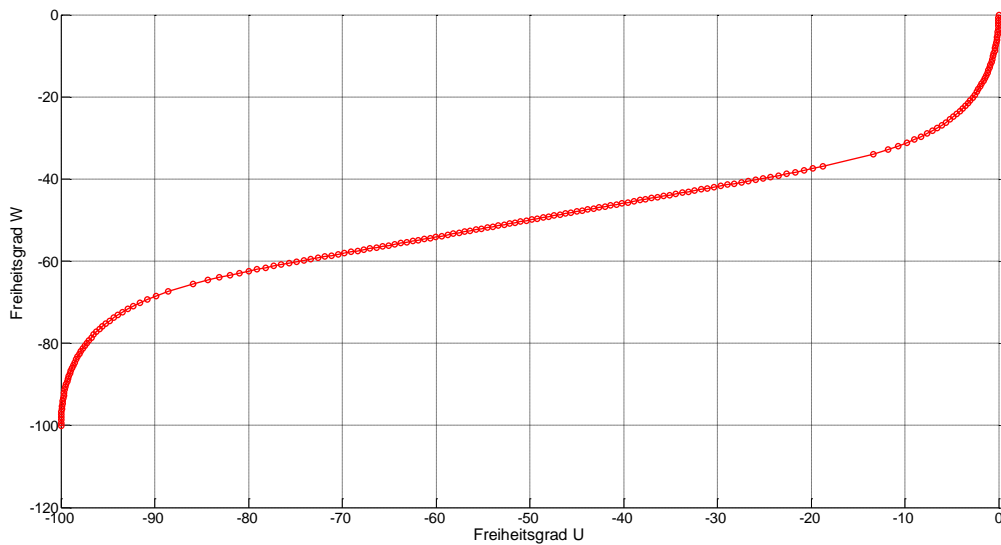


Bild 3.4.4: Bewegung des Lastangriffspunktes in der Ebene nach 193 Lastschritten

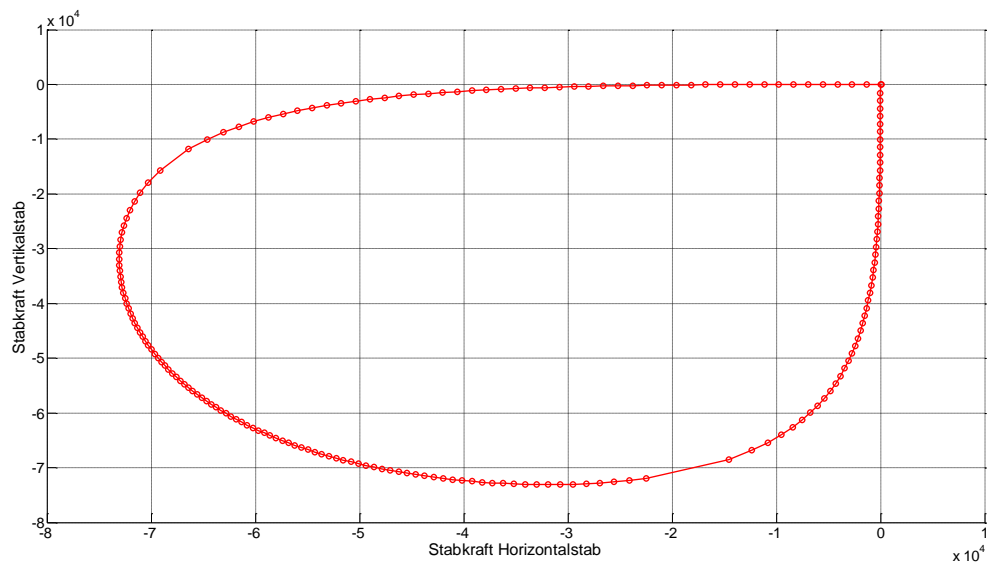


Bild 3.4.5: Stabkraft-Stabkraft-Diagramm nach 193 Lastschritten

3.5. Berechnung mit 300 und 600 Lastschritten

Jetzt kann die Last ad Infinitum gesteigert werden, denn es herrscht vollständiger Zug innerhalb des Tragwerks und es liegt damit keine Stabilitätsgefährdung mehr vor. Das System versteift immer mehr und nähert sich damit immer mehr einem linearen Verhalten an, indem die Stabkräfte linear mit der Last anwachsen (Bild 3.5.1 und Bild 3.5.2). Dieses lineare Verhalten ist jedoch nicht das lineare Verhalten des unbelasteten Alternativzustands, sondern das lineare Verhalten eines extrem verformten Systems, wie in Bild 3.5.3 für den Lastfaktor $\lambda = 87.6$ nach 600 Lastschritten dargestellt.

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

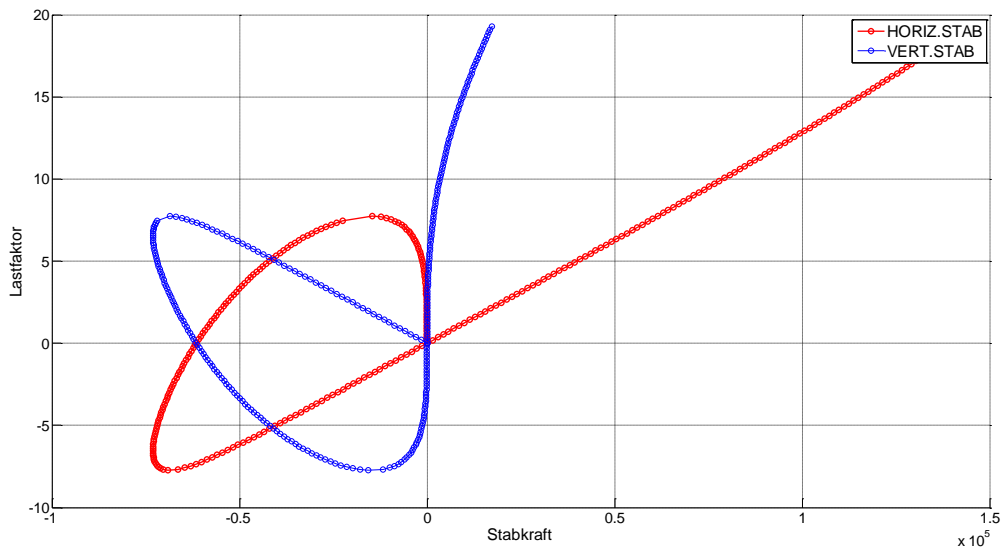


Bild 3.5.1: Last-Stabkraft-Diagramm nach 300 Lastschritten

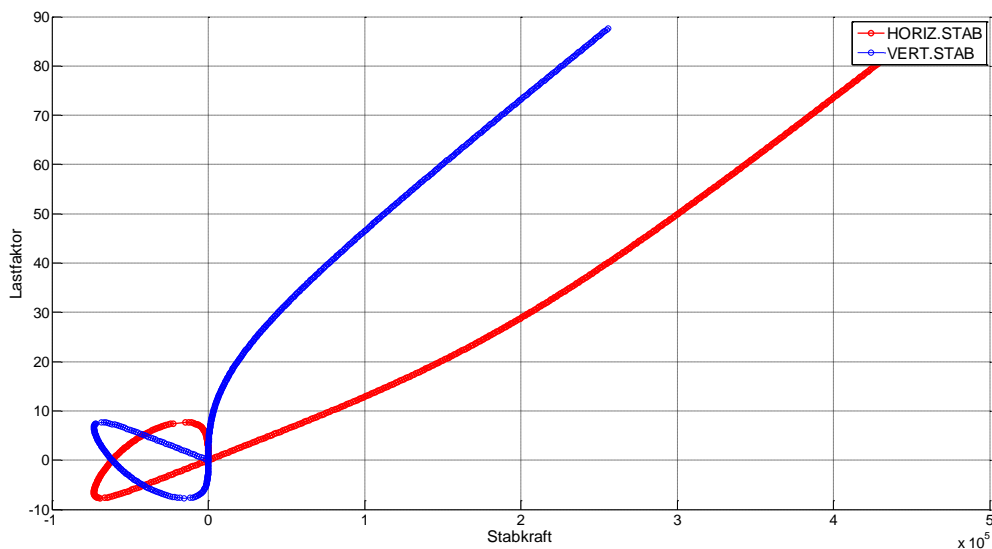


Bild 3.5.2: Last-Stabkraft-Diagramm nach 600 Lastschritten

Selbstverständlich stellen derartige extreme Verformungszustände für „normale“ Materialien keine realistischen Ergebnisse dar, denn es wäre schon längst zu Materialversagen gekommen. Außerdem wären, selbst bei unbegrenzt elastischem Verhalten, die Dehnungen so groß, dass das Rechenmodell entsprechend modifiziert werden müsste.

Die Rechnungen zeigen jedoch die Fähigkeit des Bogenlängenverfahrens, Extrem- und Umkehrpunkte in einer einzigen durchgängigen Rechnung überwinden zu können, und machen deutlich, wie komplex das Tragverhalten bei ausgeprägt großen Verformungen werden kann.

SUPERGEIL!

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.3

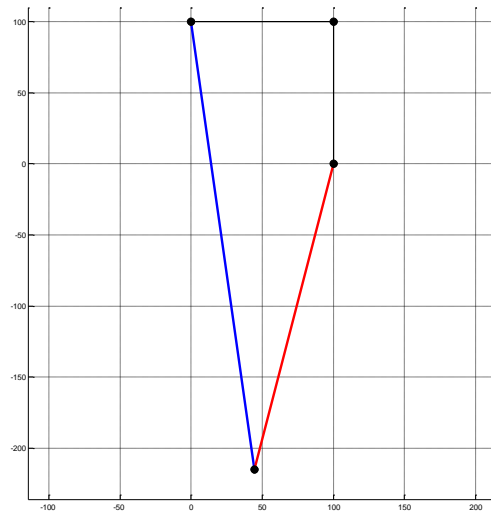


Bild 3.5.3: Verformungszustand nach 600 Lastschritten für $\lambda = 87.6$