

Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

Vorlesung 3

Der geometrisch nichtlineare Fachwerkstab



menum

Überblick

Wir haben in dem vorangegangenen Vorlesungsblock die allgemeine Vorgehensweise bei der Herleitung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Elemente kennengelernt. Diese Herleitung war infolge ihrer Allgemeingültigkeit für alle denkbaren Elementtypen notwendigerweise sehr abstrakt und damit zumindest in Teilen auch schwer verständlich geblieben.

In der vorliegenden Vorlesung wollen wir das allgemeine Konzept auf den einfachst denkbaren Elementtyp anwenden: den ebenen Fachwerkstab. Hierbei wollen wir sowohl die totale wie auch die mitgehende LAGRANGESche Formulierung verwenden.

Ausgangspunkt wird aber zunächst die Formulierung von nichtlinearen kinematischen Gleichungen sein, die in der Lage sind, beliebig große Vorformungen in der Ebene korrekt zu beschreiben.



menum

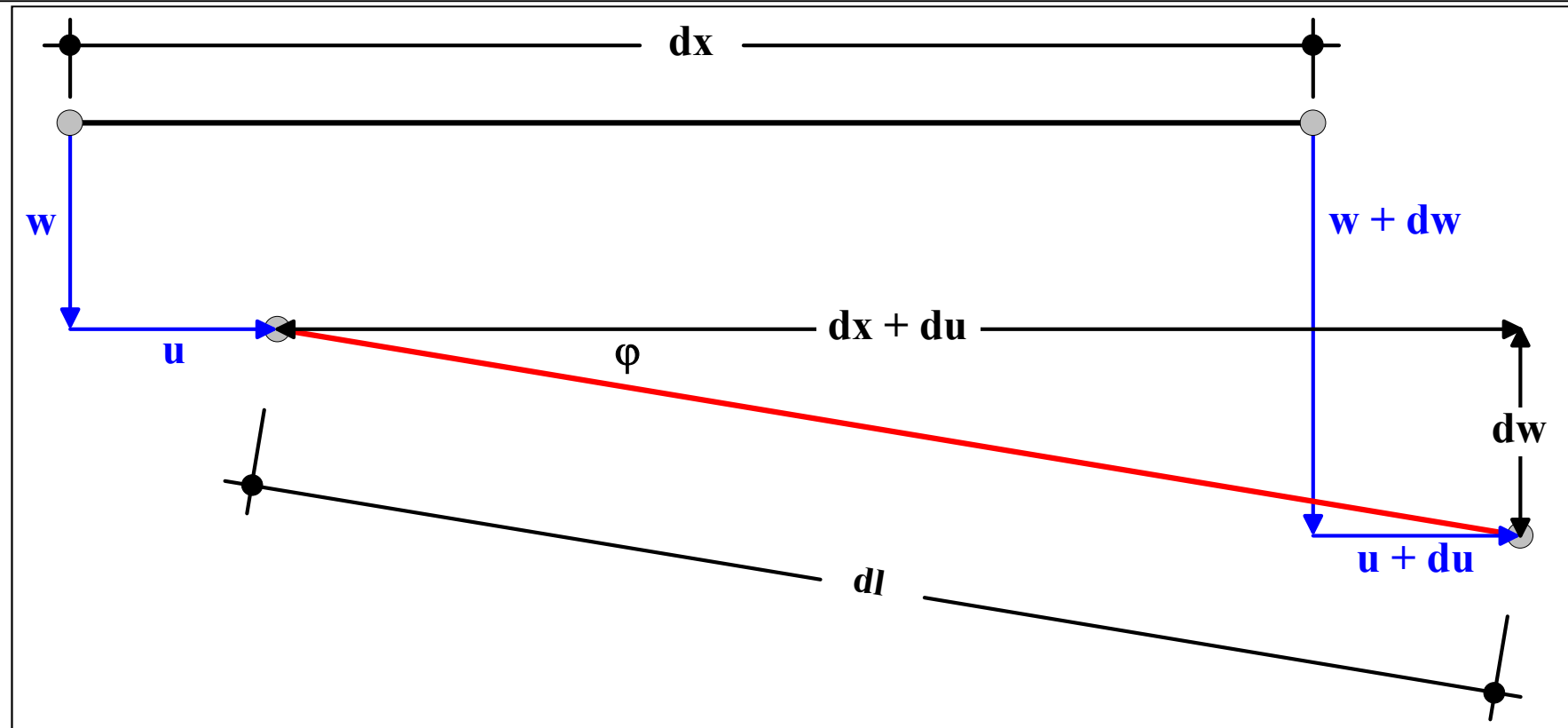
Nichtlineare Kinematik



menum

Kinematik: Verformtes Element

Startpunkt der Herleitung *exakter kinematischer Beziehungen* bildet stets ein *differentielles Element*, welches in *unverformter* und *verformter Konfiguration* betrachtet wird. Der Fachwerkstab ist besonders einfach, da das Element auch in der verformten Konfiguration gerade bleibt.



menum

Kinematik: Verformungseigenschaften

Das verformte Element erleidet gegenüber seiner unverformten Konfiguration zwei Änderungen:

- es ändert seine Ursprungslänge von dx zu dl ,
- es dreht sich gegenüber seiner Ausgangslage um den Winkel φ .

Längen- und Winkeländerung können mit elementaren Mitteln der ebenen Geometrie bestimmt werden.

Länge des verformten Elements

$$dl^2 = (dx + du)^2 + dw^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dl^2}{dx^2} = \left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad \rightarrow \quad dl = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} dx$$

Verdrehung des Elements

$$\sin \varphi = \frac{dw}{dl} = \frac{w'}{\sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}} \quad \cos \varphi = \frac{dx + du}{dl} = \frac{1 + u'}{\sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}}$$



menum

Kinematik: Verzerrungszustand

Die Gesamtverformung setzt sich immer zusammen aus einer *Starrkörperverformung* und einer *schnittgrößenerzeugenden, elastischen Verformung*, die zu *Verzerrungen* führt. Oftmals bleiben bei praktischen Problemen die Verzerrungen trotz beliebig großer Verschiebungen bzw. Verdrehungen klein, da bei den typischen Baumaterialien Beton und Stahl die Größe der zulässigen Verzerrungen limitiert ist (beispielsweise: die max. zulässige Betonstauchung beträgt 0.35 %).

Zunächst erhebt sich die Frage, wie Verzerrungen überhaupt definiert werden sollen. Hier unterscheidet man Theorien *großer Verzerrungen* und Theorien *kleiner Verzerrungen*. Unabhängig von deren Größe muss gelten, dass die Verzerrungsdefinition für den Sonderfall beliebig großer Starrkörperbewegungen exakt Nullverzerrungen liefern muss.

Für den Fachwerkstab kann die *klassische Ingenieurdehnung* verwendet werden. Eine vergleichbare Definition gibt es bei mehrdimensionalen Problemen nicht – hier kommen zumeist Verzerrungen nach *GREEN-LAGRANGE* zum Einsatz.

Ingenieurdehnung: Definition

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_V - L_0}{L_0}$$



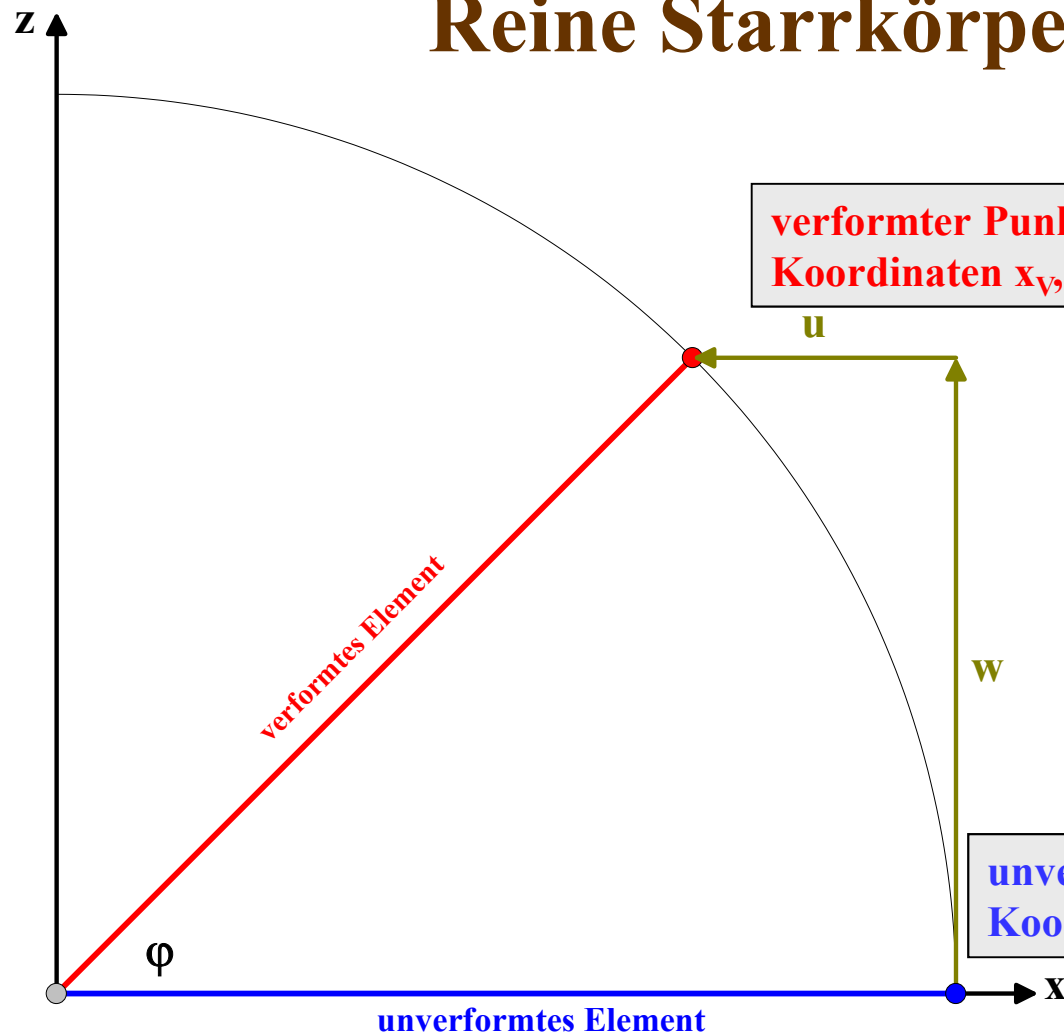
Ingenieurdehnung: Fachwerkstab

$$\varepsilon = \frac{dl - dx}{dx} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1$$



menum

Kontrolle der Starrkörperbewegungen I: Reine Starrkörperrotation



Verformungszustand

$$u = x_v - x_0 = x(\cos \varphi - 1)$$



$$u' = \cos \varphi - 1$$

$$w = z_v - z_0 = x \sin \varphi$$



$$w' = \sin \varphi$$

unverformter Punkt:
Koordinaten $x_0 = x, z_0 = 0$

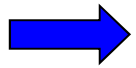


menum

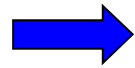
Kontrolle der Starrkörperbewegungen: Ingenieurdehnung

1. Lineare Theorie

$$\varepsilon_{\text{lin}} = u'$$



$$\varepsilon_{\text{lin}} = \cos \varphi - 1$$



$$\varepsilon_{\text{lin}} \neq 0$$

Die lineare Theorie kann nur für kleine Winkel ($\cos \varphi \approx 1$) die Starrkörperrotation ausreichend genau abbilden.

2. Nichtlineare Theorie, Ingenieurdehnung

$$\varepsilon_{\text{ing}} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1$$



$$\varepsilon_{\text{ing}} = \sqrt{(1 + \cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi} - 1$$



$$\varepsilon_{\text{ing}} = 0$$

Die lineare Theorie ist offensichtlich nicht in der Lage, Starrkörperbewegungen korrekt abzubilden. Es ergibt sich trotz der reinen Starrkörperrotation eine Dehnung ungleich Null. Nur im trivialen unverformten Zustand ergibt sich die richtige Lösung. Die exakte nichtlineare Kinematik hingegen liefert für beliebig große Rotationswinkel die korrekte Nulldehnung.



menum

Kontrolle der Starrkörperbewegungen: GREEN-LAGRANGESche Verzerrung

3. Nichtlineare Theorie, GREEN-LAGRANGESche Verzerrung

Das GREEN-LAGRANGESche Verzerrungsmaß ergibt sich aus kontinuumsmechanischen Überlegungen und ist definiert als die halbe Differenz der Metriktensoren der verformten und unverformten Konfiguration. Für den einaxialen Fall ergibt sich die unten stehende Darstellung. Das Verzerrungsmaß entzieht sich einer unmittelbaren anschaulichen Deutung.

$$\varepsilon_{\text{GL}} = \varepsilon_{\text{ing}} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{ing}}^2 = u' + \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2)$$



$$\varepsilon_{\text{GL}} = (\cos \varphi - 1) + \frac{1}{2} ((\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi) \Rightarrow \varepsilon_{\text{GL}} = 0$$

Auch das anders als die Ingenieurdehnung definierte Verzerrungsmaß von GREEN-LAGRANGE kann die Starrkörperrotation korrekt abbilden.



Kinematik: Inkrementierung I

Nach Ableitung der nichtlinearen Kinematik wird diese als Nächstes in eine inkrementelle Form überführt, um in diese dann Ansätze einsetzen zu können. Die Dehnung hängt von den Ableitungen u' und w' der beiden Verschiebungskomponenten ab.

Dehnung

$$\varepsilon = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1$$

1. Partielle Ableitungen der Dehnung nach den unabhängigen Verschiebungsgrößen

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u'} = \frac{1 \cdot 2(1 + u')}{2\sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w'} = \frac{1 \cdot 2w'}{2\sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}} = \sin \varphi$$

Inkrementelle Verzerrung – linearer Anteil

$${}^+ \varepsilon = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial u'} \right|_{u'=\bar{u}'} ({}^+ \bar{u})' + \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial w'} \right|_{w'=\bar{w}'} ({}^+ \bar{w})' = \cos \bar{\varphi} \cdot ({}^+ \bar{u})' + \sin \bar{\varphi} \cdot ({}^+ \bar{w})'$$



Kinematik: Inkrementierung II

2. Partielle Ableitungen der Dehnung nach den unabhängigen Verschiebungsgrößen

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u' \partial u'} = \frac{w'^2}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}^3} = \sin^2 \varphi \cdot \frac{L_0}{L_V}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial w' \partial w'} = \frac{(1+u')^2}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}^3} = \cos^2 \varphi \cdot \frac{L_0}{L_V}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u' \partial w'} = -\frac{(1+u')w'}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}^3} = -\sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{L_0}{L_V}$$

$$\frac{L_V}{L_0} = 1 + \varepsilon = \sqrt{(1+u')^2 + w'^2}$$

$$\varepsilon = \frac{L_V - L_0}{L_0}$$

Längenverhältnis

Inkrementelle Verzerrung – quadratischer Anteil

$$2 \varepsilon^{++} = \begin{bmatrix} (u')^+ & (w')^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin^2 \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \\ -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u')^+ \\ (w')^+ \end{bmatrix}$$



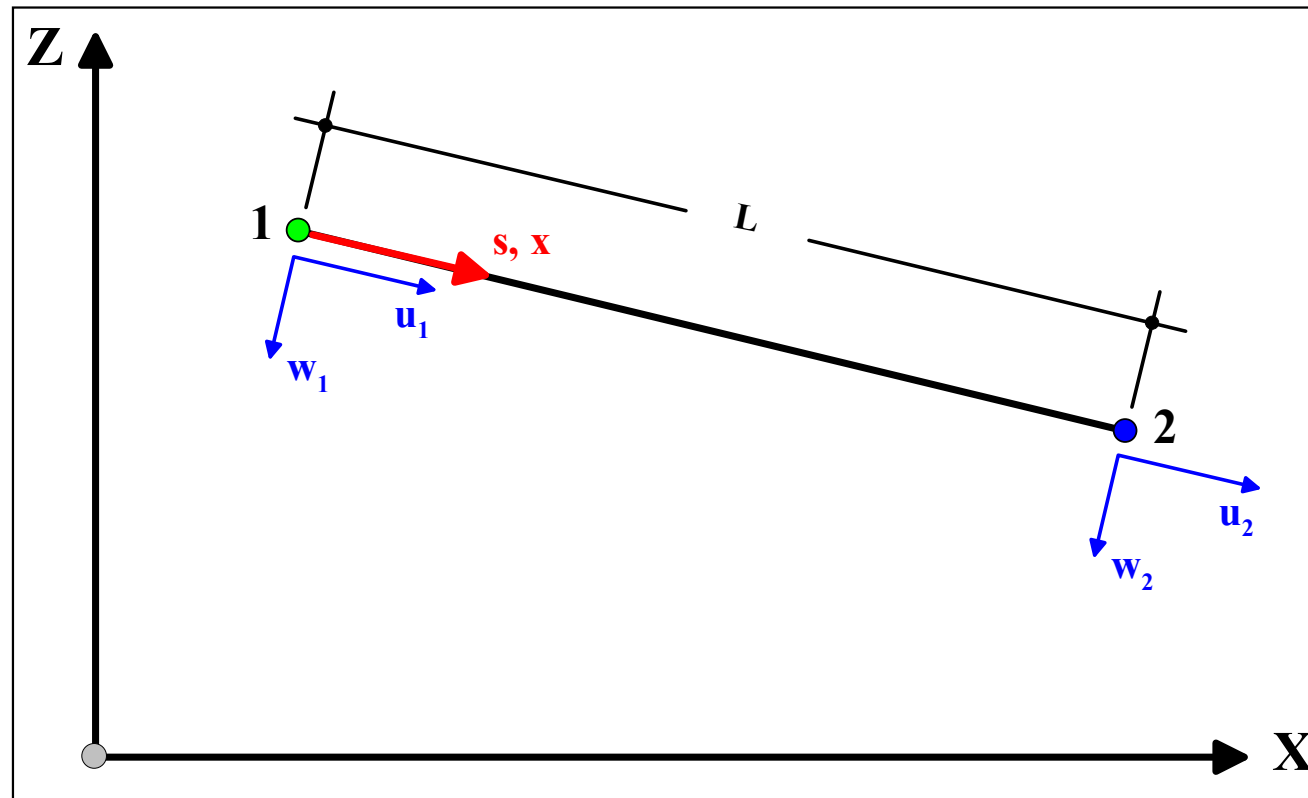
menum

Total- LAGRANGEsche Formulierung



menum

Diskretisierung: Element mit Freiheitsgraden



Lokal besitzt das Element jeweils die Verschiebungen parallel und senkrecht zur Stabachse als Freiheitsgrade. Im Linearen wurde w nicht diskretisiert, da w in der linearen Kinematik nicht auftaucht und somit nur Starrkörperbewegungen verursacht.



menum

Formfunktionen

Wir können die aus der linearen FEM bekannten linearen Formfunktionen für den Fachwerkstab einfach abschreiben! Die Formfunktionen gelten gleichermaßen für die Grundzustandsverschiebungen wie auch für die inkrementellen Verschiebungen.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$



JACOBI-Transformation



$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$



menum

B⁺-Matrix

Inkrementelle Verzerrung

$${}^+ \varepsilon = \cos \bar{\varphi} \cdot ({}^+ \mathbf{u})' + \sin \bar{\varphi} \cdot ({}^+ \mathbf{w})'$$



$${}^+ \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} {}^+ \mathbf{u}' \\ {}^+ \mathbf{w}' \end{bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}$$



$${}^+ \varepsilon = \mathbf{B}^+ \mathbf{v} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -\cos \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} & \sin \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^+ \mathbf{u}_1 \\ {}^+ \mathbf{w}_1 \\ {}^+ \mathbf{u}_2 \\ {}^+ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}$$



menum

Vektor der inneren Kräfte: Berechnung

Allgemeine Beziehung

$$\mathbf{f}_i = \int_{L_0}^1 (\mathbf{B}^+)^T \bar{\mathbf{N}} dx = \int_0^1 (\mathbf{B}^+)^T \bar{\mathbf{N}} L_0 ds$$

$$\mathbf{f}_i = \int_0^1 \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -\cos \bar{\varphi} \\ -\sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \\ \sin \bar{\varphi} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} L_0 ds$$

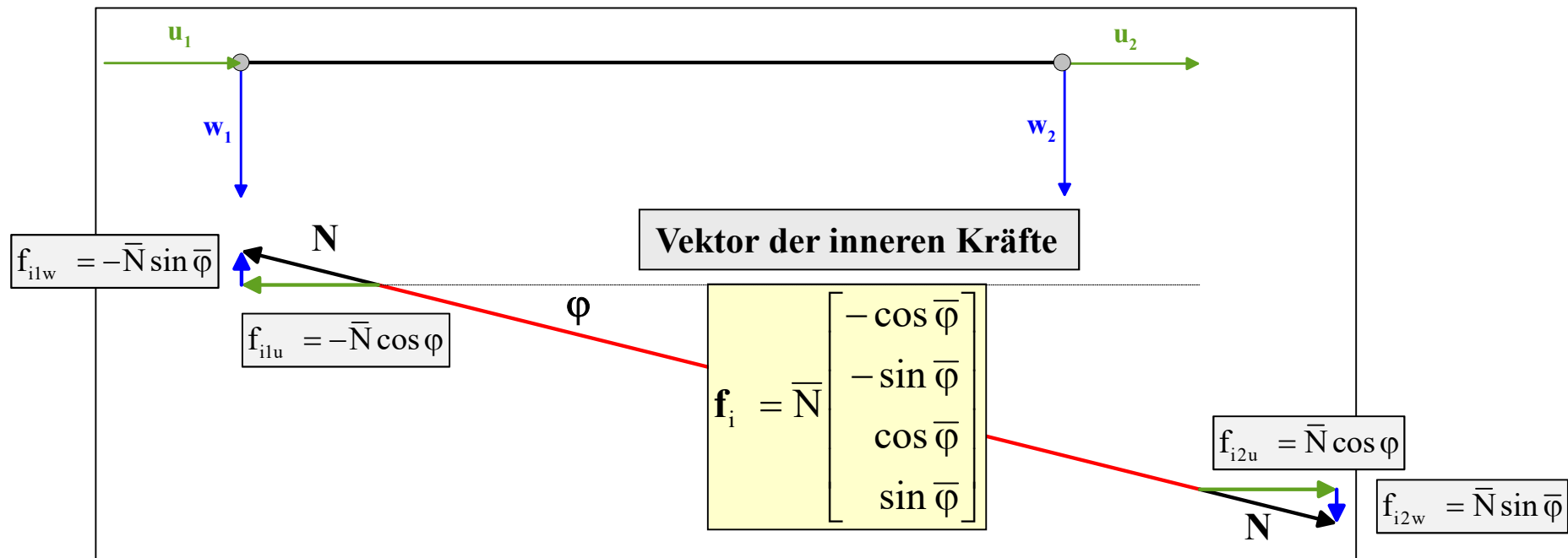
$$\mathbf{f}_i = \bar{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} -\cos \bar{\varphi} \\ -\sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \\ \sin \bar{\varphi} \end{bmatrix}$$



menum

Vektor der inneren Kräfte: Kontrolle

Die Normalkraft wirkt in Richtung des verformten Elements. Der Vektor der inneren Kräfte enthält diejenigen Knotenkräfte, die aus N resultieren. Bei einer total-Lagrangeschen Formulierung weisen diese Knotenkräfte in Richtung der ursprünglichen lokalen Elementgeometrie. Der Einfachheit halber betrachten wir wie bei der Ableitung der Kinematik ein horizontales Element.



Nichtlineare Steifigkeitsmatrix

Allgemeine Beziehung

$$\mathbf{k}_{\text{NL}} = \int_{L_0}^1 (\mathbf{B}^+)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^+ dx = \int_0^1 (\mathbf{B}^+)^T \mathbf{E} \mathbf{B}^+ L_0 ds$$

$$\mathbf{k}_{\text{NL}} = \int_0^1 \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -\cos \bar{\varphi} \\ -\sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \\ \sin \bar{\varphi} \end{bmatrix} EA \frac{1}{L_0} [-\cos \bar{\varphi} \quad -\sin \bar{\varphi} \quad \cos \bar{\varphi} \quad \sin \bar{\varphi}] L_0 ds$$

$$\mathbf{k}_{\text{NL}} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \cos^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\cos^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \sin^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\sin^2 \bar{\varphi} \\ -\cos^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\sin^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \sin^2 \bar{\varphi} \end{bmatrix}$$



menum

B⁺⁺-Matrix

Inkrementelle Verzerrung

$$2 \overset{++}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \overset{+}{(u)'} & \overset{+}{(w)'} \end{bmatrix} \frac{L_0}{L_v} \left[\begin{array}{c|c} \sin^2 \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \\ \hline -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \overset{+}{(u)'} \\ \overset{+}{(w)'} \end{bmatrix}$$



$$\overset{+}{\mathbf{u}'} = \begin{bmatrix} \overset{+}{u'} \\ \overset{+}{w'} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$



$$2 \overset{++}{\mathbf{B}} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{L_0}{L_v} \left[\begin{array}{c|c} \sin^2 \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \\ \hline -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} \end{array} \right] \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



menum

Geometrische Steifigkeitsmatrix

Allgemeine Beziehung

$$\mathbf{k}_\sigma = \mathbf{k}_g = \int_{L_0} ((\mathbf{B}^{++})^T + \mathbf{B}^{++}) \bar{N} dx = \int_0^1 ((\mathbf{B}^{++})^T + \mathbf{B}^{++}) \bar{N} L_0 ds$$



$$\mathbf{k}_g = \int_{-1}^1 \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{L_0}{L_v} \left[\begin{array}{c|c} \sin^2 \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \\ \hline -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} \end{array} \right] \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{N} L_0 ds$$



$$\mathbf{k}_g = \frac{\bar{N}}{L_v} \begin{bmatrix} \sin^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\sin^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\cos^2 \bar{\varphi} \\ -\sin^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \sin^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\cos^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} \end{bmatrix}$$



menum

Lokale und globale Freiheitsgrade I

Für das in der Ebene X/Z liegende Fachwerkelement können wir zwei Konfigurationen unterscheiden:

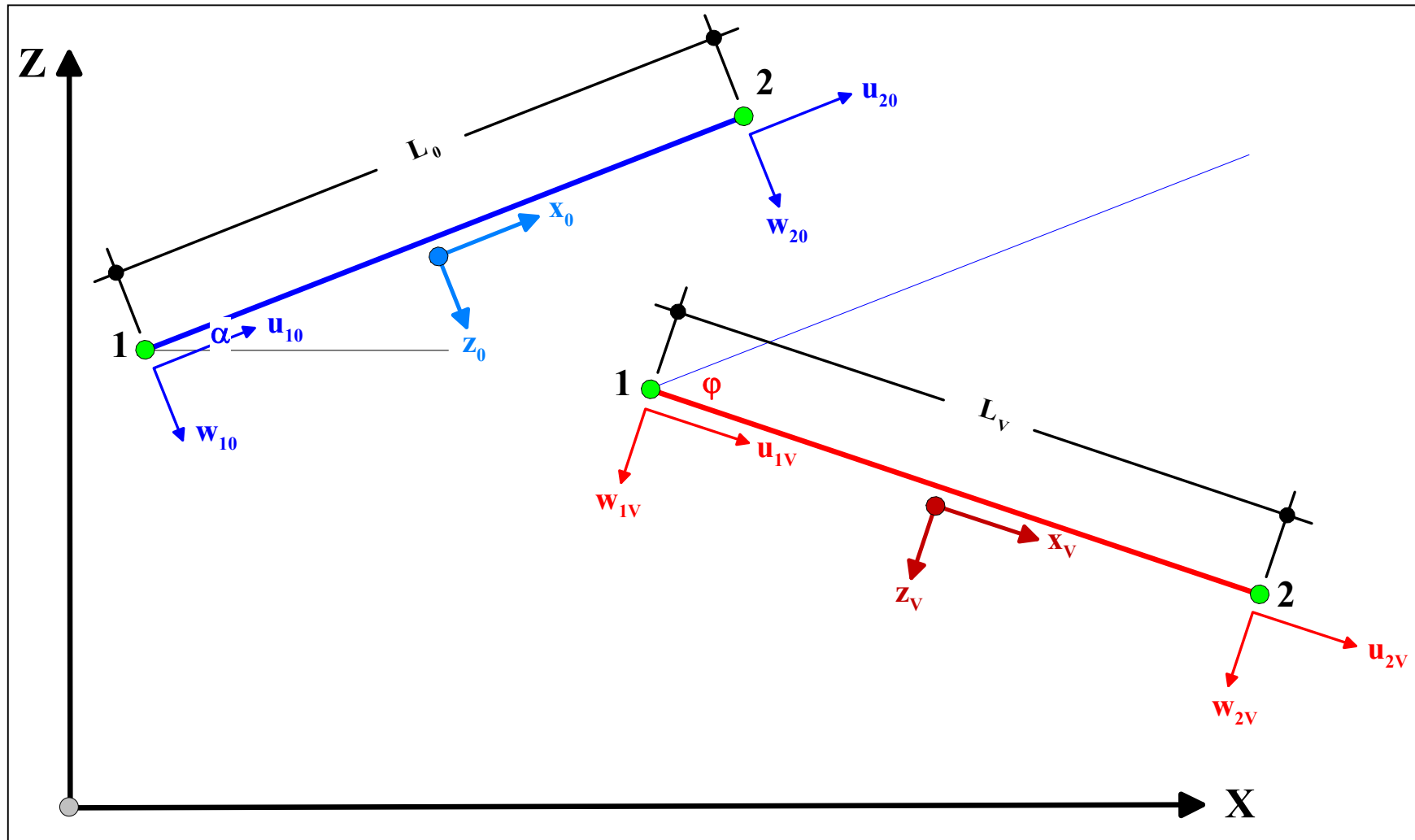
A) Die *unverformte Konfiguration*, in der das Element seine *Ausgangslänge* L_0 besitzt und gegenüber der globalen X-Achse um den Winkel α geneigt ist. L_0 und α ergeben sich unmittelbar aus der Diskretisierung. In der unverformten Konfiguration verfügen die Knoten über die Freiheitsgrade $u_{10}, w_{10}, u_{20}, w_{20}$, die hinsichtlich des bzgl. der *unverformten Stabachse* definierten Koordinatensystems x_0/z_0 definiert sind.

b) Die *verformte Konfiguration* mit der *verformten Elementlänge* L_V . Das verformte Element ist gegenüber dem unverformten um den Winkel φ verdreht. In der verformten Konfiguration verfügen die Knoten über die Freiheitsgrade $u_{1V}, w_{1V}, u_{2V}, w_{2V}$, die hinsichtlich des bzgl. der *verformten Stabachse* definierten Koordinatensystems x_V/z_V definiert sind.

Die Elementmatrizen der *Total-LAGRANGESchen Formulierung* beschreiben die Eigenschaften des *verformten Elements*, jedoch ausgedrückt in den *Freiheitsgraden des unverformten Elements*. Für die direkte Steifigkeitsmethode müssen diese in *globale Freiheitsgrade* U_x, U_z transformiert werden. Die Transformationsvorschrift ist identisch zu derjenigen des linearen Elements, da dessen lokale Freiheitsgrade ebenfalls in Richtung des unverformten Elements zeigen.

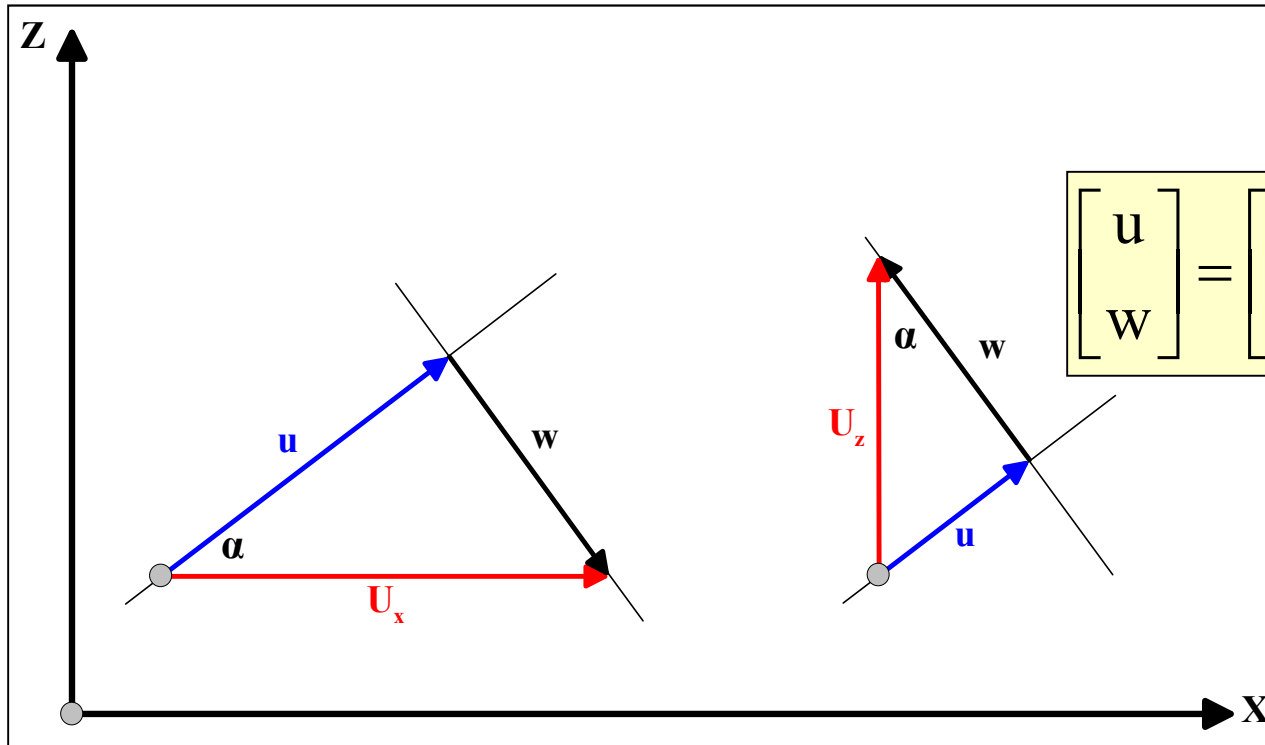


Lokale und globale Freiheitsgrade II



menum

Transformation auf globale Freiheitsgrade I: Komponentenzerlegung



$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_z \end{bmatrix}$$

Der Stab wird in ein globales X/Z-System eingebettet, bzgl. dessen die Systemfreiheitsgrade U_x und U_z definiert sind.



Transformation auf globale Freiheitsgrade II.

Transformation

Da der Stab gerade ist, gelten für beide Knoten die gleichen Transformationsregeln:

$$\mathbf{v}_{\text{lok}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_{\text{glob}}$$

$$\begin{bmatrix} u_{10} \\ w_{10} \\ u_{20} \\ w_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{z1} \\ U_{x2} \\ U_{z2} \end{bmatrix}$$

Die Transformation folgt den üblichen Regeln der FEM:

$$\mathbf{k}_{T,\text{glob}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_{T,\text{lok}} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{f}_{i,\text{glob}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_{i,\text{lok}}$$

$$\mathbf{k}_{g,\text{glob}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_{g,\text{lok}} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{k}_{NL,\text{glob}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_{NL,\text{lok}} \cdot \mathbf{T}$$



menum

Nichtlineare Kinematik

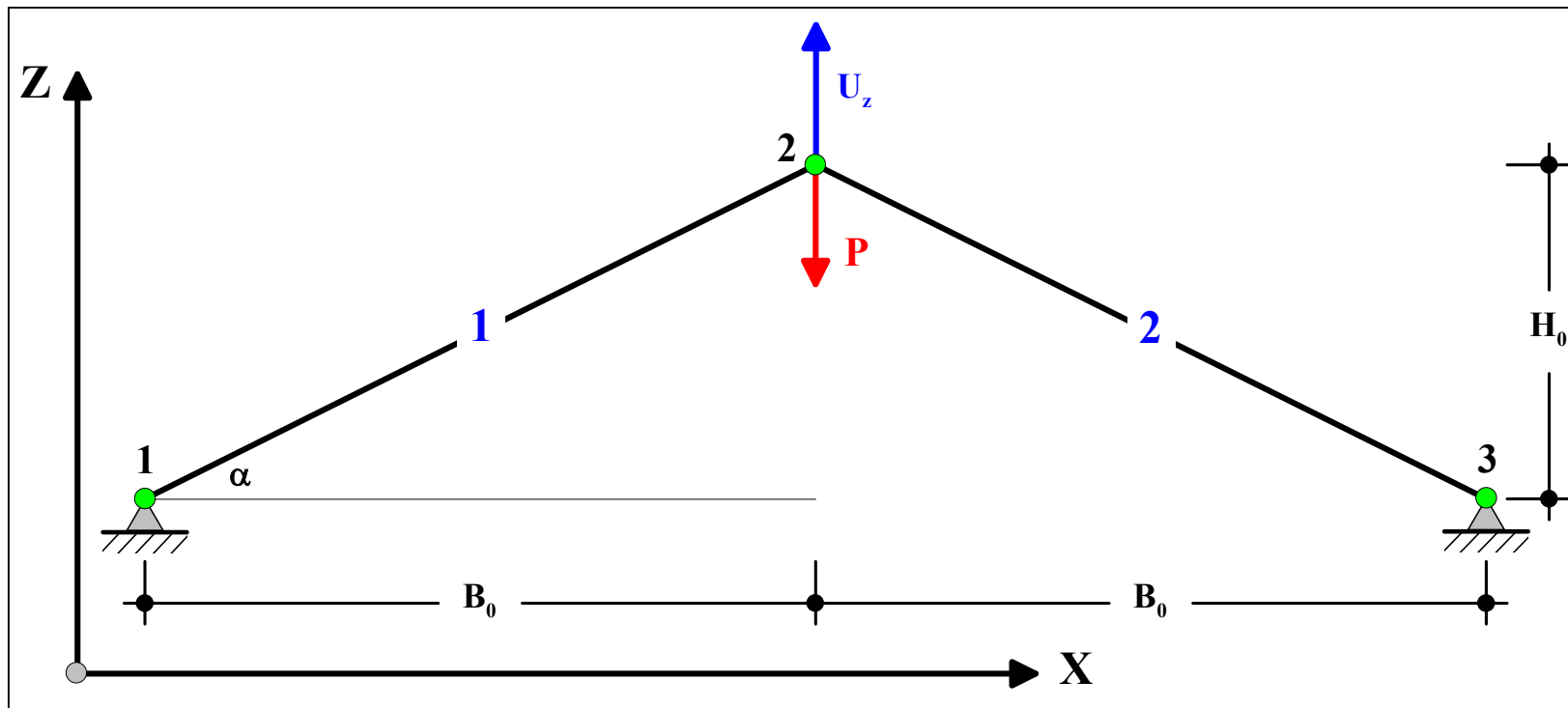
=

Gleichgewicht am verformten System?



menum

Ist die Verwendung einer nichtlinearen Kinematik wirklich äquivalent zu Gleichgewicht am verformten System?



menum

Rückgriff auf Vorlesung 1: Gleichgewicht am verformten Tragwerk

In Vorlesung 1 „Einführung“ haben wir *Gleichgewicht am verformten System* gebildet, wobei wir eine *exakte Kinematik* für *beliebig große Verschiebungen/Rotationen* verwendet haben. Als Ergebnis erhielten wir eine *nichtlineare Gleichung* für die Systemverformung w . Aus dieser konnten wir den *Vektor der inneren Kräfte* und die zugehörige *tangentiale Steifigkeit* ableiten.

Gleichgewichtsbedingung am verformten System

$$F_{i,\text{ansch}} = 2EAH_v \left\{ \frac{1}{L_v} - \frac{1}{L_0} \right\} \leftarrow 2EAH_v \left\{ \frac{1}{L_v} - \frac{1}{L_0} \right\} = P \rightarrow K_{T,\text{ansch}} = \frac{dF_i}{dw} = 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_v} + \frac{H_v^2}{L_v^3} \right\}$$

Wenn die Verwendung einer *nichtlinearen Kinematik* inhaltsgleich ist zum *Gleichgewicht am verformten System*, müssen die Gleichungen der Vorlesung 1 identisch zu denen aus der FE-Berechnung des Fachwerksbocks sein. Hierfür ist es notwendig, die lokalen Matrizen auf globale Freiheitsgrade zu transformieren. Relevant ist nur der globale Elementfreiheitsgrad 4 (U_z am Elementknoten 2), da die restlichen Freiheitsgrade durch Lager- oder Symmetriebedingungen behindert sind.



menum

Transformation der nichtlinearen Matrix

$$\mathbf{k}_{NL, glob} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_{NL, lok} \cdot \mathbf{T}$$



$$\frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & -\cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi \\ -\cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \\ \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \\ \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \\ \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{NL11} & k_{NL12} & k_{NL13} & k_{NL14} \\ k_{NL21} & k_{NL22} & k_{NL23} & k_{NL24} \\ k_{NL31} & k_{NL32} & k_{NL33} & k_{NL34} \\ k_{NL41} & k_{NL42} & k_{NL43} & k_{NL44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{NL, glob, 44} &= \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi \\ &= (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi)^2 \\ &= (\sin(\alpha - \varphi))^2 = \sin^2 \alpha_V \end{aligned}$$



$$k_{NL, glob, 44} = \frac{EA}{L_0} \sin^2 \alpha_V$$

Diese Steifigkeit ist identisch zu derjenigen eines Elementes der Länge L_0 , welches um den Winkel α_V gegenüber der globalen x-Achse gedreht ist!



Transformation der geometrischen Matrix

$$\mathbf{k}_{g, glob} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_{g, lok} \cdot \mathbf{T}$$



$$\frac{N}{L_V} \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & -\cos^2 \varphi \\ -\sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\frac{N}{L_V} \begin{bmatrix} \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \\ \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \\ \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \\ \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} & \text{*****} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{g11} & k_{g12} & k_{g13} & k_{g14} \\ k_{g21} & k_{gL22} & k_{g23} & k_{g24} \\ k_{g31} & k_{gL32} & k_{g33} & k_{g34} \\ k_{g41} & k_{gL42} & k_{g43} & k_{g44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{g, glob, 44} &= \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi \\ &= (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi)^2 \\ &= (\cos(\alpha - \varphi))^2 = \cos^2 \alpha_V \end{aligned}$$



$$k_{g, glob, 44} = \frac{N}{L_V} \cos^2 \alpha_V$$



menum

Transformation des Vektors der inneren Kräfte

$$\mathbf{f}_{i, \text{glob}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_{i, \text{lok}}$$



$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \cdot N \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i, \text{glob}, 4} &= N(\sin \alpha \cdot \cos \varphi - \cos \alpha \cdot \sin \varphi) \\ &= N \sin \alpha_v \end{aligned}$$



$$f_{i, \text{glob}, 4} = N \sin \alpha_v$$



menum

Tangentiale Gleichgewichtsbedingung

Da der Fachwerkbock mit 2 Elementen diskretisiert wird, die jeweils identische Beiträge liefern, gehen die Elementbeiträge doppelt in die Systemgleichung ein. Bei der Lösung der Vorlesung 1 ist zu beachten, dass der Freiheitsgrad w entgegen der Richtung U_z definiert wurde. Abgesehen von dieser Vorzeichenumkehr müssten beide Gleichgewichtsbedingungen identisch sein, wenn die Verwendung einer nichtlinearen Kinematik wirklich identisch zum Gleichgewicht am verformten System wäre.

Tangentiale Gleichgewichtsbedingung des FE-Modells

$$2 \left\{ \frac{EA}{L_0} \sin^2 \alpha_v + \frac{N}{L'_v} \cos^2 \alpha_v \right\} \Delta w = -P - 2N \sin \alpha_v$$

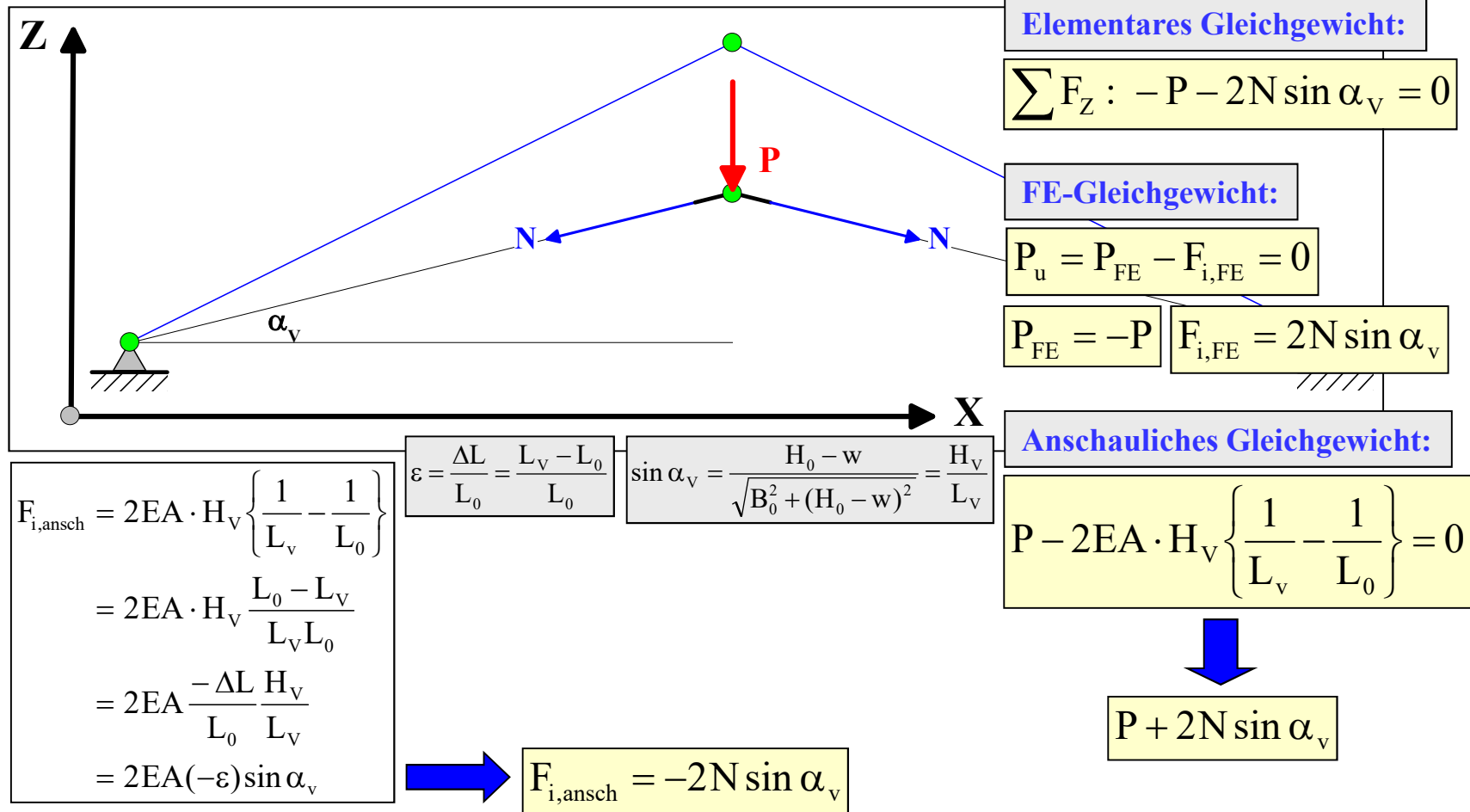
Tangentiale Gleichgewichtsbedingung durch Gleichgewicht am verformten System

$$2EA \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_v} + \frac{H_v^2}{L_v^3} \right\} \Delta w = P - 2EA \cdot H_v \left\{ \frac{1}{L_v} - \frac{1}{L_0} \right\}$$



menum

Gleichgewichtsbedingung: Vektor der inneren Kräfte



Zwischenfazit I

Bei der anschaulichen Lösung wurde explizit Gleichgewicht am verformten System angeschrieben und zusätzlich die zum verformten System passende exakte Kinematik verwendet.

Bei der nichtlinearen FE-Modellierung wurde lediglich eine *nichtlineare Kinematik* verwendet – das Gleichgewicht wurde dem *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* überlassen. Offensichtlich führt die nichtlineare Kinematik automatisch zum Gleichgewicht am verformten System. Ein Vergleich der inneren Kräfte liefert *exakt identische Gleichgewichtsbedingungen*.

Da die verwendete Kinematik exakt war, ergab sich auch die exakte Gleichgewichtsbedingung des verformten Tragwerks. *Kinematik* und *zugehörige Gleichgewichtsbedingung* sind *konsistent*. Würde man die Kinematik vereinfachen, zöge dies automatisch eine vereinfachte angenäherte Gleichgewichtsbedingung nach sich. Worin diese Vereinfachungen anschaulich bestehen, lässt sich ohne weitere Überlegungen nicht sagen. Wenn man jedoch die mit der vereinfachten Kinematik ermittelten Schnittgrößen und Verformungen für eine exakte Gleichgewichtsbetrachtung heranzieht, würde die Kontrolle nicht ganz aufgehen. In diesem Fall wären Kinematik und Gleichgewichtsbedingung nicht konsistent. Beispielsweise wäre kein Gleichgewicht gegeben, wenn man versuchte, mit den linearen Schnittgrößen an einem mit den linearen Verschiebungen verformten Tragwerk Gleichgewicht anzuschreiben.



Tangentiale Matrix

Die tangentialen Steifigkeiten des FE-Modells und der anschaulichen Lösung sehen zunächst sehr verschieden aus.

$$\begin{aligned}K_{T,\text{ansch}} &= 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_v} + \frac{H_v^2}{L_v^3} \right\} \\&= 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_v} + \frac{\sin^2 \alpha_v}{L_v} \right\} \\&= 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_v} (1 - \sin^2 \alpha_v) \right\} \\&= 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{\cos^2 \alpha_v}{L_v} - \frac{\cos^2 \alpha_v}{L_0} + \frac{\cos^2 \alpha_v}{L_0} \right\} \\&= 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} (1 - \cos^2 \alpha_v) + \cos^2 \alpha_v \frac{L_v - L_0}{L_v L_0} \right\} \\&= 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} \sin^2 \alpha_v + \cos^2 \alpha_v \cdot \frac{\varepsilon}{L_v} \right\} \\&= 2 \frac{EA}{L_0} \sin^2 \alpha_v + 2 \frac{N}{L_v} \cos^2 \alpha_v\end{aligned}$$

Tangentiale FE-Steifigkeit:

$$K_{T,FE} = 2 \frac{EA}{L_0} \sin^2 \alpha_v + 2 \frac{N}{L_v} \cos^2 \alpha_v$$

Tangentiale anschauliche Steifigkeit:

$$K_{T,\text{ansch}} = 2EA \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_v} + \frac{H_v^2}{L_v^3} \right\}$$

Nach einigen Umformungen kann jedoch die anschauliche Steifigkeit in die FE-Steifigkeit überführt werden!



$$K_{T,\text{ansch}} = 2 \frac{EA}{L_0} \sin^2 \alpha_v + 2 \frac{N}{L_v} \cos^2 \alpha_v$$



menum

Zwischenfazit II

Die tangentielle Steifigkeit setzt sich grundsätzlich (bei elastischem Verhalten) immer aus zwei Anteilen zusammen:

1. Einem Teil, der aus der Elastizität (beim Fachwerkstab EA) des verformten Elements resultiert, also verformungsabhängig ist.
2. Einem schnittgrößenabhängigen Teil, der sog. geometrischen Steifigkeit.

Der Inkrementierungsprozess der FE-Herleitung, bestehend aus *Verformungen* \Rightarrow *Verzerrungen* \Rightarrow *Spannungen* mit entsprechenden Linearisierungen, liefert exakt die gleiche tangentielle Steifigkeit wie die anschauliche Lösung.

Als Verallgemeinerung des ebenen Fachwerks kann man folgenden Schluss ziehen: Sofern es gelingt, entsprechende nichtlineare Kinematiken zu finden, lassen sich sämtliche Tragwerkstypen (Balken, Schalen, Kontinua etc.) geometrisch nichtlinear berechnen, d. h. es ist möglich, Schnittgrößen und Verformungen so zu bestimmen, dass Gleichgewicht am verformten Tragwerk herrscht.

Bei der LAGRANGESchen Betrachtung in totaler Formulierung laufen Inkrementierung und Diskretisierung formal ab – die Schwierigkeit besteht in der Formulierung eventuell sehr komplexer kinematischer Gleichungen für beliebig große Verschiebungen und Rotationen.

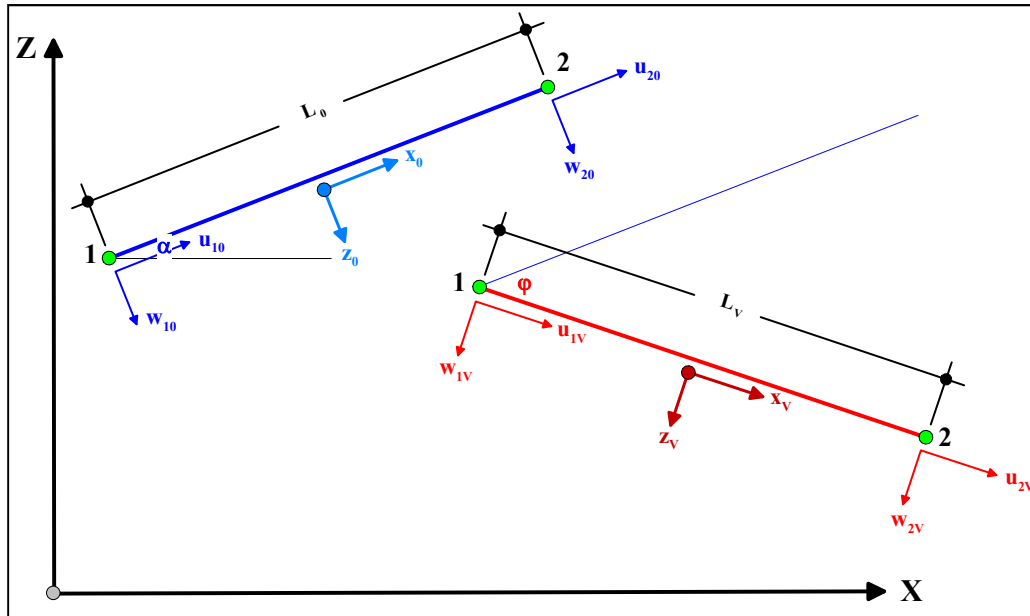


Mitgehende LAGRANGEsche Formulierung



menum

Grundidee



Bei der mitgehenden LAGRANGESchen Formulierung wird nach Berechnung das ursprüngliche Element gleichsam vergessen und durch das verformte Element ersetzt, das sich jetzt weiter verformt. Damit entfallen sämtliche Verformungsanteile in den Steifigkeitsmatrizen, denn der aktuelle Verformungszustand findet sich in den neuen, aktualisierten Knotenkoordinaten wieder.

Damit wird die nichtlineare elastische Steifigkeitsmatrix $K_{NL}(V)$ zur linearen Matrix K_{LV} . Der Index „V“ in K_{LV} deutet an, dass hier die Verformungen indirekt über die *verformten Knotenkoordinaten* eingehen. Der Unterschied zu einem Element, welches von Anfang an die neuen Koordinaten besäße, liegt in den Schnittgrößen, die dem mitgehenden Element im Unterschied zu einem Urelement mit den verformten Koordinaten innewohnen. Somit muss die zu den Schnittgrößen korrespondierende, geometrische Steifigkeit erfasst werden. Das mitgehende Element besitzt die lokalen Freiheitsgrade u_{1V} , w_{1V} , u_{2V} , w_{2V} anstelle von u_{10} , w_{10} , u_{20} , w_{20} .



menum

Elementmatrizen des mitgehenden Elements

Lineare elastische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_{LV,lok} = \frac{EA}{L_V} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Geometrische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_{gV,lok} = \frac{\bar{N}}{L_V} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektor der inneren Kräfte

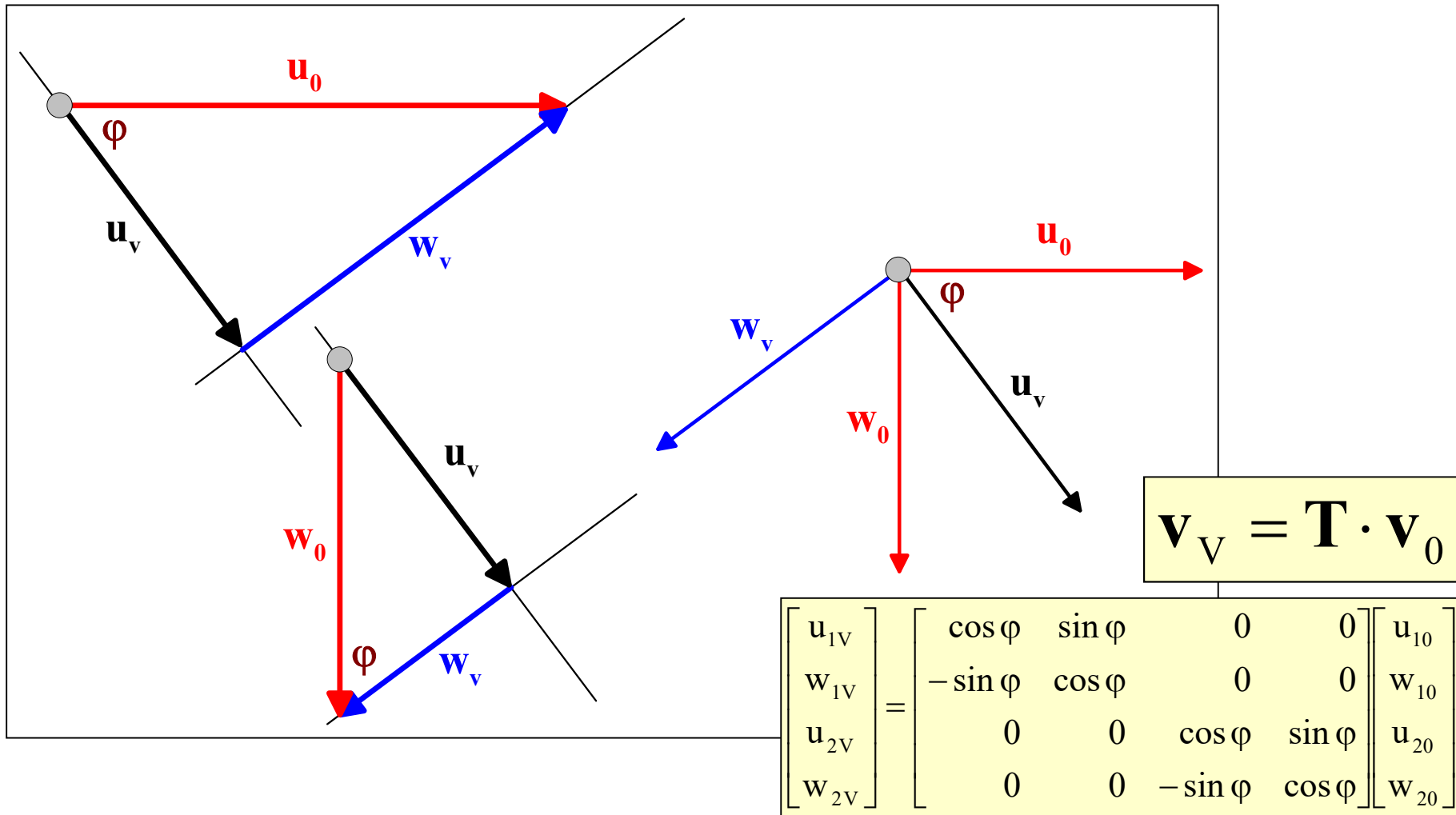
$$\mathbf{f}_{iV,lok} = \bar{N} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diese lokalen Matrizen, die erkennbar einfacher strukturiert sind als diejenigen der totalen Formulierung, müssen mit der aktuellen Orientierung α_V zu globalen Matrizen transformiert werden. Im aktuellen Winkel α_V finden sich die Verformungen, sprich der Elementdrehwinkel φ wieder.

Beide LAGRANGESchen Formulierungen sind im Prinzip identisch. Zur Kontrolle transformieren wir die mitgehenden Matrizen mit dem Winkel φ auf die Freiheitsgrade u_{10} , w_{10} , u_{20} , w_{20} zum Vergleich mit den lokalen Matrizen der totalen Formulierung.



Transformation $x_0/z_0 \Rightarrow x_v/z_v$



menum

Ergebnisse der Transformation

$$\mathbf{f}_{i,V0} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_{iV,lok}$$

$$\mathbf{f}_{iV0} = \bar{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} -\cos \bar{\varphi} \\ -\sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \\ \sin \bar{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{NL,V0} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_{LV,lok} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{k}_{NL,V0} = \frac{EA}{L_V} \begin{bmatrix} \cos^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\cos^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \sin^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\sin^2 \bar{\varphi} \\ -\cos^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\sin^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \sin^2 \bar{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{g,V0} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}_{gV,lok} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{k}_{g,V0} = \frac{N}{L_V} \begin{bmatrix} \sin^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\sin^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\cos^2 \bar{\varphi} \\ -\sin^2 \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \sin^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & -\cos^2 \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} & \cos^2 \bar{\varphi} \end{bmatrix}$$



Vergleich mit der totalen Formulierung

Ein Vergleich der auf x_0/z_0 transformierten mitgehenden Matrizen zeigt folgende Ergebnisse:

1. Die Vektoren der inneren Kräfte sind identisch. Damit sind die Gleichgewichtsbedingungen identisch und beide Formulieren werden gegen die exakt gleichen Ergebnisse konvergieren (siehe Vorlesung 4 „Pfadverfolgungsalgorithmen“).
2. Die geometrischen Steifigkeitsmatrizen sind identisch. Wie später diskutiert wird, führt primär dieser Steifigkeitsanteil zum Stabilitätsversagen wie Knicken oder Beulen. Da beide Formulierungen die gleiche geometrische Steifigkeit liefern, liefern sie auch die gleichen Stabilitätslasten nach klassischer Stabilitätstheorie.
3. Die nichtlinearen (elastischen) Steifigkeitsmatrizen unterscheiden sich in der verwendeten Länge (L_0 oder L_v) im Vorfaktor. Wie bei der totalen Formulierung gezeigt, ist die Verwendung von L_0 konsistent zum Vektor der inneren Kräfte. Hier offenbart sich eine gewisse Inkonsistenz der mitgehenden Formulierung: die Gesamtdehnung bezieht sich auf die Ausgangslänge L_0 , während sich das Dehnungsinkrement auf die aktuelle Länge L_v bezieht. Bei kleinen Dehnungen ist der Unterschied vernachlässigbar klein. Wäre das nicht der Fall, verlöre die klassische Ingenieurdehnung ihre Gültigkeit und es müsste eine Formulierung großer Dehnungen verwendet werden, die diese Inkonsistenz beseitigte.



Große Dehnungen – HENCKY-Dehnungen

Bei großen Dehnungen ist es nicht sinnvoll, die Längenänderung immer auf die Ausgangslänge zu beziehen. Hier erscheint es sinnvoller, die Definition der Ingenieurdehnung nur im differentiell Kleinen zu verwenden: eine differentielle Längenänderung dL führt, bezogen auf die **aktuelle Länge L** , zu einem differentiellen Dehnungszuwachs $d\varepsilon$:

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L} \quad \longrightarrow \quad \int_0^\varepsilon d\varepsilon = \int_{L_0}^{L_v} \frac{dL}{L} = \quad \longrightarrow \quad \varepsilon = \ln L_v - \ln L_0 = \ln \frac{L_v}{L_0}$$

Das entstehende logarithmische Dehnungsmaß (nach seinem Originator HENCKY-Dehnung genannt) ist insbesondere besser geeignet, den Extremfall einer Stauchung auf Null sinnvoll zu beschreiben. Bei dieser **größtmöglichen Stauchung** beträgt die Längenänderung gerade $\Delta L = -L_0$.

$$\varepsilon_{\text{Ing}} = \frac{-L_0}{L_0} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_{\text{Ing}} = -1 = -100 \%$$

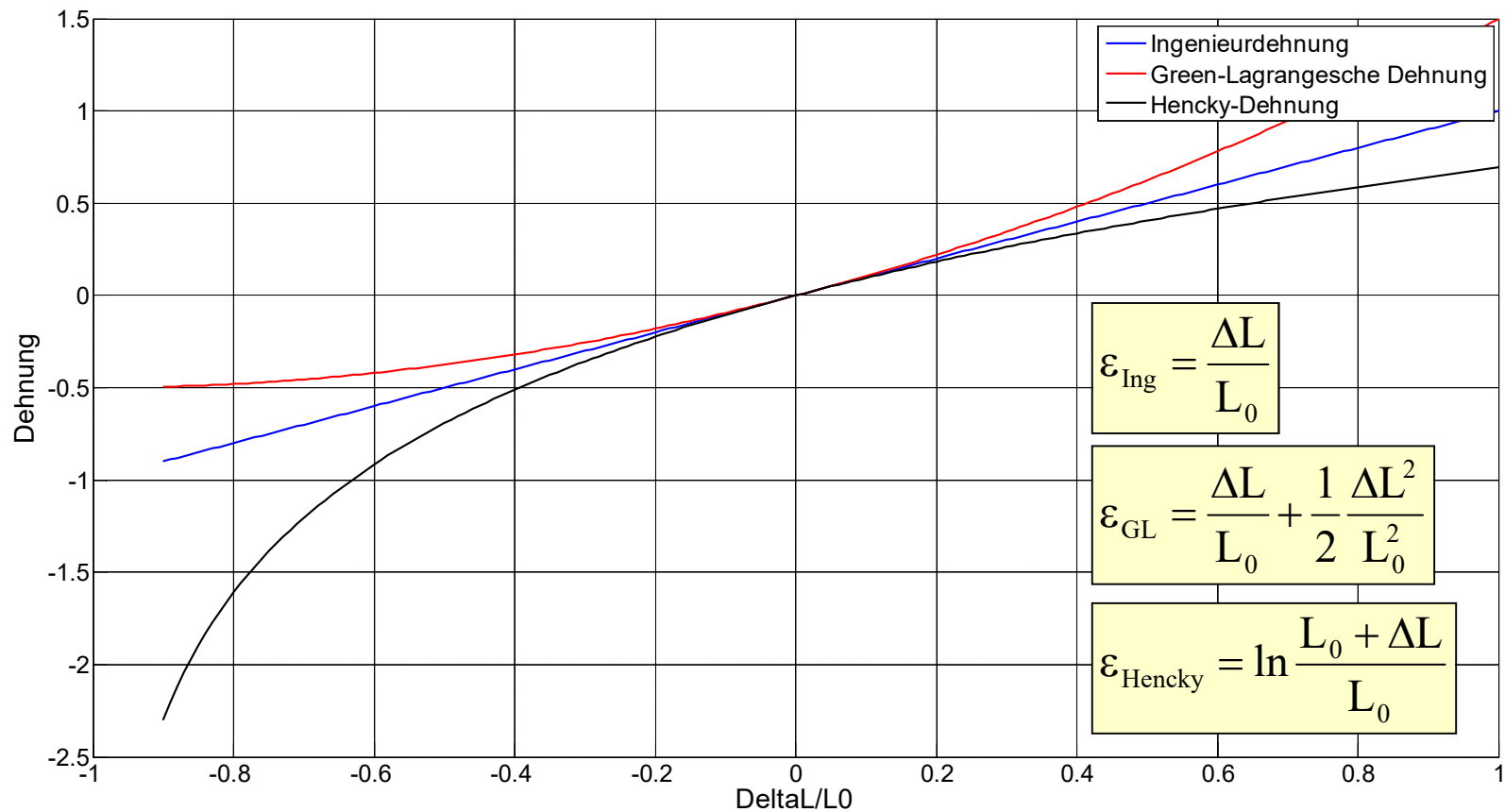
$$\varepsilon_{\text{Hencky}} = \lim_{L \rightarrow 0} \ln \frac{L}{L_0} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_{\text{Hencky}} \rightarrow -\infty$$

Es erscheint wesentlich sinnvoller, wenn die größtmögliche negative Dehnung mit einem unendlichen Wert verknüpft ist als mit dem Wert -1. Bei kleinen Dehnungen spielt die Dehnungsdefinition praktisch keine Rolle.



menum

Vergleich der Dehnungsdefinitionen



menum

Inkrementelle HENCKY-Dehnung

Die klassische Ingenieurdehnung selbst ist linear (doppelte Längenänderung entspricht doppelter Dehnung) – die geometrische Nichtlinearität betrifft nicht die Dehnungsdefinition, sondern den Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Längenänderung.

Die logarithmische Dehnung hingegen ist von ihrer Definition selbst nichtlinear, so dass die Inkrementierung zusätzlich zum nichtlinearen Zusammenhang Verschiebung-Länge die Dehnungsdefinition selbst betrifft. Wir entwickeln die HENCKY-Dehnung bzgl. eines Grundzustands mit der verformten Länge L_V :

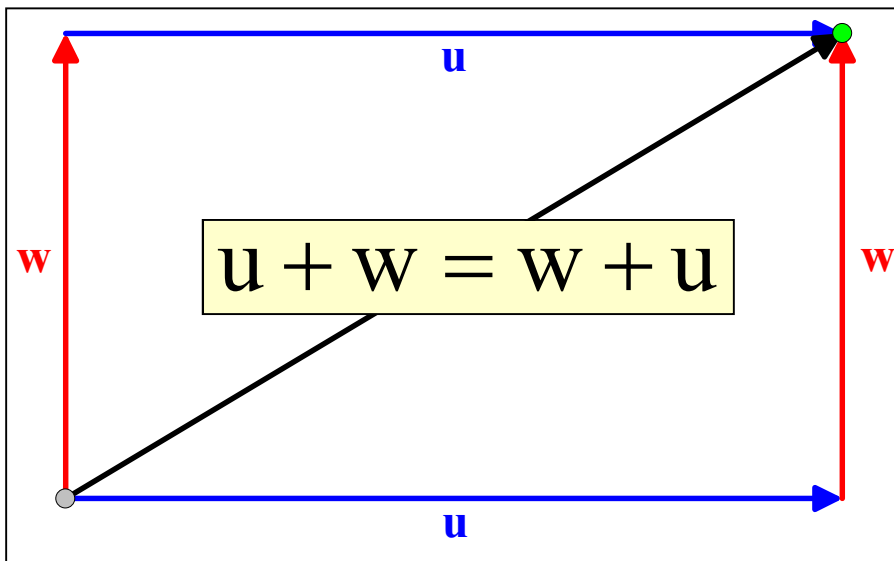
$$\varepsilon(L_V + \Delta L) = \ln \frac{L_V}{L_0} + \frac{1}{L_V} \frac{\Delta L}{L_0} = \ln \frac{L_V}{L_0} + \frac{\Delta L}{L_V} \quad \longrightarrow \quad \Delta \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_V}$$

Der Dehnungszuwachs bezieht sich jetzt auf die **aktuelle Länge**. Bei der totalen Formulierung ist das die **verformte Länge** L_V , bei der mitgehenden Formulierung ist das die **unverformte Länge** des Elements mit den **verformten Koordinaten**, die identisch zu L_V ist. Damit verschwindet der Unterschied zwischen den beiden LAGRANGESchen Formulierungen.



Große Verschiebungen

Unser Fachwerkelement ist formuliert für *beliebig große Verschiebungen*. Die großen Verschiebungen ziehen *große Verdrehungen* der Stabachse nach sich, die jedoch eine *Starrkörperrotation* darstellen. Wir mussten nur Sorge dafür tragen, dass unsere Dehnungsdefinition die korrekten *Nulldehnungen* für diese Starrkörperrotationen lieferte. Ansonsten erwachsen aus Verdrehungen keinerlei Schnittgrößen. Eine Erweiterung des ebenen Stabes auf einen räumlichen ist ohne weiteres möglich.



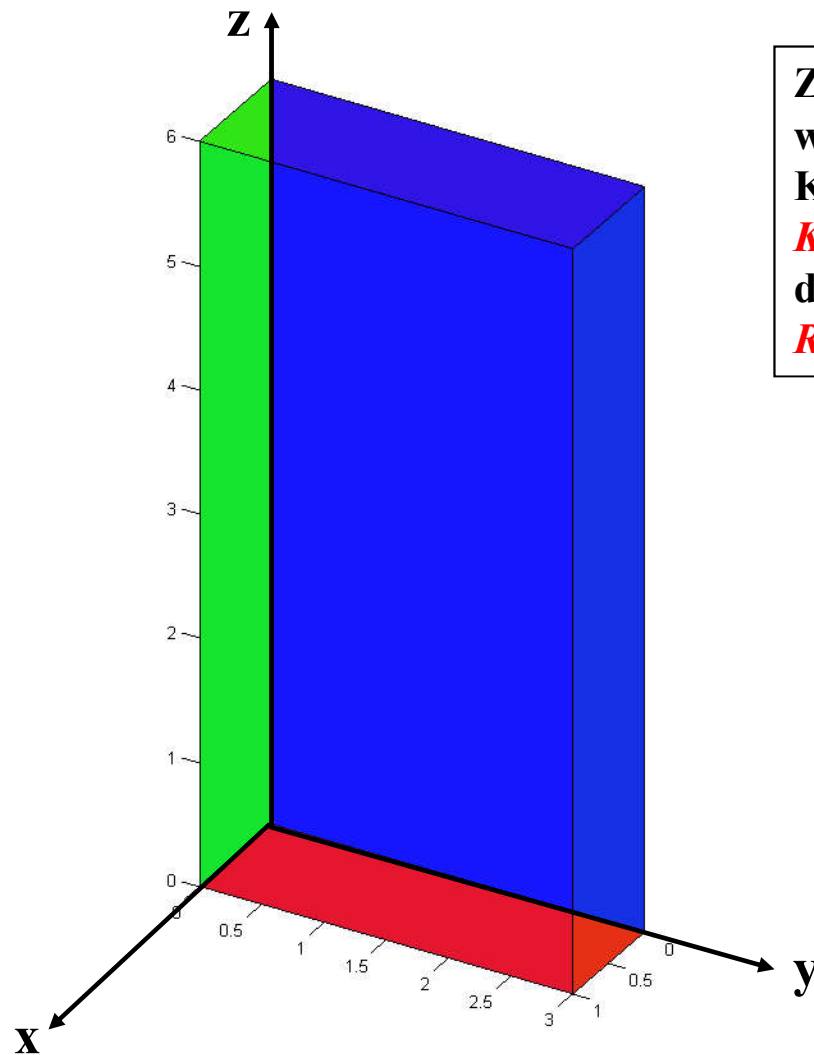
Große Verschiebungen sind relativ einfach zu erfassen, da Verschiebungen unabhängig von ihrer Größe immer *Vektoreigenschaft* besitzen. Damit sind sie kommutativ: wir können die Verschiebungskomponenten in beliebiger Reihenfolge aufbringen und erhalten stets ein und dasselbe Ergebnis.

Bei großen Rotationen ist das nicht der Fall!

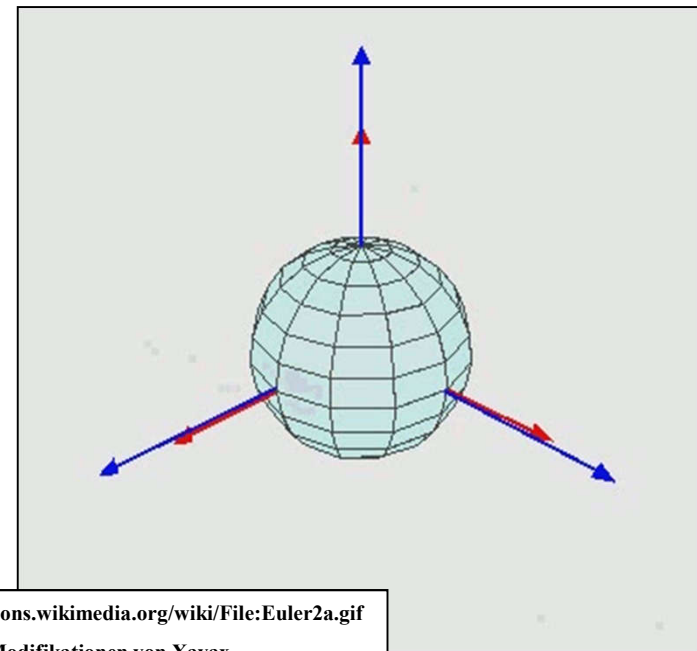


menum

Große Rotationen



Zur Beschreibung von beliebigen Rotationen im Raum werden die sog. **EULER-Winkel** verwendet, die den Körper nacheinander um seine bereits **verdrehen Körperachsen** drehen. Das nachfolgende Beispiel zeigt die Abhängigkeit des Endergebnisses von der **Rotationsreihenfolge**.



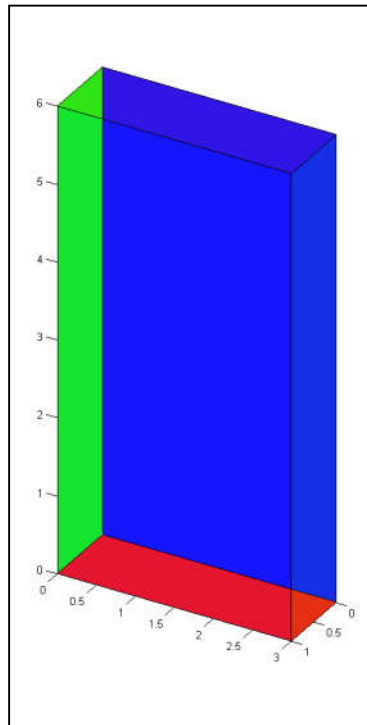
Entnommen von <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler2a.gif>
Autoren: Juansempere mit Modifikationen von Xavax



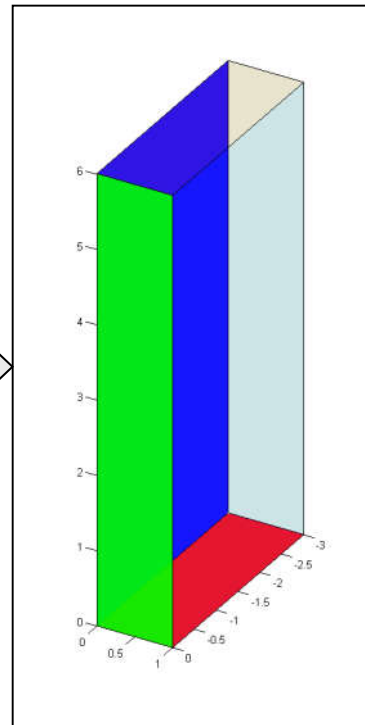
menum

Rotationsreihenfolge I: z-y-x

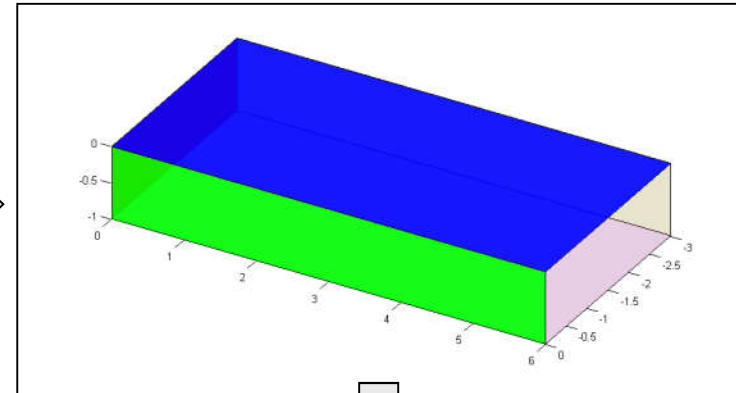
(Drehung um jeweils 90°)



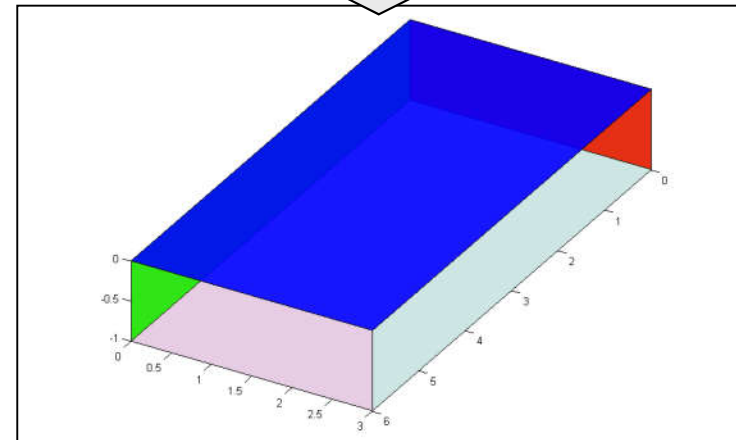
φ_z



φ_y



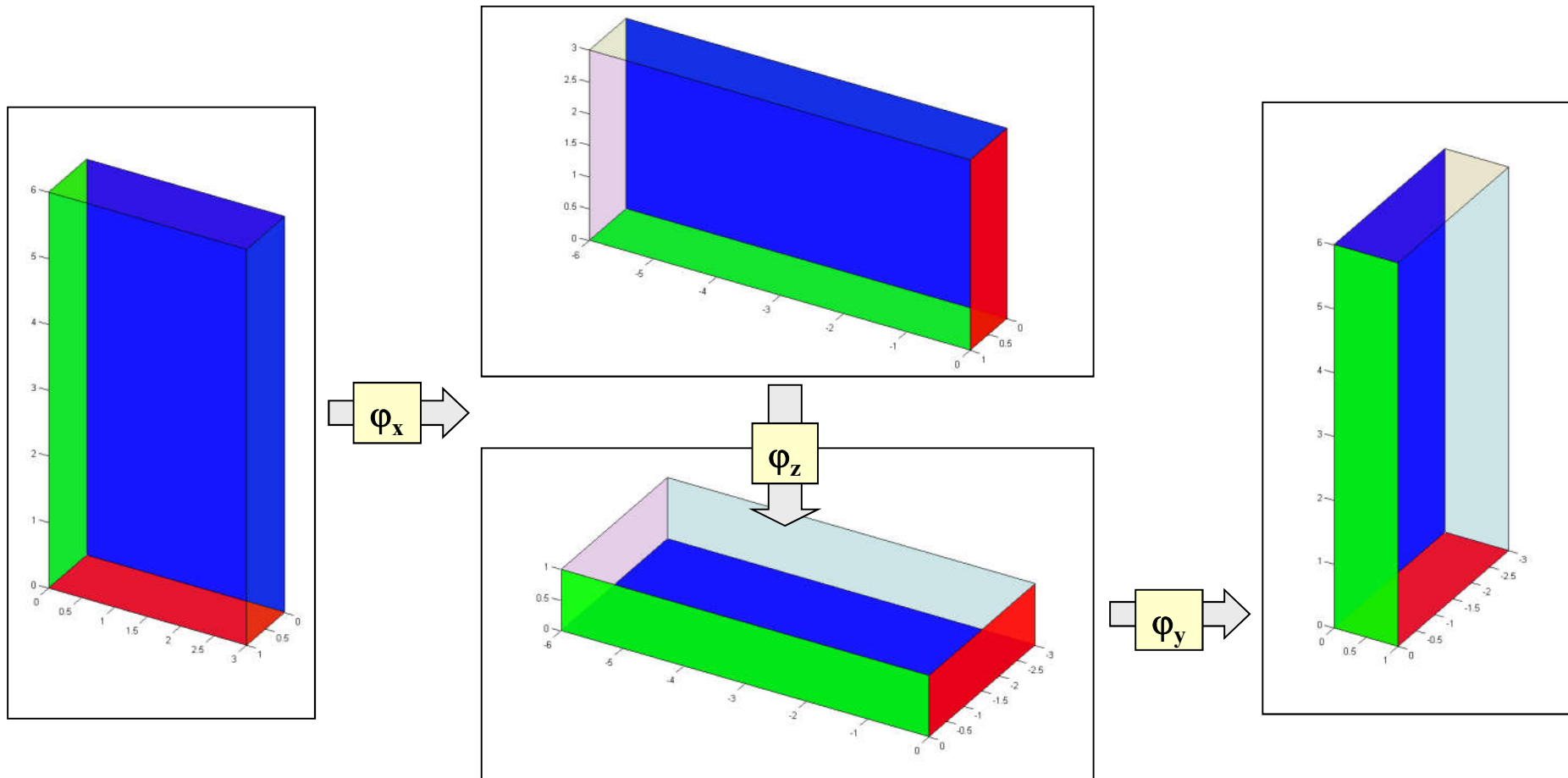
φ_x



menum

Rotationsreihenfolge II: x-z-y

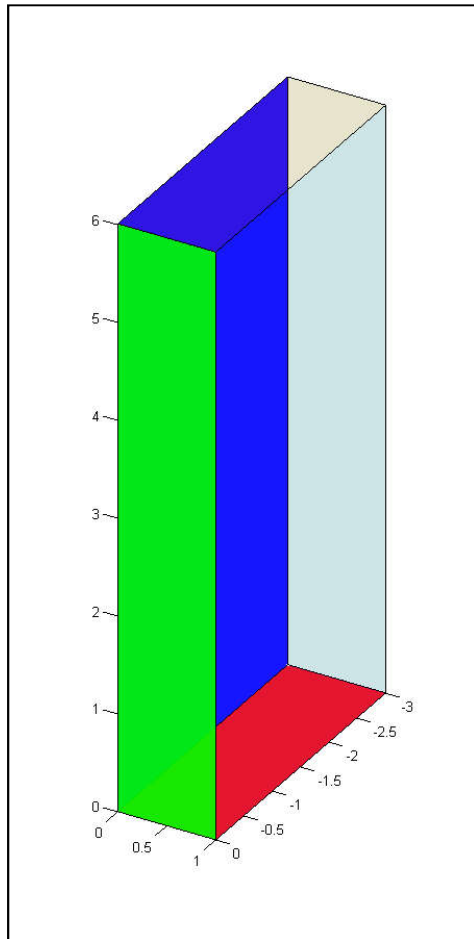
(Drehung um jeweils 90°)



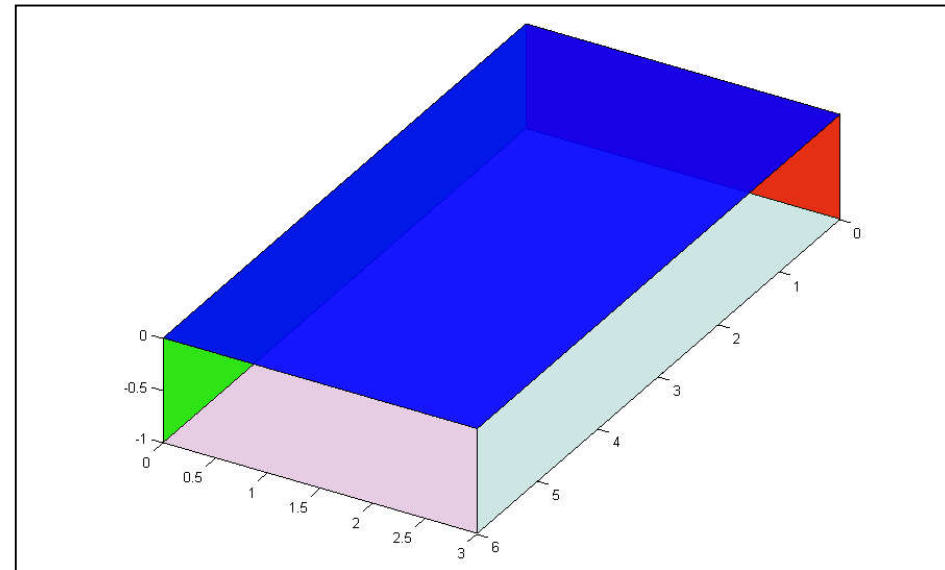
menum

Vergleich der Endergebnisse

Rotationsreihenfolge II: x-z-y



Rotationsreihenfolge I: z-y-x



Die Ergebnisse der beiden Rotationsreihenfolgen sind verschieden: die Reihenfolge der Rotationen ist wesentlich für das Ergebnis. Nur bei kleinen Verdrehungen sind die Unterschiede vernachlässigbar und damit die Verdrehungen kommutativ.



menum

Tragwerke mit großen Rotationen

Bei Bauteilen mit *Biegung* bzw. *Torsion* treten zwar auch große *Starrkörperrotationen* auf, aber nur ein Teil der Gesamtrotation führt zu elastischen Verdrehungen der Querschnitte bzgl. der Stabachse und damit zu Schnittgrößen wie *Biegemomenten* und *Torsionsmomenten*.

Bei der Formulierung der kinematischen Gleichungen für beliebig große Rotationen muss deshalb das Problem der *Reihenfolgenabhängigkeit* der Rotationen korrekt beachtet werden. Dies gestaltet sich deutlich schwieriger als die Berücksichtigung von großen Verschiebungen. An dieser Stelle soll dieses Thema nur erwähnt, aber nicht weiter vertieft werden.



menum

Nächste Schritte

Wir haben anhand des ebenen Fachwerkstabs gesehen, wie man ein geometrisch nichtlineares finites Element ableitet. Auf ähnliche Weise, aber z. T. deutlich komplexer, können die Elementmatrizen weiterer Bauteiltypen wie ebene und räumliche Balken oder Schalen entwickelt werden.

Wir setzen im Folgenden die Existenz derartiger Elementformulierungen voraus und fragen uns in der nächsten Lehrveranstaltung: Wie können wir möglichst schnell, aber gleichzeitig sicher die Tragwerksantwort auf Systemebene ermitteln. Hierfür geben wir eine beliebige *Lastgeschichte* vor und möchten die dazu korrespondierende *Verformungsgeschichte* ermitteln. Wir wollen also den *Last-Verformungspfad* nachverfolgen. Infolgedessen werden die hierfür geeigneten Algorithmen als *Pfadverfolgungsalgorithmen* bezeichnet.

