

Seilnetz unter Einzellast

1. Problemstellung

Ein Seilnetz wird aus 6 gleich langen Seilen gebildet, deren Lagerpunkte sich äquidistant auf einem Kreis mit Radius L_p befinden, so dass die Seile im Grundriss die Länge L_p besitzen. Der Seildurchhang beträgt im unbelasteten Zustand f .

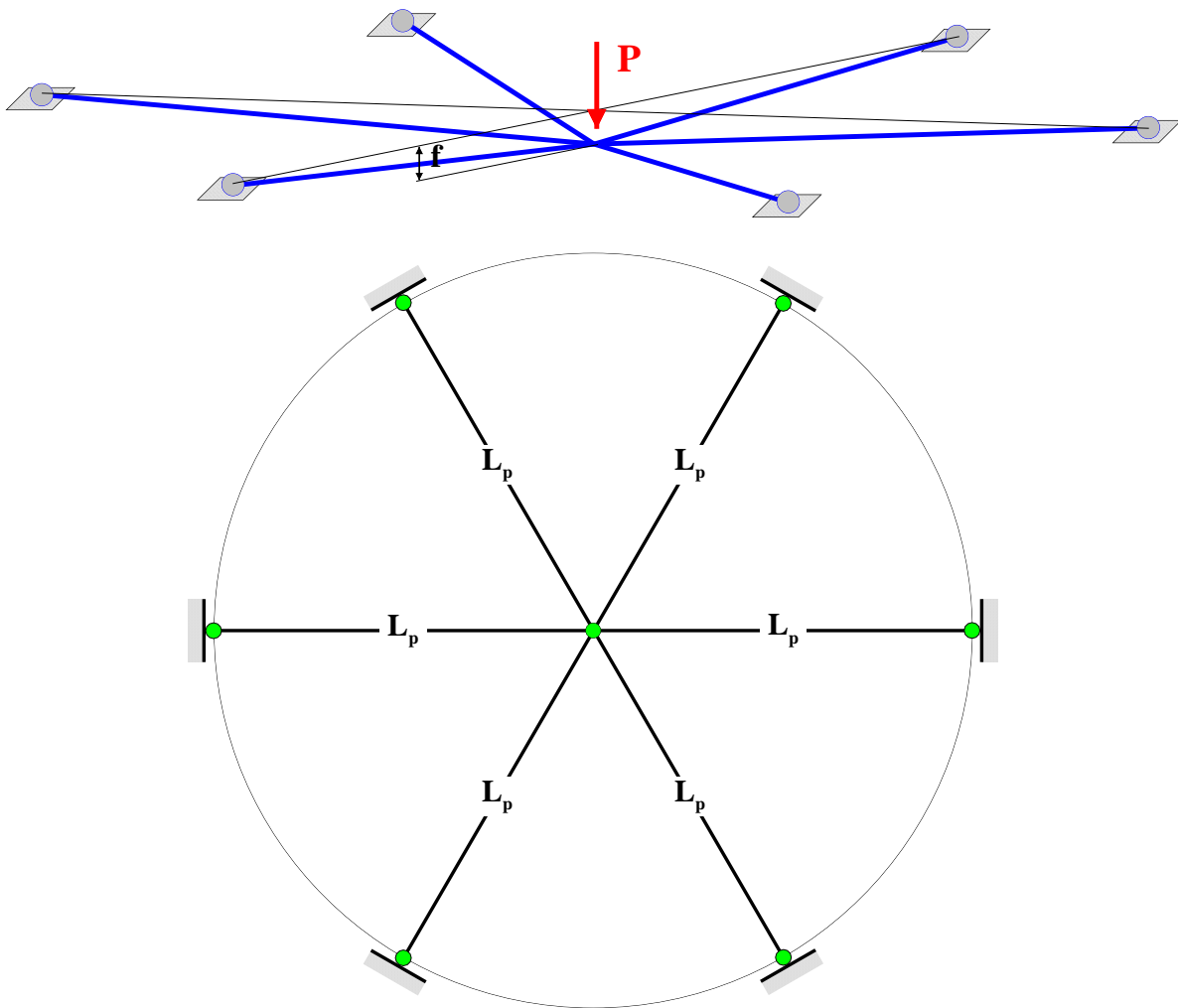


Bild 1: System und Belastung

Zahlenwerte: $L_p = 500.0 \text{ cm}$, $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, $A = 0.2 \text{ cm}^2$, $P_{ref} = 400 \text{ kN}$

2. Lineares Verhalten

Das System besitzt die Vertikalverschiebung des Lastangriffspunktes als einzigen Freiheitsgrad, da die Horizontalverschiebung infolge der Tragwerkssymmetrie null ist. Somit ergibt sich die lineare Steifigkeit der 6 Seile zu:

$$K_{lin} = 6 \frac{EA}{L} \sin^2 \varphi = 0.1805 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Damit ergibt sich eine Verschiebung nach linearer Theorie von

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.2

$$w_{\text{lin}} = \frac{P_{\text{ref}}}{K_{\text{lin}}} = 2216 \text{ cm.}$$

Diese Verschiebung ist unrealistisch hoch, da die lineare Steifigkeit aufgrund des kleinen Seildurchhangs extrem klein ist. Bei einem Durchhang von Null wäre die Steifigkeit Null und das System wäre unfähig, die Last aufzunehmen.

3. Nichtlineare Berechnung

Durch die Verformung wird der Winkel ϕ größer werden, und die Steifigkeit wächst durch die Anfangsverformungssteifigkeit an. Zusätzlich bildet sich eine geometrische Steifigkeit aus, die senkrecht zur Stabachse entsteht, also im unverformten Zustand nahezu in vertikaler Richtung, und die aufgrund der Zugkraft positiv ist. Das Seilnetz gewinnt also an Steifigkeit und wird deshalb ein versteifendes Systemverhalten zeigen.

Im Folgenden werden die Algorithmen hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften bei versteifender Systemcharakteristik überprüft.

3.1 Berechnung mit dem Newton/Raphson-Verfahren

Zunächst erfolgt die Lastaufbringung in einem Schritt bei einer Genauigkeitstoleranz von $\text{tol} = 10^{-3}$. Die Iteration konvergiert mit 6 Iterationen und erreicht eine Genauigkeit von $\varepsilon = 8.4 \cdot 10^{-4}$. Die Endverformung beträgt 134.4445 cm. Eine Reduktion der Toleranz um eine Zehnerpotenz fügt der Berechnung eine Iteration hinzu, wodurch sich die Endverformung marginal auf 134.4444 cm reduziert. In Tabelle 3.1.1 ist der Iterationsfortschritt dokumentiert. Man erkennt deutlich die quadratische Konvergenz in der Nähe der wahren Lösung, die sich mit der 4. Iteration einstellt. Das Tragwerk zeigt einen enormen Versteifungseffekt: die geometrisch nichtlineare Lösung beträgt nur 6.1 % der linearen Lösung. Der Newton/Raphson-Algorithmus zeigt sich als sehr robust, da er in der Lage ist, diese enorme Änderung innerhalb eines einzigen Lastschritts mit nur 6 Iterationen zu erreichen (die 7. Iteration hat das Ergebnis ja praktisch nicht geändert).

it	iterSearch	fakSearch	VnormIT	VnormGes	ε
0	--	--	2.22e+03	2.22e+03	1.00e+00
1	--	--	1.77e+03	4.49e+02	3.94e+00
2	--	--	2.00e+02	2.49e+02	8.03e-01
3	--	--	8.10e+01	1.68e+02	4.82e-01
4	--	--	2.88e+01	1.39e+02	2.07e-01
5	--	--	4.55e+00	1.35e+02	3.38e-02
6	--	--	1.13e-01	1.34e+02	8.40e-04
7	--	--	6.90e-05	1.34e+02	5.13e-07

Tabelle 3.1.1: Ergebnisse Newton/Raphson ohne line search

Die Zuschaltung eines line search mit Toleranz $\text{linetol} = 0.05$ reduziert die Iterationszahl bei Beibehaltung der Toleranz von $\text{tol} = 10^{-4}$ auf jetzt 3 Iterationen. Das Endergebnis ändert sich erwartungsgemäß nicht, da die erreichte Genauigkeit wie ohne line search im Bereich von $\varepsilon = 10^{-7}$ liegt. Die Konvergenzgeschichte ist in Tabelle 3.1.2 protokolliert.

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.2

it	iterSearch	fakSearch	VnormIT	VnormGes	ε
0	2	0.142	3.15e+02	3.15e+02	1.00e+00
1	2	1.497	1.79e+02	1.37e+02	1.31e+00
2	1	1.012	2.31e+00	1.34e+02	1.72e-02
3	1	1.000	3.05e-05	1.34e+02	2.27e-07

Tabelle 3.1.2: Ergebnisse Newton/Raphson mit line search

Man erhält einen Eindruck des Versteifungsverhaltens durch Erzeugung eines Last-Verformungs-Diagramms mit 40 Schritten, welches in Bild 3.1.1 wiedergegeben ist.

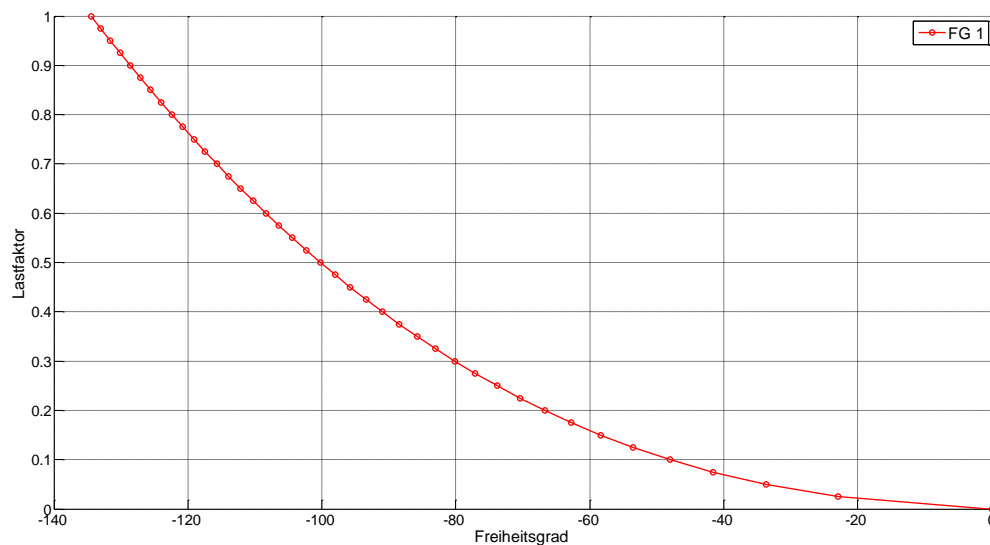


Bild 3.1.1: Last-Verformungs-Diagramm

Deutlich erkennbar ist die fast horizontale Tangente im Ausgangszustand, welche zu der extrem niedrigen linearen Steifigkeit korrespondiert.

3.2 Berechnung mit dem modifizierten Newton/Raphson-Verfahren

Der Versuch, die Last in einem Schritt aufzubringen, scheitert: die Iteration divergiert mit gegen unendlich wachsenden Verschiebungszuwächsen. Eine Reduktion des Lastinkrements liefert die nachstehenden Ergebnisse:

- $\Delta\lambda = 1.000$: Divergenz
- $\Delta\lambda = 0.100$: Divergenz
- $\Delta\lambda = 0.010$: keine Konvergenz: Oszillation
- $\Delta\lambda = 0.001$: Konvergenz
- $\Delta\lambda = 0.005$: Konvergenz
- $\Delta\lambda = 0.006$: keine Konvergenz: Oszillation

Man benötigt ein extrem kleines Lastinkrement am Anfang, um einen Gleichgewichtszustand zu finden. Als Folge werden 200 Schritte benötigt, um den Endlastfaktor von 1.0 zu erreichen. Das Ergebnis in Bild 3.2.1 ist dann im Rahmen der erreichten Genauigkeit identisch zum Ergebnis des nichtmodifizierten Verfahrens.

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.2

Offensichtlich büßt das modifizierte Verfahren, zumindest bei dem vorliegenden versteifenden System, an Robustheit ein. Während das Standardverfahren immer konvergiert, hängt jetzt der Erfolg der Iteration vom Benutzer ab, der ein „vernünftiges“ Lastinkrement wählen muss.

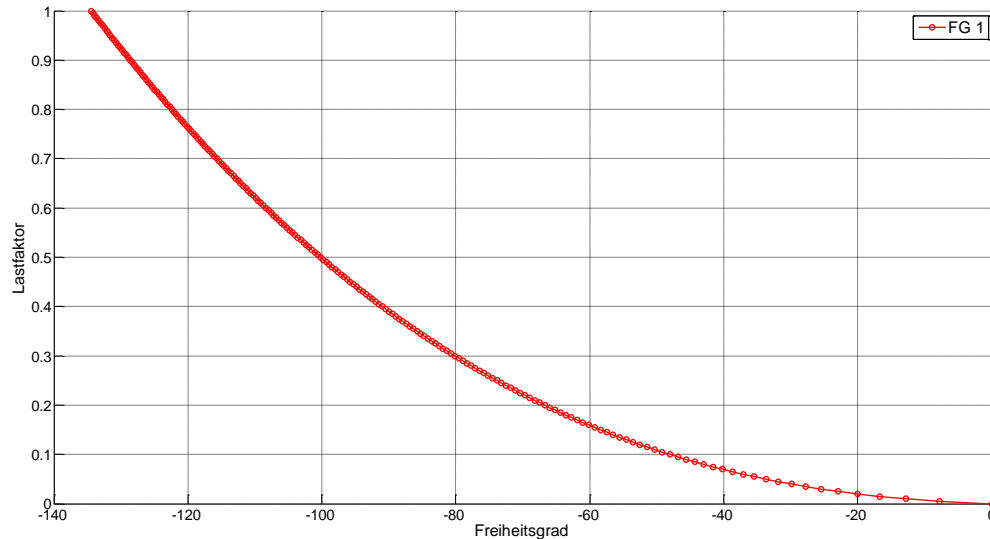


Bild 3.2.1: Last-Verformungs-Diagramm

Die extrem kleinen Lastinkremente sind aber nur am Anfang notwendig. In Bild 3.2.1 sind die benötigten Iterationen gegenüber den Lastschritten geplottet. Im 1. kritischen Schritt werden 68 Iterationen benötigt, danach nur noch 8, danach 4. Am Ende ergibt sich Konvergenz bereits in der 1. Iteration.

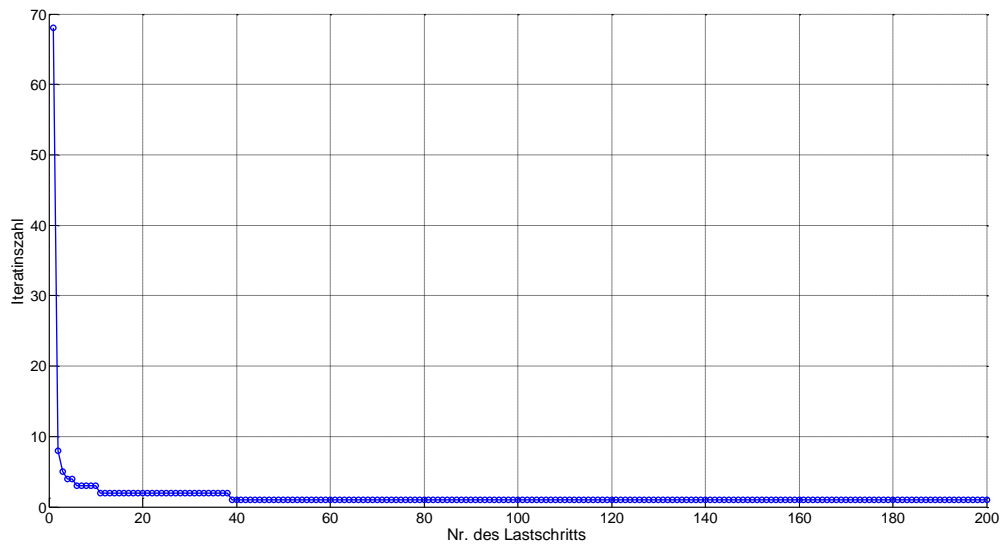


Bild 3.2.2: Benötigte Iterationszahlen

Zur Erzielung einer optimalen Rechenzeit wäre eine automatische Schrittweitensteuerung sinnvoll, die bei Nichtkonvergenz oder exzessiv vielen Iterationen die Lastinkremente selbstständig verkleinert und nach Überwindung der „schwierigen“ Bereiche wieder eine Vergrößerung der Lastinkremente vornimmt

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.2

Die Zuschaltung eines line search stabilisiert das Verfahren beträchtlich. Es ergeben sich Skalierungsfaktoren kleiner als 1, die das effektiv benutzte Verschiebungskrement so reduzieren, dass man sich ausreichend nah an der wahren Lösung befindet, so dass sich Konvergenz einstellt. Durch numerische Experimente ergab sich ein Maximalinkrement von etwa 0.1, so dass die ganze Kurve mit 10 Schritten abgearbeitet werden konnte.

3.2 Berechnung mit dem Quasi-Newton-Verfahren

Das Quasi-Newton-Verfahren aktualisiert die Steifigkeitsmatrix in jeder Iteration. Die daraus resultierende Matrix ist nicht ganz so gut wie die exakte tangentielle Matrix, aber ausreichend gut, so dass das Verfahren ohne Schwierigkeiten mit 13 Iterationen (anstatt von 7 Iterationen beim Newton/Raphson) den korrekten Gleichgewichtszustand für die Gesamtlast findet.

Die Zuschaltung eines line search reduziert die Iterationszahl auf 5

3.3 Berechnung mit dem Bogenlängen-Verfahren

An diesem Beispiel kann man gut den Einfluss der relativen Größen von Lastfaktor und Verschiebung studieren. Bei dem versteifenden System führt die Iteration auf der Senkrechten zu einer Vergrößerung des Lastniveaus, da die Lastkorrekturen positiv sind. Bei Aufbringung des vollen Lastinkrements wird der Lastfaktor von $\lambda = 1.0$ auf $\lambda = 221.043360$ vergrößert. Die zugehörige Verformung von $w = 2216.4017$ liegt zwar auf der Kurve, ist aber unbrauchbar, da der interessante Teil des Last-Verformungs-Diagramms übersprungen wurde. Interessanterweise findet das Bogenlängenverfahren diesen Punkt mit nur einer einzigen Iteration, während der Newton/Raphson für exakt den gleichen Punkt 31 Iterationen benötigt.

Eine erste vernünftige Kurve erhält man mit $\Delta\lambda = 0.01$. Insgesamt wird die Kurve bei einer Lastobergrenze von $\lambda_{\max} = 1.2$ mit 6 Schritten abgefahren. Bild 3.3.1 zeigt das resultierende Last-Verformungs-Diagramm.

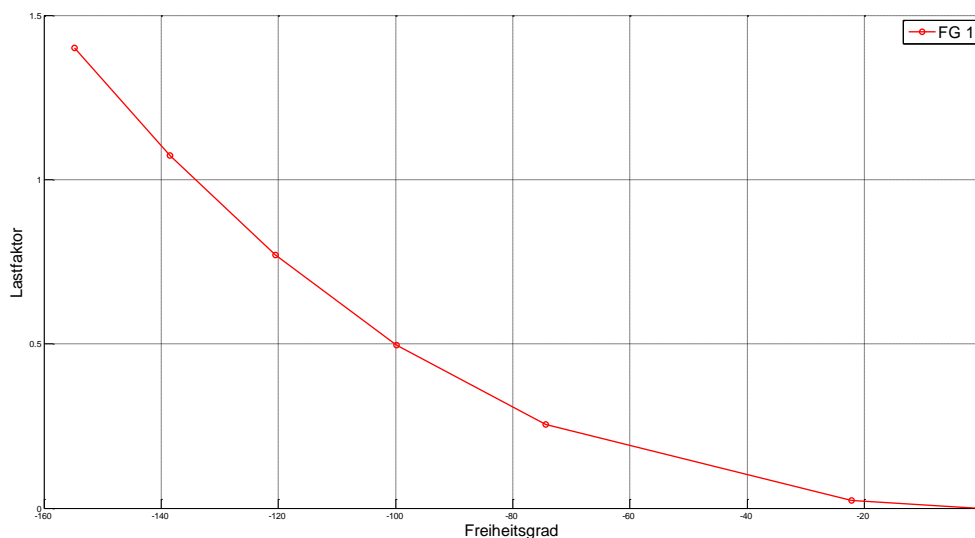


Bild 3.3.1: Last-Verformungsdiagramm für $P_{\text{ref}} = 400$

Der Lastfaktor liegt im Bereich von 1, während die Verformung im Bereich von 100 liegt. Damit wird die Bogenlänge von w dominiert und es liegt im Wesentlichen eine Wegsteuerung vor. Bild 3.3.1 bestätigt das auch: bis auf den Anfang des Diagramms werden praktisch gleiche Abstände auf der Verformungsachse abgetragen.

FEM III: Nichtlineare Probleme – Algorithmen – Beispiel 4.2

Eine Reduktion der Referenzlast um den Faktor 100 führt zum Diagramm in Bild 3.3.2. Es ist nicht so, dass man die gleiche Kurve erhält nur mit einer um den Faktor 100 vergrößerten Lastachse. Jetzt besitzen w und λ die gleiche Größenordnung und der Algorithmus versucht, gleiche Längen auf der Kurve abzutragen. Das führt zu einer kombinierten Kraft-Weg-Steuerung, die die Kurve mit 8 Schritten abfährt.

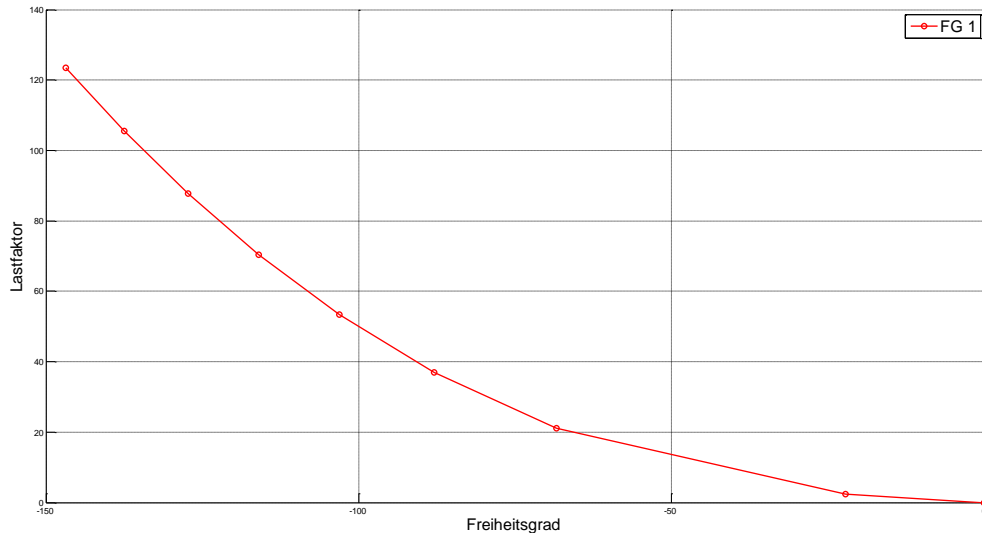


Bild 3.3.2: Last-Verformungsdiagramm für $P_{\text{ref}} = 4$

Eine weitere Reduktion der Referenzlast um eine Größenordnung führt zu einer Kraftsteuerung: der Algorithmus trägt jetzt nahezu konstante Inkremente auf der Lastachse ab. Da infolge der geringen Anfangssteifigkeit das erste Lastinkrement trotz recht großer Verschiebung sehr klein war, werden jetzt viele Schritte für die gesamte Kurve verwendet und man erhält eine gute Abbildung der Kurve (vgl. Bild 3.3.3).

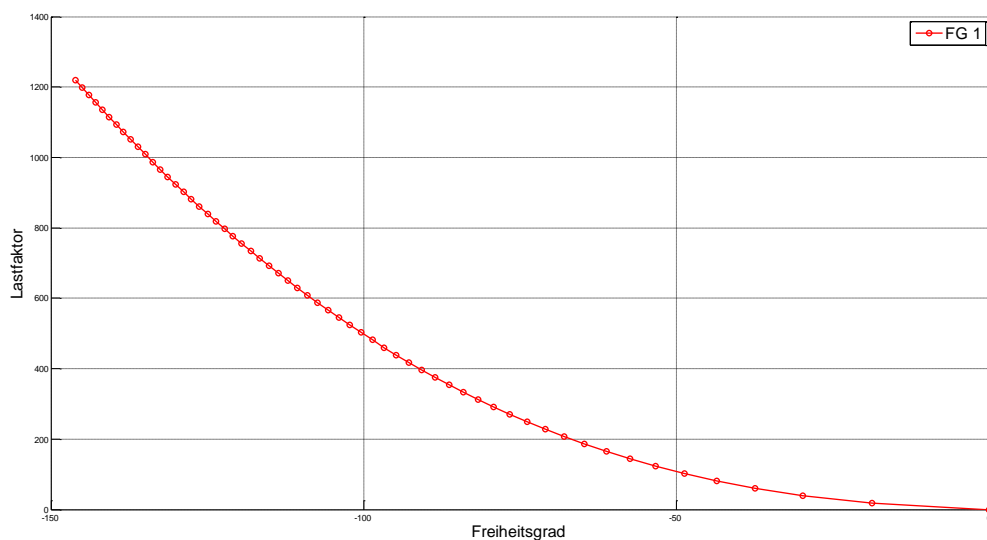


Bild 3.3.3: Last-Verformungsdiagramm für $P_{\text{ref}} = 0.4$

Im Gegensatz zu den Newton-Verfahren kommt also der Wahl der Referenzlast bzw. der Wahl der Systemeinheiten (die Verwendung von mm anstatt von m hat den gleichen Effekt wie eine Vergrößerung der Referenzlast) eine gewisse Bedeutung zu.