Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

Vorlesung 2

Das inkrementell-iterative Berechnungskonzept

Teil B: Das inkrementelle Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Überblick

In Teil A dieser Vorlesung haben wir mit dem *NEWTON/RAPHSON-Verfahren* einen *Algorithmus* kennengelernt, mit dem man *beliebige nichtlineare Gleichungssysteme iterativ* mit beliebiger Genauigkeit lösen kann. An einem einfachen Beispiel – einem Fachwerkbock – konnte man sehen, dass man in der Tat mit wenigen Iterationen praktisch exaktes Gleichgewicht am verformten Tragwerk herstellen kann, sofern die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung *analytisch bekannt* ist.

Für komplexere Tragwerke ist eine derartige analytische Lösung nicht möglich. Wir haben jedoch bereits mit der *Methode der Finiten Elemente* ein allgemeingültiges Konzept zur Berechnung *beliebiger Tragwerke* kennengelernt.

Im Teil B der Vorlesung 2 erfolgt deshalb eine Kombination des inkrementell-iterativen Konzepts des Teils A mit dem FE-Konzept. Als Ergebnis werden wir eine *inkrementelle FE-Formulierung* erhalten, die auf beliebige Tragwerke angewendet werden kann und damit im Prinzip die nichtlineare Berechnung beliebiger Tragwerke erlaubt.

Nichtlineare Gleichgewichtsbedingung

Diskrete Formulierung des Gleichgewichts

innere Kräfte $\leftarrow$ $$G(V) = P$$ $\rightarrow$ äußere Lasten

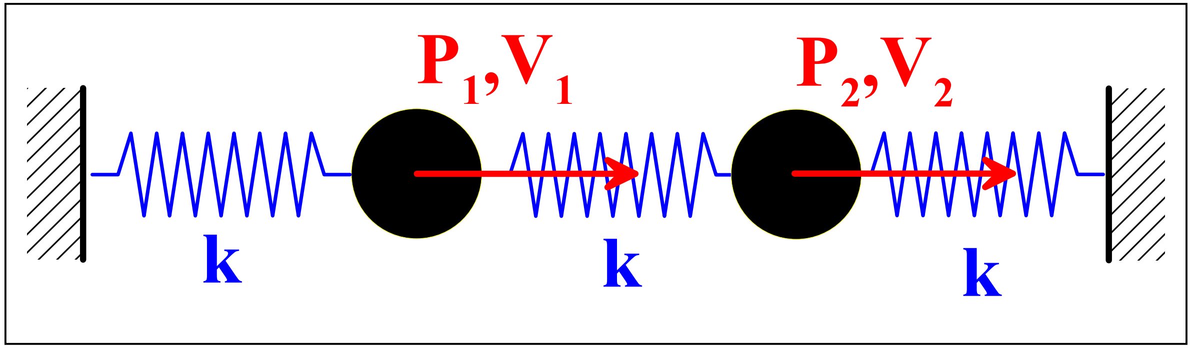
$\Downarrow$

Linearisierung: tangentiale Gleichgewichtsbedingung

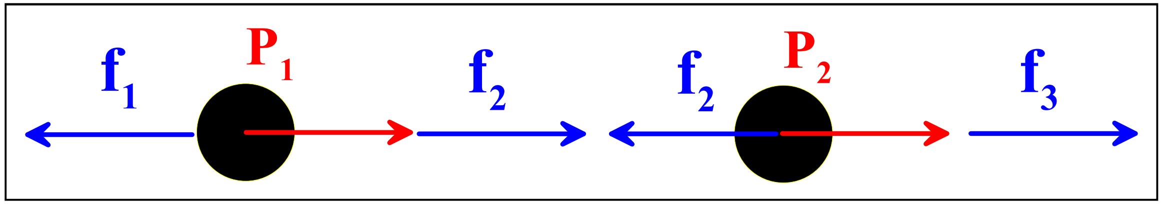
$$K_T \overset{+}{V} = \overline{P} + \overset{+}{P} - F_i$$

Beispiel:
Zweifreiheitsgradsystem mit nichtlinearen Federn

Struktur

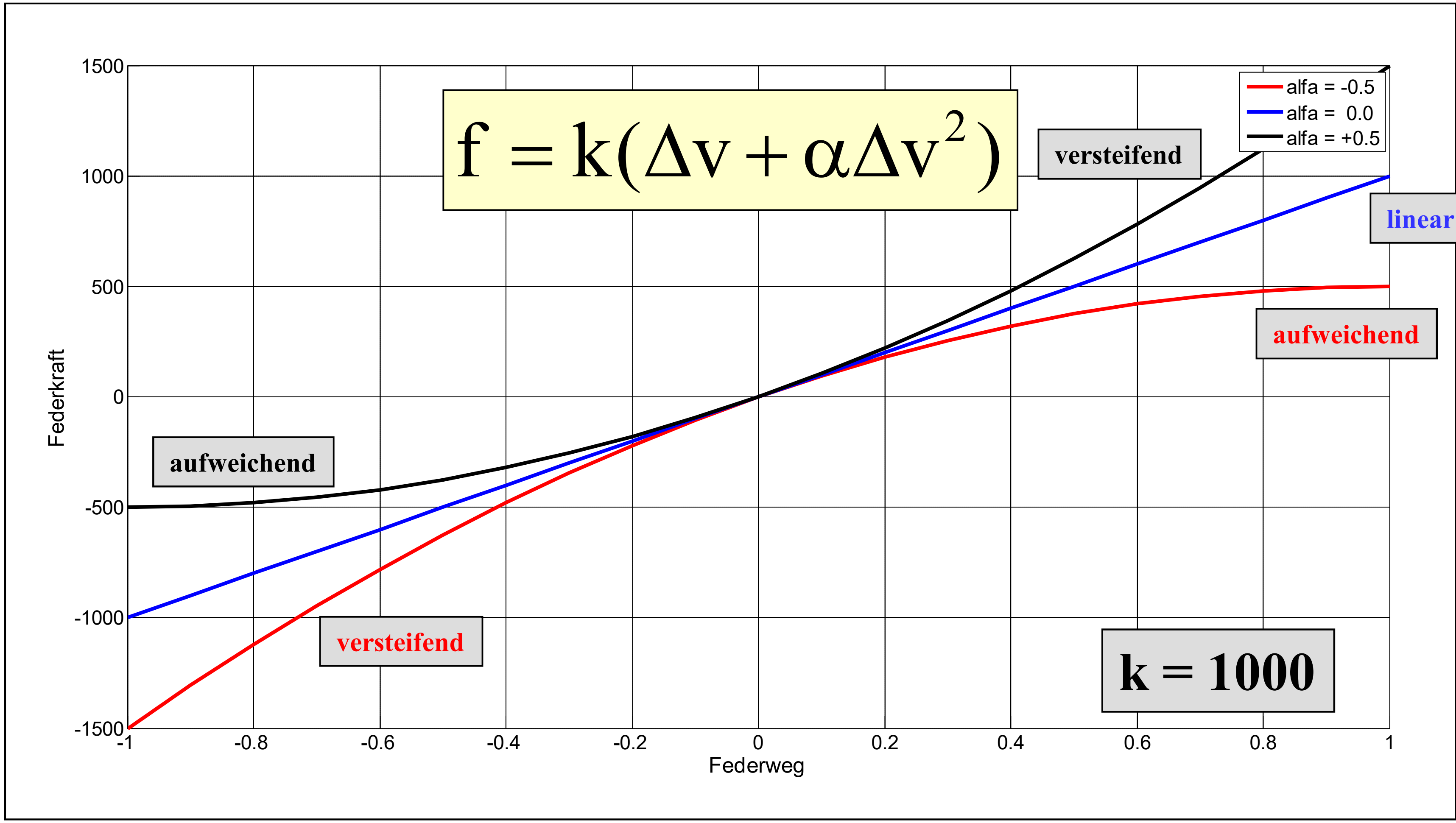


Gleichgewicht



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} f_1 - f_2 \\ f_2 - f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

Physikalisch nichtlineares Federgesetz



Tangentiale Gleichgewichtsbedingung

nichtlineare Federkräfte

$$f_1 = k(V_1 + \alpha V_1^2)$$

$$f_2 = k([V_2 - V_1] + \alpha [V_2 - V_1]^2)$$

$$f_3 = k(-V_2 + \alpha V_2^2)$$

nichtlineare Gleichgewichtsfunktion

$$\mathbf{G} = k \begin{bmatrix} (V_1 + \alpha V_1^2) - ([V_2 - V_1] + \alpha [V_2 - V_1]^2) \\ ([V_2 - V_1] + \alpha [V_2 - V_1]^2) - (-V_2 + \alpha V_2^2) \end{bmatrix}$$

tangentiale Gleichgewichtsbedingung

$$k \begin{bmatrix} 2 + 2\alpha \overline{V}_2 & -1 - 2\alpha(\overline{V}_2 - \overline{V}_1) \\ -1 - 2\alpha(\overline{V}_2 - \overline{V}_1) & 2 - 2\alpha \overline{V}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{+}{V}_1 \\ \overset{+}{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} (\overline{V}_1 + \alpha \overline{V}_1^2) - ([\overline{V}_2 - \overline{V}_1] + \alpha [\overline{V}_2 - \overline{V}_1]^2) \\ ([\overline{V}_2 - \overline{V}_1] + \alpha [\overline{V}_2 - \overline{V}_1]^2) - (-\overline{V}_2 + \alpha \overline{V}_2^2) \end{bmatrix}$$

iterative Lösung mit dem NEWTON/RAPHSON-Verfahren

Lineares Problem mit FE: Direkte Steifigkeitsmethode

Elementmatrizen:

Elementsteifigkeitsmatrizen k

Elementlastvektoren p

Frage:

Läuft eine nichtlineare Berechnung analog ab?

Zusammenmischen zu Systemmatrizen

KV=P

Lösung des linearen Gleichungssystems:

Verformungen V

elementweise:

Schnittgrößenberechnung

Nichtlineares Problem mit FE: Direkte Steifigkeitsmethode

Elementmatrizen:

tangentiale Elementsteifigkeitsmatrizen k_T

Vektoren der inneren Kräfte f_i

Elementlastvektoren p

Antwort:

JA!

Zusammenmischen zu Systemmatrizen

$$K_T \Delta V = P - F_i = P_u$$

iterative Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems:

nichtlineare Verformungen V

elementweise:

nichtlineare Schnittgrößenberechnung

Rückerinnerung: Schwache Form des Gleichgewichts

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta W = -\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}\, dV + \text{Randterme} = 0$$

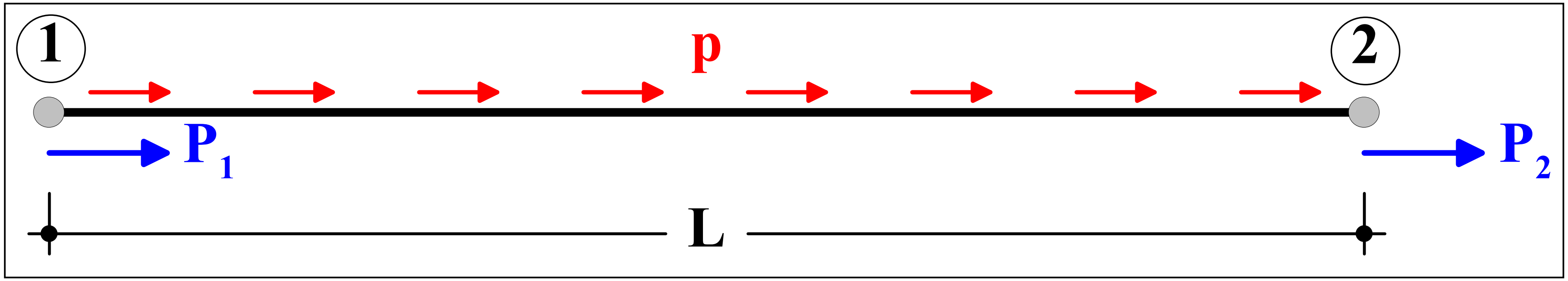
Integraltransformation nach GAUSS/GREEN

EULER-LAGRANGE-Gleichungen: Gleichgewichtsdifferentialgleichungen

$$\mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

Beispiel: Fachwerkstab

Element endlicher Länge L:



Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$\delta W_i + \delta W_a = -\int_L \delta\varepsilon^T N dx + \int_L \delta u^T p dx + P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 = 0$$

Es muss gelten:

- **Gleichgewicht im Innern des Stabes muss erfüllt sein.**
- **Der Normalkraftzustand muss kompatibel zu den Randkräften sein.**

Voraussetzung des PVV: Erfüllung der Kinematik

Kinematische Gleichung des Fachwerkstabs:

$$\varepsilon = u'$$

$$\delta W_i = -\int_L N \delta u' dx$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\int_a^b (f' \cdot g) dx = (f \cdot g)\Big|_a^b - \int_a^b (f \cdot g') dx$$

Integraltransformation = partielle Integration

$$\int_L N\, \delta u' dx = N \delta u\Big|_1^2 - \int_L N'\, \delta u\, dx$$

umgeformtes Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\int_L (N' + p)\, \delta u\, dx + (P_1 + N_1)\, \delta u_1 + (P_2 - N_2)\, \delta u_2 = 0$$

EULER-LAGRANGE-Gleichungen

Gleichgewicht im Innern des Körpers (unverformter Stab):

$$\int_L (N' + p)\, \delta u \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad N' = -p$$

Dynamische Randbedingungen:

$$(P_1 + N_1)\, \delta u_1 + (P_2 - N_2)\, \delta u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_1 &= -P_1 \\ N_2 &= P_2 \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind identisch zu denjenigen, die man durch Gleichgewichtsbetrachtung am *differentiellen Element* erhält (Mechanik I) und die Gleichgewicht am *unverformten Element* beschreiben. Würde man eine *nichtlineare Kinematik* verwenden (warum kinematische Gleichungen im Prinzip immer nichtlinear sind kommt später), erhielte man automatisch Gleichgewicht am *verformten differentiellen Element*.

Was ist bei nichtlinearem Tragverhalten?

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen stellt eine universell gültige *Arbeitsaussage* dar. Es gilt *unabhängig vom Materialgesetz*, ist also auch bei physikalisch nichtlinearen Problemen gültig. Voraussetzung für die Gültigkeit des PVV ist jedoch die Erfüllung der *kinematischen Gleichungen*. Einschränkungen hinsichtlich der Gestalt der kinematischen Gleichungen gibt es nicht. Somit gilt:

- **Sind die kinematischen Gleichungen *linear*, liefern die zugehörigen EULER-LAGRANGEschen Gleichungen die *Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Tragwerk*.**
- **Sind die kinematischen Gleichungen hingegen *nichtlinear* (warum diese von ihrer Natur her nichtlinear sind, sehen wir später), liefern die zugehörigen EULER-LAGRANGEschen Gleichungen die *Gleichgewichtsbedingungen am verformten Tragwerk*. Jeder kinematischen Gleichung entspricht somit genau eine dieser zugeordneten *konsistente* Gleichgewichts-bedingung.**

Da das PVV die schwache Form des Gleichgewichts darstellt, und eine inkrementelle Betrachtung der starken Form des Gleichgewichts (TAYLOR-Reihenentwicklung) zur tangentialen Gleichgewichtsbetrachtung führte, muss folgerichtig eine inkrementelle Betrachtung des PVV zu einer *schwachen Form der tangentialen Gleichgewichtsbedingung* führen.

Inkrementelle Form des PVV

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta W = -\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} \, dV + \text{Randterme} = 0$$

Das Arbeitsprinzip enthält *vier Sätze* von Variablen:

- **die *Lasten p***
- **die *Verformungen u*, die mit den Lasten Arbeit leisten**
- **die *Verzerrungen ε***
- **die *Schnittgrößen σ*, die mit den Verzerrungen Arbeit leisten**

Alle Variablen müssen dem Inkrementierungsprozess unterworfen werden. Hierbei können die unabhängigen Variablen direkt inkrementiert werden, die abhängigen sind hingegen einem Linearisierungsprozess zu unterwerfen.

Inkrementierung der Lasten

Wir gehen davon aus, dass der Belastungszustand vorgegeben ist und nicht von den Verformungen abhängt. Man spricht dann von *konservativen Lasten*. Es gibt auch Probleme, wo dies nicht der Fall ist, z.B. bei Drucklasten infolge Wasser- oder Luftdruck. Derartige Lasten stehen immer senkrecht auf der belasteten Fläche. Wenn sich also diese verformt, würde die Drucklast ihre Richtung, eventuell auch ihre Größe ändern. Dann liegen *nichtkonservative Lasten* vor, die wir im Moment aber ausschließen.

Somit entsteht eine Änderung des Lastzustandes ausschließlich durch eine vorgegebene und damit bekannte Lasterhöhung oder Lasterniedrigung.

Inkrementelle Belastung

$$\mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}} + \Delta\mathbf{p}$$

Δp ist vorgegeben!

Durch Δp entsteht ein Lastschritt!

Inkrementierung der Verformungen

Die Verformungen stellen die *primären* und damit *unabhängigen Variablen* des Weggrößenverfahrens dar. Somit können sie direkt in eine *Grundzustandsverformung* und eine *inkrementelle Verformung* aufgespalten werden.

Inkrementeller Verformungszustand

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \overset{+}{\mathbf{u}}$$

Benötigt wird im PVV die *Variation der Verformung δu*. Da der Grundzustand bekannt und damit fest ist, kann er nicht variiert werden. Eine Änderung der Gesamtverformung kann somit nur durch eine Änderung der noch nicht festgelegten unbekannten Verschiebungsinkremente erfolgen. Die Variation von v erstreckt sich somit nur auf die Variation des Verschiebungsinkrements.

Variation des inkrementellen Verformungszustandes

$$\delta\mathbf{u} = \delta\overset{+}{\mathbf{u}}$$

Verzerrungszustand

Eine Änderung des *Verschiebungszustands* vom *Grundzustand* in den *Nachbarzustand* zieht eine entsprechende Änderung des Verzerrungszustands nach sich. Diese ist jedoch nicht unabhängig von der Verschiebungsänderung, sondern ergibt sich aus dieser über die kinematischen Gleichungen. Im Linearen gilt das Superpositionsprinzip und es ergibt sich das *Verzerrungsinkrement* unabhängig vom Grundzustand direkt aus dem *Verschiebungsinkrement*.

Im Nichtlinearen gilt das nicht: die *Gesamtverzerrung* ist mit der *Gesamtverschiebung* über eine beliebige nichtlineare Gleichung verknüpft. Über die *Zuwächse* kann man zunächst nichts sagen.

Nichtlineare kinematische Gleichungen: implizite Formulierung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

Man schreibt i.d.R. wie oben kurz, dass die Verzerrungen Funktionen der Verschiebungen sind. Genauer betrachtet sind sie jedoch Funktionen der *Verschiebungen* sowie ihrer *Ableitungen* – in der Strukturmechanik bis zu den 2. Ableitungen. Um dies deutlich zu machen, wird die Variable u mit einer Tilde versehen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})$$

Inkrementierung der Verzerrungen

Um später Verschiebungsansätze in die kinematischen Gleichungen einsetzen zu können, müssen diese in eine Form gebracht werden, in der die Verzerrungen explizit von den Verschiebungsinkrementen abhängen. Dies erreicht man über eine *Taylor-Reihenwicklung* der *Verzerrungen* um den bekannten *Grundzustand* bzgl. *der Verschiebungen*. Die Taylorreihe wird nach dem *quadratischen Glied* abgebrochen (warum quadratisch: gleich …).

Entwicklung in einer quadratischen Taylorreihe

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}} + \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}}) \approx \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\tilde{\mathbf{u}}}) + \left.\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tilde{\mathbf{u}}}\right|_{\tilde{\mathbf{u}}=\bar{\tilde{\mathbf{u}}}} \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}} + \frac{1}{2}(\overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}})^T \left.\frac{d^2\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tilde{\mathbf{u}}^2}\right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}}$$

Der Verzerrungszustand besteht aus mehreren Komponenten, z.B. ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{yy}, die wiederum von mehreren Verschiebungskomponenten, z.B. u_x und u_y, sowie deren Ableitungen abhängen. Wie ist die obige superkompakte Darstellung zu verstehen? Zunächst betrachten wir jede Komponente des Verzerrungszustands für sich, so dass ε zu einem Skalar wird.

Beispiel: Kinematik des ebenen Fachwerkstabs

Beim ebenen Fachwerkstab hängt die Dehnung nur von der 1. Ableitung der Längsverschiebung u' und der 1. Ableitung der Durchbiegung w' ab. Die Verschiebungen selbst sowie höhere Ableitungen tauchen nicht auf. Das genaue Aussehen der kinematischen Gleichung wird in Vorlesung 2 „Der geometrisch nichtlineare Fachwerkstab“ abgeleitet.

Verschiebungsinkremente

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} u' \\ w' \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\tilde{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{u}' \\ \bar{w}' \end{bmatrix} \rightarrow \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \overset{+}{u}' \\ \overset{+}{w}' \end{bmatrix}$$

Vorgriff: vereinfachte Kinematik des Fachwerkstabs

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}\left\{u'^2 + w'^2\right\}$$

Nichtlineare Kinematik

$$\varepsilon = \varepsilon(u', w')$$

1. Ableitung

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tilde{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial u'} & \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial w'} \end{bmatrix}$$

2. Ableitung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tilde{u}^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u' \partial u'} & \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial w' \partial u'} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u' \partial w'} & \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial w' \partial w'} \end{bmatrix}$$

Inkrementelle Verzerrungen des Fachwerkstabs I

Lineares Glied der TAYLOR-Reihe

$$\overset{+}{\varepsilon} = \left.\frac{d\varepsilon}{d\tilde{\mathbf{u}}}\right|_{\tilde{\mathbf{u}}=\tilde{\bar{\mathbf{u}}}} \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}}$$

$$\overset{+}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{u}'} & \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{w}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{+}{u}' \\ \overset{+}{w}' \end{bmatrix}$$

$$\overset{+}{\varepsilon} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{u}'}\overset{+}{u}' + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{w}'}\overset{+}{w}'$$

Konkretes Beispiel: vereinfachte Kinematik des ebenen Fachwerkstabs

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}\left\{u'^2 + w'^2\right\}$$

$$\frac{d\varepsilon}{du'} = 1 + u' \qquad \frac{d\varepsilon}{dw'} = w'$$

$$\overset{+}{\varepsilon} = (1 + \bar{u}')\,\overset{+}{u}' + \bar{w}'\,\overset{+}{w}'$$

Inkrementelle Verzerrungen des Fachwerkstabs II

Quadratisches Glied der TAYLOR-Reihe

$$\overset{++}{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}})^{\mathrm{T}} \left. \frac{d^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{d\tilde{\mathbf{u}}^2} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \overset{+}{\tilde{\mathbf{u}}}$$

$$\Rightarrow \quad \overset{++}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overset{+}{u}' & \overset{+}{w}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{u}' \partial \bar{u}'} & \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{w}' \partial \bar{u}'} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{u}' \partial \bar{w}'} & \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{w}' \partial \bar{w}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{+}{u}' \\ \overset{+}{w}' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overset{++}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{u}' \partial \bar{u}'} \overset{+}{u}' \overset{+}{u}' + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{w}' \partial \bar{u}'} \overset{+}{u}' \overset{+}{w}' + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{w}' \partial \bar{w}'} \overset{+}{w}' \overset{+}{w}' \right\}$$

Konkretes Beispiel: vereinfachte Kinematik des ebenen Fachwerkstabs

$$\frac{d\varepsilon}{du'} = 1 + u' \qquad \frac{d\varepsilon}{dw'} = w' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\varepsilon}{du'du'} = 1 \qquad \frac{d^2\varepsilon}{du'dw'} = 0 \qquad \frac{d^2\varepsilon}{dw'dw'} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\overset{++}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[(\overset{+}{u}')^2 + (\overset{+}{w}')^2 \right]$$

Abkürzungen für die Terme der TAYLOR-Reihe

Wir sortieren die Terme der TAYLOR-Reihe entsprechend ihres Abhängigkeitsgrades von den Verschiebungsinkrementen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$ → **Grundzustandverzerrungen, unabhängig von den Inkrementen**

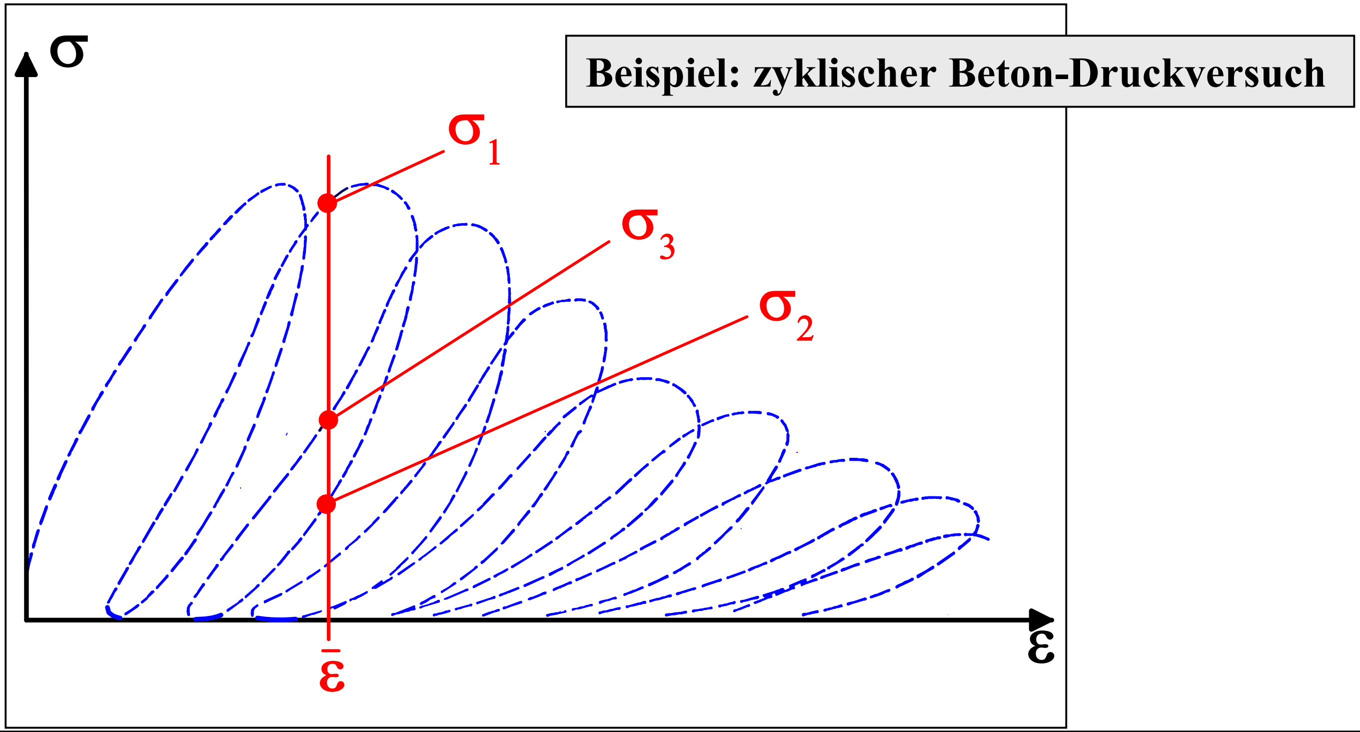
$$+ \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$ → **inkrementelle Verzerrungen, linear in den Inkrementen**

$$+ \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$ → **inkrementelle Verzerrungen, quadratisch in den Inkrementen**

Variation des Verzerrungszustands

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta\overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Nichtlineare Materialgesetze

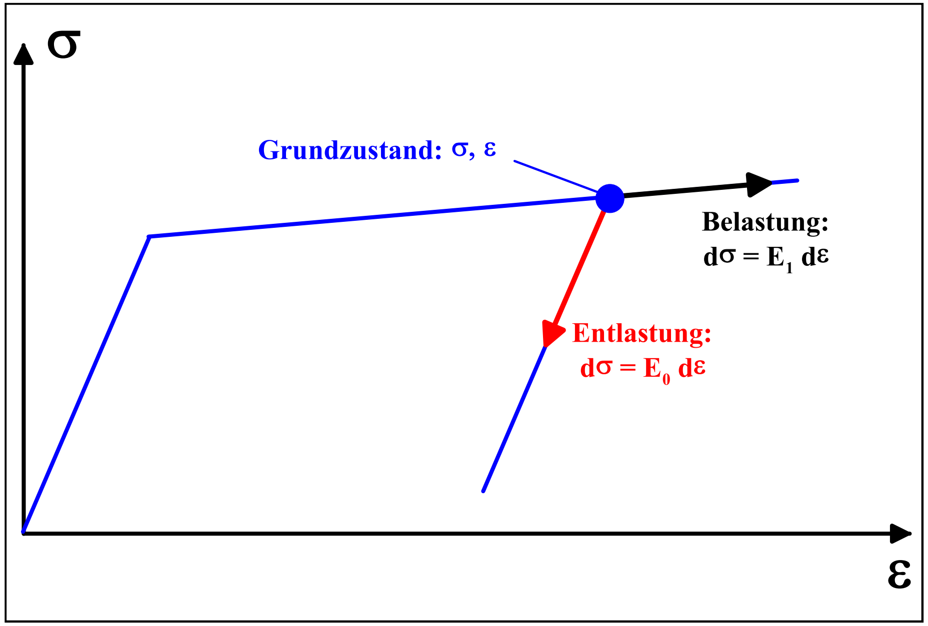


In der Regel gibt es *keinen funktionalen Zusammenhang* mehr zwischen der Verzerrung und der Spannung. Durch Entlastungen gehören zu einem Verzerrungszustand mehrere Spannungszustände, die sich durch ihre *Verzerrungsgeschichte* unterscheiden.

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, t)$$

Die Modellierung physikalisch nichtlinearen Verhaltens ist sehr kompliziert!

Inkrementelle Materialgesetze



Nichtlineare Materialgesetze lassen sich i. d. R. nur *inkrementell* formulieren. Je nach Verzerrungsinkrement *verzweigt* das Gesetz in *unterschiedliche Pfade*. Somit ist es nur möglich, mittels eines *tangentialen Materialtensors* ein *Verzerrungsinkrement* mit einem *Spannungsinkrement* zu verknüpfen.

Inkrementelles Materialgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}_T \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Der Spannungszustand ergibt sich dann durch Integration des inkrementellen Materialgesetzes längs der Verzerrungsgeschichte. Mathematisch stellt das ein Anfangswertproblem dar, welches auf Materialpunktebene spezielle numerische Probleme aufwirft.

Spannungszustand

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \int_0^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \mathbf{E}_T \, d\boldsymbol{\varepsilon}$$

Inkrementelles Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Prinzip der virtuellen Verschiebungen: Gleichgewicht im *Nachbarzustand*

$$\delta W = -\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}\, dV + \text{Randterme} = 0$$

inkrementelle Formulierungen einsetzen

$$-\int_V (\delta \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T (\overline{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}_T \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})\, dV + \int_V \delta(\overset{+}{\mathbf{u}})^T (\overline{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p})\, dV + RT = 0$$

Mathematische Interpretation

Jedes „+“ bezeichnet eine lineare Abhängigkeit der entsprechenden Variable von den Verschiebungsinkrementen. Später werden wir für die Verschiebungsinkremente Ansätze wählen. Ein Ansatz stellt aus Sicht der Matrizenalgebra immer auch einen Vektor, d.h. eine Zeilen- oder Spaltenmatrix dar. Das Produkt zweier Vektoren ergibt eine Matrix, das Produkt von mehr als zwei Vektoren würde ein höheres Gebilde darstellen (bei drei Vektoren könnte man sich das als Volumen vorstellen), welches außerhalb der Matrizenalgebra liegt.

ein + → **Ergebnis ist ein *Vektor***

zwei + → **Ergebnis ist eine *Matrix***

drei + → **Ergebnis kann mit der Matrizenalgebra nicht erfasst werden. Damit müssen diese Anteile im Rahmen der Linearisierung vernachlässigt werden.**

Vernachlässigung aller nichterfassbaren Terme

Inkrementelles Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$-\int_V (\delta\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta\overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T (\overline{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}_T\,\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,dV + \int_V \delta(\overset{+}{\mathbf{u}})^T (\overline{\mathbf{p}} + \Delta\mathbf{p})\,dV + RT = 0$$

Linearisierung

Linearisiertes inkrementelles Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$-\int_V (\delta\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,dV - \int_V (\delta\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{E}_T\,\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}}\,dV$$

$$-\int_V (\delta\overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,dV + \int_V \delta(\overset{+}{\mathbf{u}})^T \overline{\mathbf{p}}\,dV + \int_V \delta(\overset{+}{\mathbf{u}})^T \Delta\mathbf{p}\,dV + RT = 0$$

Interpretation der Anteile

$$\int_V (\delta \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{E}_T \, \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV$$

Steifigkeitsmatrix k_e,
abhängig von den Grundzustandsverschiebungen

$$\int_V (\delta \, \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \overline{\boldsymbol{\sigma}} \, dV$$

Steifigkeitsmatrix k_g,
abhängig von den Grundzustandsschnittgrößen

$$\int_V (\delta \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \overline{\boldsymbol{\sigma}} \, dV$$

Kraftvektor f_i,
Vektor der inneren Kräfte

$$\int_V \delta(\overset{+}{\mathbf{u}})^T \overline{\mathbf{p}} \, dV$$

Kraftvektor p,
Lastvektor des Grundzustandes

$$\int_V \delta(\overset{+}{\mathbf{u}})^T \Delta\mathbf{p} \, dV$$

Kraftvektor Δp,
inkrementeller Lastvektor

Tangentiale Gleichgewichtsbedingung

Die *Inkrementierung* und *Linearisierung* des Arbeitsprinzips liefert eine Anzahl von *Teilintegralen*, die nach *Diskretisierung* zu Elementmatrizen und Elementvektoren führen:

- **Die *tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix* setzt sich aus zwei Anteilen zusammen**
  - **Der *(elastischen) Matrix* k_e, die von den *Grundzustandsverformungen* abhängt.**
  - **Der *geometrischen Matrix* k_g, die von den *Grundzustandsschnittgrößen* (und den Verformungen) abhängt.**
- **Der Vektor der inneren Kräfte hängt von den *Grundzustandsverformungen* und den *Grundzustandsschnittgrößen* ab und liefert die aus den Schnittgrößen resultierenden *Knotenkräfte* in Richtung des *verformten Elements*.**
- **Die Lastvektoren unterscheiden sich nicht von der linearen FE-Formulierung wegen der Annahme konservativer Lasten.**

tangentiale Gleichgewichtsbedingung

$$(\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g) \cdot \overset{+}{\mathbf{v}} = \mathbf{k}_T \cdot \overset{+}{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{p}} + \Delta\mathbf{p}$$

Zusammenfassung

Die Methode der Finiten Elemente basiert grundsätzlich auf Variationsformulierungen. Das Weggrößenverfahren im Besonderen geht vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen aus, welches inhaltsgleich zur *Gleichgewichtsbedingung* ist.

Somit lässt sich durch Inkrementierung sämtlicher mechanischer Variablen um einen bekannten Grundzustand eine linearisierte Form des Arbeitsprinzips herleiten, welche dann inhaltsgleich zur *tangentialen Gleichgewichtsbedingung* ist.

Durch Diskretisierung der entstehenden Teilintegtrale entstehen dann automatisch die Elementmatrizen, die das tangentiale Gleichgewicht auf *Elementebene* beschreiben. Eine Aggregierung zu *Systemmatrizen* mittels der bekannten *Methode der direkten Steifigkeit* liefert dann die tangentiale Gleichgewichtsbedingung auf *Tragwerksebene*, die mittels des NEWTON/RAPHSON-Verfahrens mit beliebiger Genauigkeit iterativ gelöst werden kann.

Damit ist es im Prinzip möglich, jegliche Art von Tragwerken (Stabtragwerke, Flächentragwerke, Kontinuumstragwerke) unter beliebigen Nichtlinearitäten (geometrische und physikalische) zu modellieren und zu berechnen.

Weitere Schritte

Frage 1:

Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass die nichtlinearen kinematischen Gleichungen sowie das inkrementelle Materialgesetz bekannt sind. Die Frage, wie diese aussehen und wie man diese herleitet, wurde bislang elegant umschifft:

- **Wie leitet man kinematische Gleichungen für beliebig große Verformungen ab?**
- **Wie modelliert man inelastisches Materialverhalten?**

Diesen Fragen wird in Vorlesung 3 "Der geometrisch nichtlineare Fachwerkstab" und Vorlesung 8 "Physikalisch nichtlineare Probleme" nachgegangen.

Frage 2:

Wir haben schon angedeutet, dass aus der Diskretisierung der durch die Inkrementierung entstandenen Teilintegrale Elementmatrizen resultieren werden, die das tangentiale Gleichgewicht auf Elementebene beschreiben. Wie die Diskretisierung vonstatten geht, und ob hierbei Dinge eventuell anders ablaufen als im linearen Fall, ist Thema des dritten und letzen Teils C dieser Vorlesung an: "Diskretisierung des inkrementellen Arbeitsprinzips".