Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

Vorlesung 2

Das inkrementell-iterative Berechnungskonzept

Teil C: Diskretisierung des inkrementellen Arbeitsprinzips

Überblick

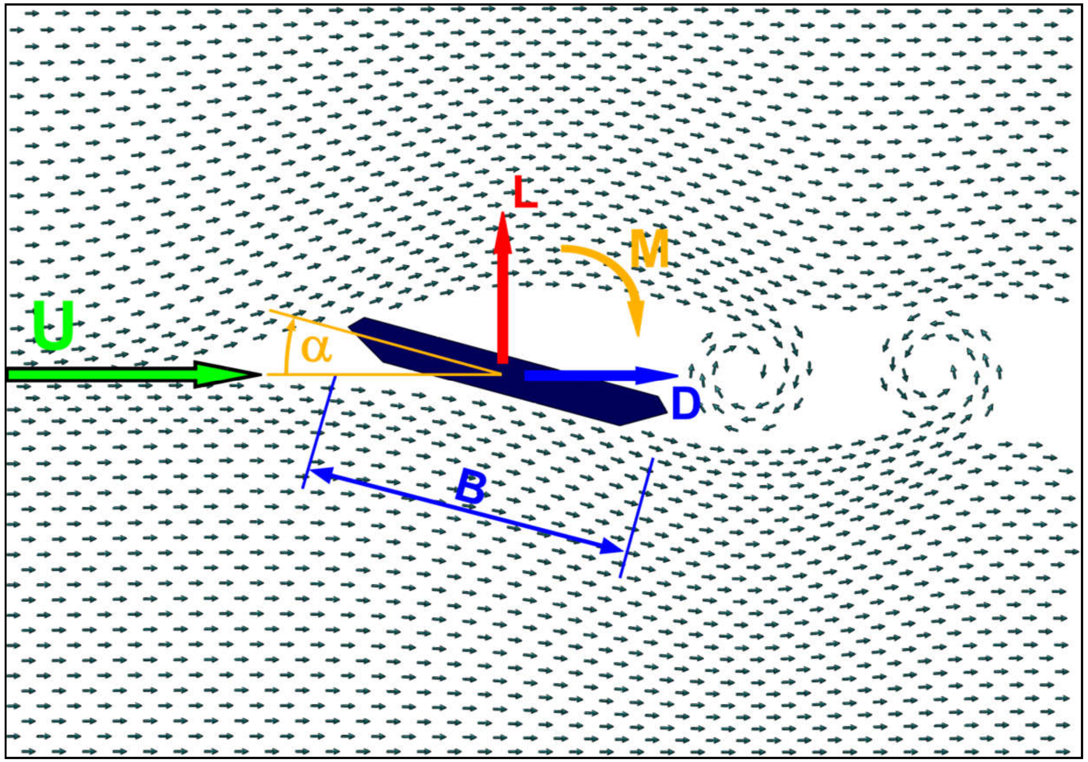
Als Bausteine für eine FE-Berechnung nichtlinearer Tragwerke liegen bis jetzt vor:

- **das inkrementelle Prinzip der virtuellen Verschiebungen,**
- **die Methode der direkten Steifigkeiten,**
- **das NEWTON/RAPHSON-Verfahren.**

Als Bindeglied zwischen dem inkrementellen Prinzip der virtuellen Verschiebungen und der Methode der direkten Steifigkeit fehlt bislang noch die Diskretisierung des Arbeitsprinzips, also der Übergang von exakten Gleichungen zu einer approximierten diskreten Matrizen-formulierung. Die daraus erwachsenden Elementmatrizen und –vektoren können dann mit der Methode der direkten Steifigkeiten weiterverarbeitet werden.

Diese Fragestellung wird im vorliegenden Teil C der Vorlesung 3 behandelt.

Strömungen: EULERsche Betrachtungsweise

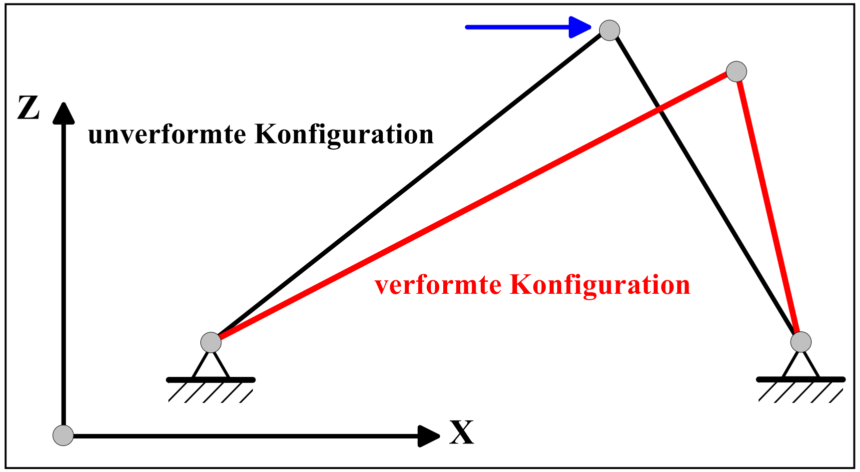


Bei einem Strömungsproblem interessieren der Druck und der Geschwindigkeitvektor in einem gewissen Gebiet. Diese physikalischen Größen werden durch Partikel hervorgerufen, die in das Gebiet hineinfließen und es nach der Durchströmung auch wieder verlassen. Das Schicksal eines einzelnen Partikels ist nicht interessant und wird deshalb auch nicht verfolgt.

Man würde somit das Gebiet diskretisieren und an den ortsfesten Gitterpunkten des Netzes die gesuchte zeitveränderliche Information als Unbekannte einführen. Bewegungen von Partikeln werden nicht verfolgt. Diese Betrachtungsweise wird *EULERsche Betrachtungsweise* genannt. Sie ist speziell für Strömungsprobleme geeignet, aber nicht besonders für Probleme der Strukturmechanik.

Tragwerke: LAGRANGEsche Betrachtungsweise

Im Prinzip wäre es auch möglich, den Verformungsprozess eines Tragwerks mit der EULERschen Betrachtungsweise abzubilden. Bei der Bewegung des Tragwerks würden dann die Gitterpunkte entweder die Eigenschaft „Teil des Tragwerks“ oder „kein Teil des Tragwerks“ erhalten. Die Verbindung aller dem Tragwerk angehörigen Gitterpunkte ergäbe dann die Biegelinie. Die Bewegung eines Tragwerkpunktes wäre dann nicht mehr kontinuierlich, sondern würde diskret von Gitterpunkt zu Gitterpunkt erfolgen. Um also eine Genauigkeit von 1/1000 zu erhalten, müsste der Kontrollraum zwischen unverformter und verformter Geometrie in mindestens 1000 Intervalle mit entsprechender Freiheitsgradanzahl eingeteilt werden.



Das wäre offensichtlich nicht optimal, denn wir wissen, dass das nebenstehende Fachwerk im Falle linearen Tragverhaltens mit nur 2 Freiheitsgraden exakt, ohne jeden numerischen Fehler, abgebildet werden kann. Deshalb wählt man hier die ***LAGRANGEsche Sichtweise***. Diese besteht darin, einzelne Materiepunkte (Knoten) zu betrachten, deren Bewegungen dann verfolgt werden. Diese Betrachtungsweise ist in der Strukturmechanik gebräuchlich.

Totale & mitgehende Betrachtungsweise

Die *LAGRANGEsche Abbildungsweise* kann in zwei Ausprägungen geschehen: in *totaler Formulierung* oder *mitgehender Formulierung*.

Die totale Formulierung erwächst unmittelbar aus dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Dort wurden in jedem Schritt – egal ob Lastschritt oder Iterationsschritt – die tangentiale Matrix und der Vektor der inneren Kräfte als direkte Funktion des Grundzustandes angesetzt. Somit werden kinematische Gleichungen benötigt, die aus den *Gesamtverformungen* die *Gesamtverzerrungen* liefern. Bei entsprechend großen Verschiebungen und insbesondere Verdrehungen können diese Gleichungen sehr komplex werden.

Die mitgehende Formulierung nutzt die inkrementelle Lastaufbringung aus. Hier wird nach Ausiterierung eines Lastschrittes der neu gefundene *Nachbarzustand* nicht zum *neuen Grundzustand* gemacht, sondern als neuer *aktueller Ausgangszustand* festgelegt. Das Tragwerk besitzt jetzt neue Koordinaten, die sich aus den alten Koordinaten plus den Verschiebungen ergeben, und die alten Koordinaten sind gleichsam vergessen. Im Gegensatz zum *Ur-Ausgangszustand*, der belastungs- und schnittgrößenfrei war, ist der *aktuelle Ausgangszustand initial belastet* und besitzt die Schnittgrößen des letzen Nachbarzustandes als *Initialschnittgrößen*, die mit den *Initiallasten* im Gleichgewicht stehen. Der Ur-Ausgangszustand kann jetzt vergessen werden und es erfolgt ein Lastschritt auf der Basis der aktuellen Tragwerkskonfiguration.

Rückerinnerung:
Lineare FEM - Verschiebungsansätze

Beim *Weggrößenverfahren* stellen die *Verformungen* die *primären Unbekannten* dar. Die Verformungskomponenten werden im Vektor u zusammen gefasst. Für die Verformungen werden *Ansätze* in Einheitskoordinaten (r,s,t) gewählt.

Verschiebungsansätze

$$\mathbf{u}(r,s,t) = \mathbf{\Omega}(r,s,t)\,\mathbf{v}$$

u: Verformungsfeld → **bekannt, wenn v bekannt ist**

Ω: Matrix der Formfunktionen → **bekannt**

v: Vektor der Knotenverformungen → **unbekannt**

Lineare FEM:
Interpolation der abgeleiteten Größen

Verformungsansätze

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{v} \quad\Rightarrow\quad \delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}\,\delta\mathbf{v}$$

Kinematik: DGL → **diskretisierte Kinematik**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\,\mathbf{u} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\,\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{v} = \mathbf{B}\,\mathbf{v} \quad\Rightarrow\quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\delta\mathbf{v}$$

Materialgesetz → **diskretisiertes Materialgesetz**

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\,\mathbf{B}\,\mathbf{v}$$

Sämtliche mit den Ansätzen verknüpfte Matrizen (Ω und B) sind unabhängig von den Verformungen, also als rein mathematische Größen vollständig bekannt.

Lineare FEM:
PVV und Elementmatrizen

schwache Form des Gleichgewichts: PVV

$$\delta W = -\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}\, dV + RT = 0$$

diskretisiertes PVV

$$\delta W = -\delta \mathbf{v}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\, \mathbf{B}\, dV \cdot \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}^T \int_V \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{p}\, dV + RT = 0$$

lineare Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\, \mathbf{B}\, dV$$

Elementlastvektor

$$\mathbf{q} = \int_V \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{p}\, dV$$

Nichtlineare FEM: Verschiebungsansätze

Verschiebungsansätze allgemein

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{v}$$

Grundzustand

$$\overline{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega}\,\overline{\mathbf{v}}$$

Nachbarzustand bzw. Inkremente

$$\overset{+}{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega}\,\overset{+}{\mathbf{v}}$$

Da sukzessiv neue Grundzustände durch Addition von Inkrementen entstehen, müssen, um mathematische Konsistenz zu garantieren, für den Grundzustand und die Inkremente die gleichen Ansätze verwendet werden.

Es werden die Ansätze der linearen FEM übernommen. Wenn der abzubildende Verformungszustand im Nichtlinearen komplexer ist als im Linearen, muss die Diskretisierung entsprechend verfeinert werden.

Nichtlineare FEM: Verzerrungen I

Der *Gesamtverzerrungszustand* wird aufgespalten in die *Grundzustandsverzerrungen* und die *inkrementellen Verzerrungen*, die wiederum in zwei Anteile zerfallen, die *linear* und *quadratisch* von den *Verschiebungsinkrementen* abhängen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta\overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Grundzustandsverzerrungen

Die Grundzustandsverzerrungen ergeben sich *ohne jeden Fehler* aus den *exakten kinematischen Gleichungen*. Die dort auftauchenden Verformungen und deren Ableitungen können mittels der Formfunktionen an jeder beliebigen Stelle im Element berechnet werden.

$$\bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega}\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \bar{\mathbf{u}}' = \boldsymbol{\Omega}'\bar{\mathbf{v}} \rightarrow \bar{\mathbf{u}}'' = \boldsymbol{\Omega}''\bar{\mathbf{v}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}', \bar{\mathbf{u}}'')$$

Nichtlineare FEM: Verzerrungen II

Inkrementelle Verzerrungen, linear in den Verformungsinkrementen

Die linear von den Verformungsinkrementen abhängigen inkrementellen Verzerrungen enthalten die erste Ableitung der nichtlinearen Kinematik nach den Verformungen und deren Ableitungen *an der Stelle des Grundzustandes*. Dieser Anteil hängt somit vom Grundzustand ab. Als Folge hängt die B-Matrix von den Verformungen des Grundzustands ab.

$$\overset{+}{\mathbf{u}} = \Omega\,\overset{+}{\mathbf{v}} \;\rightarrow\; \overset{+}{\mathbf{u}}' = \Omega'\,\overset{+}{\mathbf{v}} \;\rightarrow\; \overset{+}{\mathbf{u}}'' = \Omega''\,\overset{+}{\mathbf{v}}$$

$$\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left.\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tilde{\mathbf{u}}}\right|_{\tilde{\mathbf{u}}=\bar{\tilde{\mathbf{u}}}} \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}} \;\rightarrow\; \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overset{+}{\mathbf{B}}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}})\,\overset{+}{\mathbf{v}}$$

Die B-Matrix kann formal aufgespalten werden in einen linearen, verformungsunabhängigen Teil sowie einen nichtlinearen, verformungsabhängigen Teil

$$\overset{+}{\varepsilon} = \left[\overset{+}{B}_{L} + \overset{+}{B}_{NL}(\bar{\tilde{u}})\right]\overset{+}{v}$$

Lecture V02B: Nichtlinearer Fachwerkstab

Vorgriff: vereinfachte Kinematik des Fachwerkstabs

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}\left\{u'^2 + w'^2\right\}$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{u}' + \frac{1}{2}\left\{\bar{u}'^2 + \bar{w}'^2\right\}$$

Die Grundzustandsgrößen sind Skalare und werden einfach in die beliebig nichtlinearen Gleichungen eingesetzt. Sie sind mit einem Diskretisierungsfehler behaftet, ansonsten aber exakt.

$$\overset{+}{\varepsilon} = (1+\bar{u}')\,\overset{+}{u}{}' + \bar{w}'\,\overset{+}{w}{}' = \begin{bmatrix}(1+\bar{u}') & \bar{w}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overset{+}{u}{}' \\ \overset{+}{w}{}'\end{bmatrix}$$

$$\overset{+}{\varepsilon} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1(\bar{u}') & \mathbf{B}_2(\bar{w}')\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_u \\ \mathbf{V}_w\end{bmatrix}$$

Der lineare Anteil der inkrementellen Verzerrung hängt von den Grundzustandsverschiebungen bzw. deren Ableitungen ab. Diese sind bekannt und nehmen im betrachteten Zustand fixe Werte an. Diese Werte ändern sich mit jedem Lastschritt und jeder Iteration. Für die Verschiebungszuwächse werden Ansätze eingesetzt. Dann entsteht die übliche Darstellung ε = B·V. Die B-Matrix enthält jetzt aber, in Gegensatz zur linearen Theorie, Anteile aus den Grundzustandsweggrößen. Damit hängt die resultierende Steifigkeitsmatrix ebenfalls vom aktuellen Verschiebungszustand ab. Sind die Verschiebungen Null, ergeben sich die linearen Matrizen.

Nichtlineare FEM: Verzerrungen III

Inkrementelle Verzerrungen, quadratisch in den Verformungsinkrementen

Analog kann man die quadratisch von den Verformungsinkrementen abhängigen inkrementellen Verzerrungen darstellen über eine vom Grundzustand abhängige B++-Matrix, die von links und rechts mit den inkrementellen Knotenfreiheitsgraden multipliziert wird. Bei der Variation ist zu beachten, dass wegen der quadratischen Abhängigkeit nach Produktregel variiert werden muss.

$$\overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}})^T \left.\frac{d^2\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tilde{\mathbf{u}}^2}\right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}} \;\Rightarrow\; \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\overset{+}{\mathbf{v}})^T \overset{++}{\mathbf{B}}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}})\,\overset{+}{\mathbf{v}} \;\Rightarrow\; \delta\overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\delta\overset{+}{\mathbf{v}})^T \left[\overset{++}{\mathbf{B}} + (\overset{++}{\mathbf{B}})^T\right]\overset{+}{\mathbf{v}}$$

Ebenso kann diese B++-Matrix in einen „linearen“ verformungsunabhängigen und einen „nichtlinearen“ verformungsabhängigen Anteil aufgespalten werden. Diese Aufspaltungen werden wir später bei der klassischen Stabilitätstheorie wieder treffen.

$$\overset{++}{\varepsilon} = (\overset{+}{v})^T \left[\overset{++}{B}_L + \overset{++}{B}_{NL}(\bar{\tilde{u}})\right]\overset{+}{v}$$

Nichtlineare FEM: Schnittgrößen I

Grundzustandsschnittgrößen

Die Grundzustandsschnittgrößen ergeben sich im allgemeinen Fall nichtlinearer Materialgesetze aus dem Integral des inkrementellen Werkstoffgesetzes über den Verzerrungspfad. Das Integral muss numerisch gelöst werden, was i. d. R. durch eine Summenbildung geschieht. Hierbei ist zu beachten, dass die endlichen Verzerrungsinkremente Δε, die innerhalb einer Iteration entstehen, immer aus der Differenz der *aktuellen Gesamtverzerrungen* und der *Gesamtverzerrung des vorherigen Schrittes* resultieren, so dass Informationen über den vorherigen Schritt abzuspeichern sind. Infolge der Nichtlinearität der kinematischen Gleichungen wäre es grundsätzlich falsch, Verzerrungszuwächse aus Verschiebungszuwächsen zu ermitteln. Da die Materialinformation in jedem Materialpunkt abzuspeichern ist, benötigen physikalisch nichtlineare Berechnungen sehr viel Speicherplatz.

$$\overline{\sigma} = \int_0^{\overline{\varepsilon}} \mathbf{E}_\mathrm{T}\, d\boldsymbol{\varepsilon} \approx \sum \mathbf{E}_\mathrm{T}\, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

Nichtlineare FEM: Schnittgrößen II

Inkrementelle Schnittgrößen

Die inkrementellen Schnittgrößen ergeben sich unmittelbar aus dem inkrementellen Materialgesetz.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \overset{+}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_T \overset{+}{\mathbf{B}} \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Diskretisiertes inkrementelles PVV

Inkrementelles PVV

$$-\int_V (\delta \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T (\overline{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}_T \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})\, dV$$

$$-\int_V (\delta \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \overline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV + \int_V \delta(\overset{+}{\mathbf{u}})^T (\overline{\mathbf{p}} + \Delta\mathbf{p})\, dV + RT = 0$$

Einsetzen der diskretisierten Variablen

Diskretisiertes inkrementelles PVV

$$-\delta(\overset{+}{\mathbf{v}})^T \left\{ \int_V (\overset{+}{\mathbf{B}})^T \overline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV \right.$$

$$+ \int_V (\overset{+}{\mathbf{B}})^T \mathbf{E}_T \overset{+}{\mathbf{B}}\, dV\, \overset{+}{\mathbf{v}} + \int_V [\overset{++}{\mathbf{B}} + (\overset{++}{\mathbf{B}})^T]\, \overline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV\, \overset{+}{\mathbf{v}}$$

$$\left. - \int_V \Omega^T \left(\overline{\mathbf{p}} + \Delta\mathbf{p}\right) dV \right\} = 0$$

Elementsteifigkeitsmatrizen

Die Steifigkeit setzt sich aus zwei grundsätzlich unterschiedlichen Anteilen zusammen:

- **Aus den *linear inkrementellen Verzerrungen* resultiert die sog. *nichtlineare Steifigkeitsmatrix*.**
- **Aus den *quadratisch inkrementellen Verzerrungen* resultiert die sog. *Anfangsspannungsmatrix*.**

Die Anfangsspannungsmatrix, auch *geometrische Steifigkeitsmatrix* genannt, hängt primär von den *Schnittgrößen* ab. Sind diese Null, gibt es keine geometrische Steifigkeit. Je nach Vorzeichen wirkt sie sich erhöhend oder erniedrigend auf die Gesamtsteifigkeit aus.

Die nichtlineare Steifigkeitsmatrix bezieht ihre Nichtlinearität aus den *Verformungen*, die in die B+-Matrix eingehen, sowie aus dem *physikalisch nichtlinearen Materialgesetz*. Bei linear-elastischem Verhalten verbleibt nur der Verschiebungseinfluss, so dass sich die nichtlineare Steifigkeitsmatrix dann aus der *linearen Steifigkeitsmatrix* und der sog. *Anfangsverschiebungs-matrix* zusammensetzt.

nichtlineare Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_{NL} = \int_V (\overset{+}{\mathbf{B}})^T \, \mathbf{E}_T \, \overset{+}{\mathbf{B}} \, dV$$

Anfangsspannungsmatrix bzw. geometrische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_{\sigma} = \mathbf{k}_g = \int_V ((\overset{++}{\mathbf{B}})^T + \overset{++}{\mathbf{B}}) \, \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dV$$

Elementkraftvektoren

Es entstehen drei Kraftvektoren auf Elementebene:

- **Der *Vektor der inneren Kräfte* aus der Arbeit der *Grundzustandschnittgrößen* an den *inkrementellen Verzerrungen*.**
- **Der *Elementlastvektor* im *Grundzustand*.**
- **Der *Elementlastvektor* infolge *einer Laststeigerung*.**

Der Vektor der inneren Kräfte beinhaltet die *energetisch äquivalenten Knotenkräfte* in Richtung der *ursprünglichen Freiheitsgrade* infolge von Schnittgrößen, die in Richtung des *verformten Elements* wirken.

Die Lastvektoren werden üblicherweise nicht neu berechnet, sondern ergeben sich im Falle von konservativer Belastung durch Skalierung der Referenzlastvektoren mit den jeweiligen Lastfaktoren.

Vektor der inneren Kräfte

$$\mathbf{f}_i = \int_V (\overset{+}{\mathbf{B}})^T \overline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV$$

Lastvektor (Grundzustand)

$$\overline{\mathbf{q}} = \int_V \boldsymbol{\Omega}^T \overline{\mathbf{p}}\, dV = \overline{\lambda}\, \mathbf{q}_{ref}$$

Lastvektor (Inkrement)

$$\Delta\mathbf{q} = \int_V \Omega^T \Delta\mathbf{p}\, dV = \Delta\lambda\, \mathbf{q}_{ref}$$

Transformation auf globale Freiheitsgrade

Die Elementmatrizen beziehen sich zunächst auf Freiheitsgrade, die in den kinematischen Gleichungen auftreten und dem Bauteilkoordinatensystem zugeordnet sind. Es handelt sich also um *lokale Elementmatrizen* und *–vektoren*. Die direkte Steifigkeitsmethode verlangt jedoch *globale Matrizen*, deren Freiheitsgrade einem gemeinsamen Referenzkoordinatensystem zugeordnet sind. Die Transformationsregeln können unmittelbar aus der linearen FEM übernommen werden.

Freiheitsgradtransformation global ⇒ lokal

$$\mathbf{v}_{\mathrm{lok}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{gl}}$$

Matrizentransformation lokal ⇒ global

$$\mathbf{k}_{\mathrm{L,gl}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{k}_{\mathrm{L,lok}} \cdot \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}_{\mathrm{T,gl}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{k}_{\mathrm{T,lok}} \cdot \mathbf{T} \qquad \mathbf{k}_{\mathrm{g,gl}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{k}_{\mathrm{g,lok}} \cdot \mathbf{T}$$

Vektorentransformation lokal ⇒ global

$$\mathbf{q}_{\mathrm{gl}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{q}_{\mathrm{lok}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{\mathrm{i,gl}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{i,lok}}$$

Tangentiales Elementgleichgewicht

Tangentiales Gleichgewicht

$$(\mathbf{k}_{NL} + \mathbf{k}_g)\overset{+}{\mathbf{v}} = \mathbf{k}_T\,\overset{+}{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{q}} + \Delta\mathbf{q} - \mathbf{f}_i$$

↓

Transformation auf globale Freiheitsgrade

↓

Aggregierung zu Systemmatrizen mittels der Methode der direkten Steifigkeit

↓

Iterative Lösung des nichtlinearen Systemgleichgewichts mit dem NEWTON/RAPHSON-Verfahren

Anfangsverformungsmatrix

Aufspaltung der B+-Matrix

$$\overset{+}{\mathbf{B}}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}}) = \overset{+}{\mathbf{B}}_{L} + \overset{+}{\mathbf{B}}_{NL}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}})$$

lineare Elastizität

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_0$$

nichtlineare Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_{NL} = \int_V [\overset{+}{\mathbf{B}}_L + \overset{+}{\mathbf{B}}_{NL}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}})]^T \, \mathbf{E}_0 \, [\overset{+}{\mathbf{B}}_L + \overset{+}{\mathbf{B}}_{NL}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}})] \, dV$$

Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_{NL} = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_U$$

lineare Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_L = \int_V (\overset{+}{\mathbf{B}})_L^T \, \mathbf{E}_0 \, \overset{+}{\mathbf{B}}_L \, dV$$

Anfangsverformungsmatrix

$$\mathbf{k}_U = \int_V (\overset{+}{\mathbf{B}}{}_L^T \mathbf{E}_0 \overset{+}{\mathbf{B}}_{NL} + \overset{+}{\mathbf{B}}{}_{NL}^T \mathbf{E}_0 \overset{+}{\mathbf{B}}_L + \overset{+}{\mathbf{B}}{}_{NL}^T \mathbf{E}_0 \overset{+}{\mathbf{B}}_{NL}) \, dV$$

Zusammenfassung

Die Diskretisierung des inkrementellen Prinzips der virtuellen Verschiebungen erfordert keine grundsätzlich neue Vorgehensweise. Die aus der linearen FEM bekannten Ansätze werden ohne Modifikation verwendet, allerdings jetzt für zwei Verschiebungsfelder: für die *Grundzustands-verschiebungen* und die *inkrementellen Verschiebungen*. Rein formales Einsetzen in das Arbeitsprinzip liefert dann die *nichtlineare Steifigkeitsmatrix* und die *geometrische Steifigkeitsmatrix*, welche zusammen die *tangentiale Steifigkeitsmatrix* bilden, den *Vektor der inneren Kräfte*, und die *Lastvektoren*.

Diese Elementmatrizen werden wie in der linearen FEM auf globale Freiheitsgrade transformiert und mittels der Methode der direkten Steifigkeit zu Systemmatrizen und Vektoren zusammengefügt. Das entstehende tangentiale Systemgleichgewicht wird iterativ gelöst.

Nächste Schritte

Als Bausteine für eine FE-Berechnung nichtlinearer Tragwerke liegen bis jetzt vor:

- **das inkrementelle Prinzip der virtuellen Verschiebungen,**
- **das Diskretisierungskonzept der FEM,**
- **die Methode der direkten Steifigkeiten,**
- **das NEWTON/RAPHSON-Verfahren.**

Allen diesen Bausteinen haftet eine gewisse Handwerklichkeit an: man braucht keine Inspiration, um aus einer nichtlinearen kinematischen Gleichung die zugehörige inkrementelle Form abzuleiten. Was jedoch zur Vervollständigung des Rechenmodells fehlt, ist:

Frage:

Wie gelangt man zu den eigentlichen nichtlinearen Gleichungen, die das physikalische Problem beschreiben, also zu den *nichtlinearen kinematischen Gleichungen* und den *nichtlinearen Materialgesetzen*? Das Thema „nichtlineare kinematische Gleichungen“ wird für den ebenen Fachwerkstab im Abschnitt 3 „ Der geometrisch nichtlineare Fachwerkstab“ besprochen.