Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

Vorlesung 2

Das inkrementell-iterative Berechnungskonzept

Teil A: Die tangentiale Gleichgewichtsbedingung

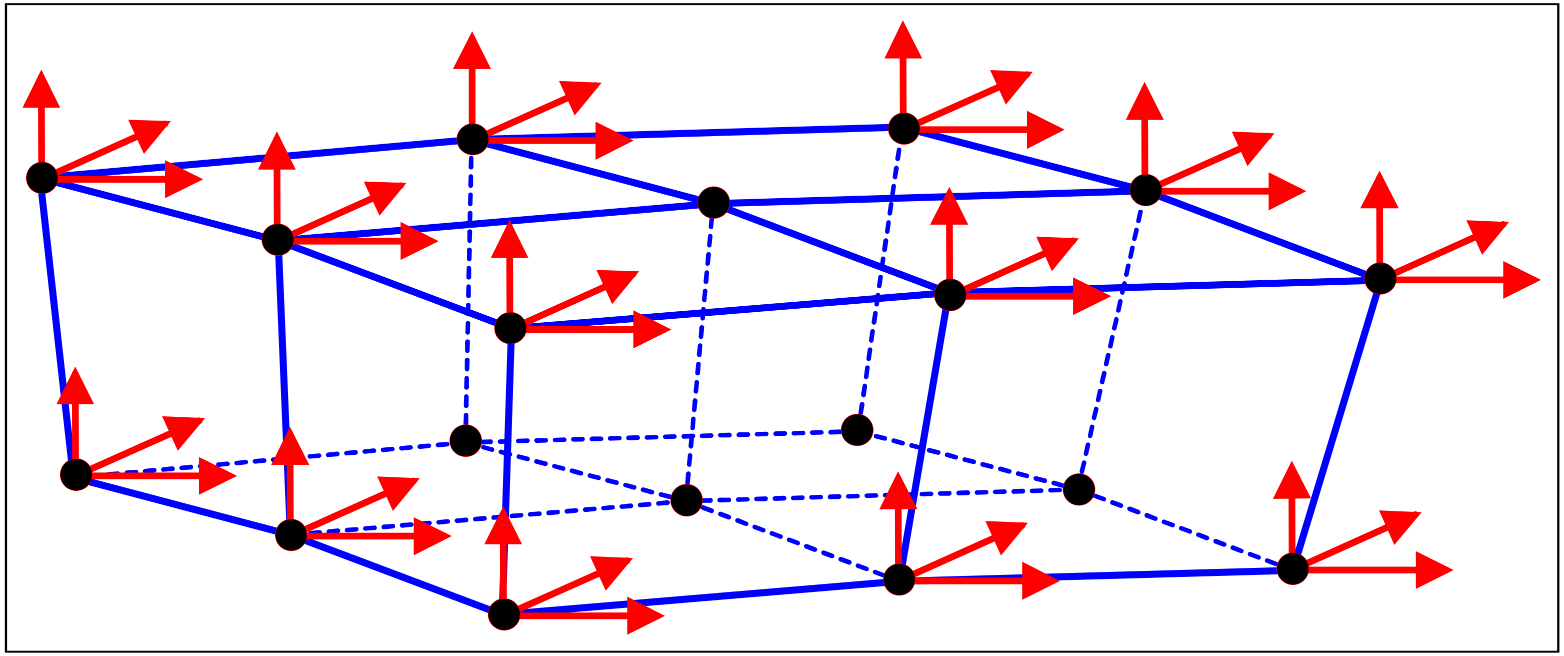
Überblick

Wir haben in der Einführung gesehen, dass sich Tragwerke durch den Einfluss der Verformungen auf die Gleichgewichtsbedingung (*geometrische Nichtlinearität*) sowie nichtlineares Materialverhalten (*Plastizität etc.*) grundsätzlich nichtlinear verhalten. Sind Verformungen und Spannungen ausreichend klein, können die nichtlinearen Effekte vernachlässigt werden, und es kommen lineare Berechnungsverfahren zum Einsatz.

Sind die Nichtlinearitäten hingegen relevant, benötigen wir Berechnungsmethoden, um die nichtlineare Tragwerksantwort ausreichend genau berechnen zu können. In der Vorlesung 2 wird ein derartiges Berechnungskonzept entwickelt. Teil A geht das Problem zunächst allgemein, losgelöst von Tragwerken oder Art der Nichtlinearitäten an:

- **Nichtlineare Formulierung**
- **TAYLOR-Reihen**
- **Das klassische NEWTON-Verfahren:**
  - **Prediktorschritt**
  - **Korrektorschritte**
- **Verallgemeinerung: das NEWTON/RAPHSON-Verfahren**
- **Pfadverfolgung mittels inkrementell-iterativer Algorithmen**

Rückblick: Diskrete Systeme



FE-Konzept:

- **Das kontinuierliche Tragwerk wird in finite Elemente eingeteilt**
- **Das Verschiebungsfeld wird durch eine endliche Zahl von Knotenfreiheitsgraden angenähert.**

Lineare diskrete Systeme

Grundgleichung auf Systemebene:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \bullet & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \bullet & K_{2n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ K_{n1} & K_{n2} & \bullet & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \bullet \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \bullet \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{KV = P}}$$

Steifigkeitsmatrix:

- **Art des Tragwerks**
- **Topologie**
- **Geometrie**
- **Lagerbedingungen**
- **Querschnitte**
- **Materialdaten**
- **mechanisches Modell**

Nichtlineare diskrete Systeme

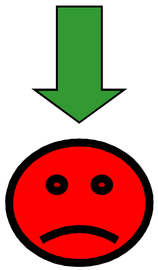
Frage: gibt es eine analoge Gleichung für nichtlineare Probleme?

Dann würde das mathematische Problem wieder in der Lösung eines linearen Gleichungssystems bestehen und wir würden auf Systemebene keine Neuentwicklungen benötigen.

Einzig auf Elementebene müssten wir Methoden zur Ermittlung der nichtlinearen Matrizen (Steifigkeitsmatrix und Lastvektor) entwickeln, die dann wiederum mit der Methode der direkten Steifigkeit zu Systemmatrizen zusammengefügt werden.

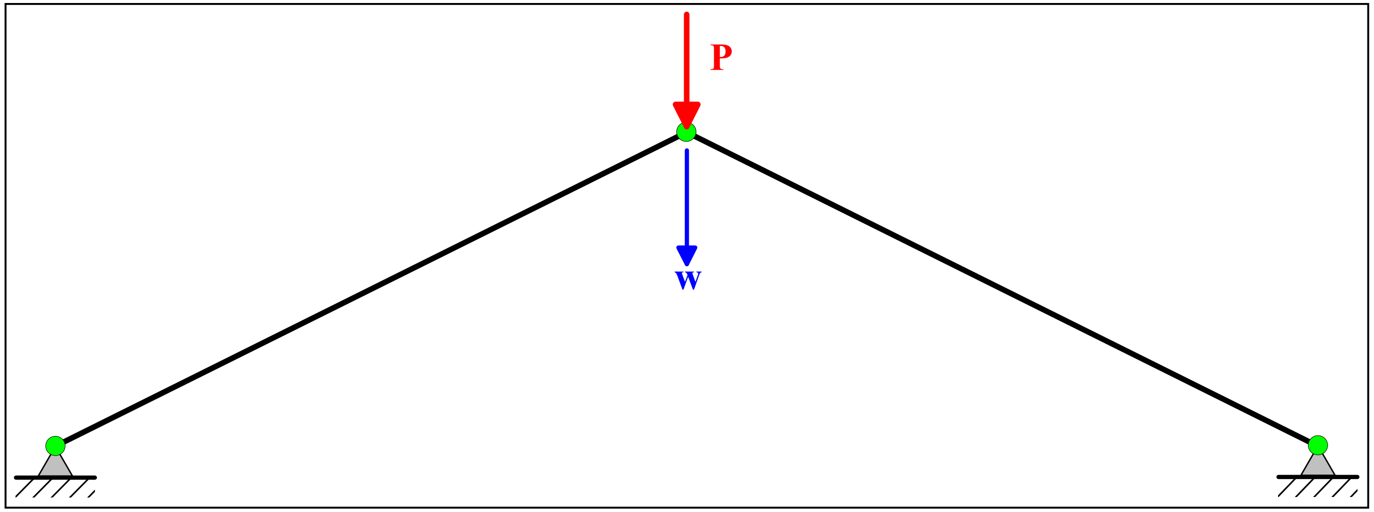
$$\mathbf{K}_{\mathbf{nl}}\mathbf{V}_{\mathbf{nl}} = \mathbf{P}_{\mathbf{nl}}$$

Antwort: NEIN!!!!



Rückerinnerung an Vorlesung 01: Fachwerkbock

System mit einem Freiheitsgrad



Gleichgewicht am verformten System:

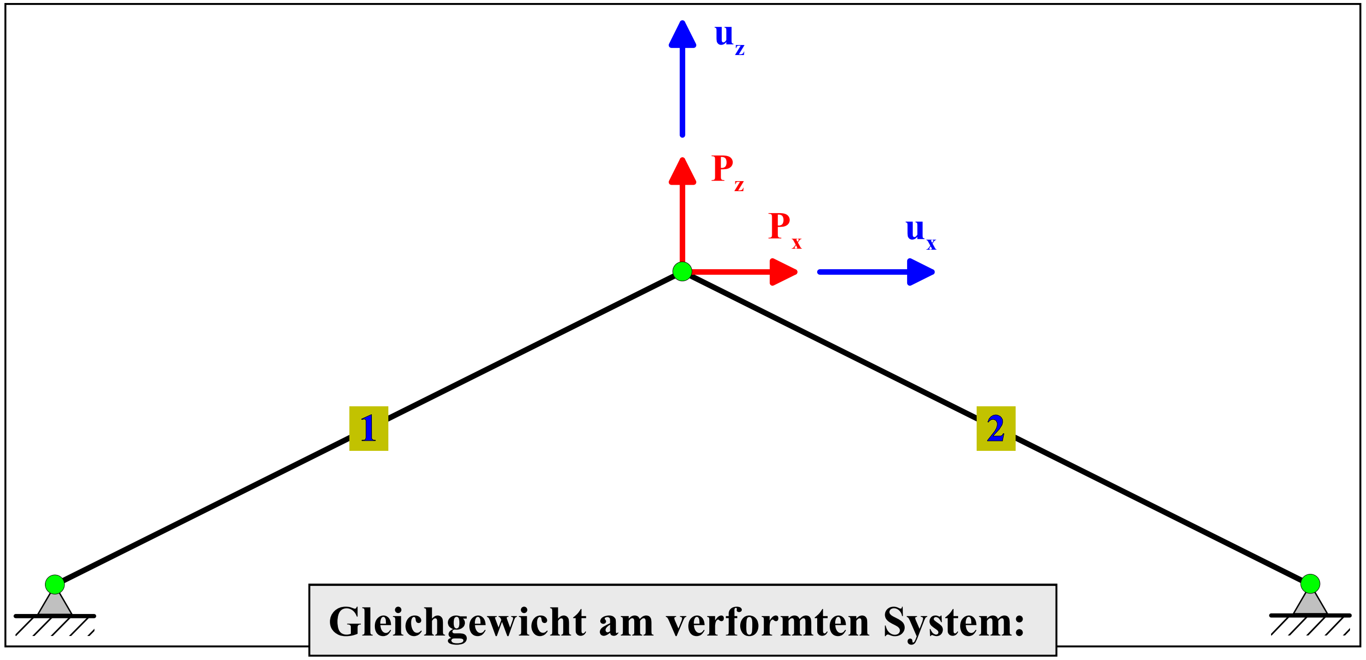
$$-2EA(H_0 - w)\left\{\frac{1}{L_0} - \frac{1}{\sqrt{B_0^2 + (H_0 - w)^2}}\right\} = P$$

$$G(w) = P$$

innere Kraft ← $G(w) = P$ → **äußere Last**

Verallgemeinerung I: Fachwerkbock mit 2 FG

System mit zwei Freiheitsgraden



Gleichgewicht am verformten System:

$$EA_1(B_0+u_x)\left\{\frac{1}{L_{10}}-\frac{1}{\sqrt{(B_0+u_x)^2+(H_0+u_z)^2}}\right\}-EA_2(B_0-u_x)\left\{\frac{1}{L_{20}}-\frac{1}{\sqrt{(B_0-u_x)^2+(H_0+u_z)^2}}\right\}=P_x$$

$$EA_1(H_0+u_z)\left\{\frac{1}{L_{10}}-\frac{1}{\sqrt{(B_0+u_x)^2+(H_0+u_z)^2}}\right\}+EA_2(H_0+u_z)\left\{\frac{1}{L_{20}}-\frac{1}{\sqrt{(B_0-u_x)^2+(H_0+u_z)^2}}\right\}=P_z$$

Verallgemeinerung II: System mit n FG

Gleichgewicht am verformten System: ***n nichtlineare Gleichungen mit n Unbekannten***

$$\begin{bmatrix} G_1(V_1, V_2, \cdots, V_n) \\ G_2(V_1, V_2, \cdots, V_n) \\ \bullet \\ G_n(V_1, V_2, \cdots, V_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \bullet \\ P_n \end{bmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem ist *implizit*, d.h. die Unbekannten sind in Funktionen eingekapselt. Die Gleichungen lassen sich nicht direkt auf eine *explizite* Form bringen.

innere Kräfte ← $$\mathbf{G(V) = P}$$ → **äußere Lasten**

Gleichgewicht: Die inneren Kräfte sind gleich den äußeren Lasten!

P: Vektor der äußeren Lasten (vorgegeben)

V: Vektor der Knotenfreiheitsgrade (unbekannt)

G: Gleichgewichtsfunktion (durch das Tragwerk definiert)

Explizite und Implizite Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* ist *explizit* in dem Sinne, dass die Unbekannte für sich steht und die Gleichung unmittelbar nach dieser Unbekannten aufgelöst werden kann. Deshalb ist die Lösung eines linearen Gleichungssystems so einfach.

$$\boxed{[\ldots]\cdot x = b} \Rightarrow \boxed{x = \frac{b}{[\ldots]}}$$

Bei einen *nichtlinearen Gleichung* ist die Unbekannte *implizit* in einer Funktion *eingekapselt*. Zur Auflösung muss die Umkehrfunktion bekannt sein. Schon bei relativ einfachen Gleichungen scheitert man.

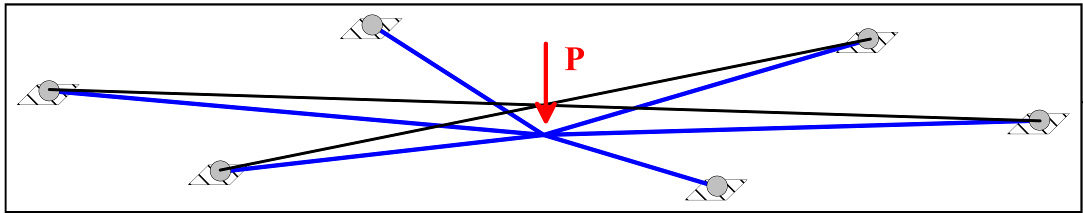
$$\boxed{\sin x = b} \Rightarrow \boxed{x = \arcsin b}$$

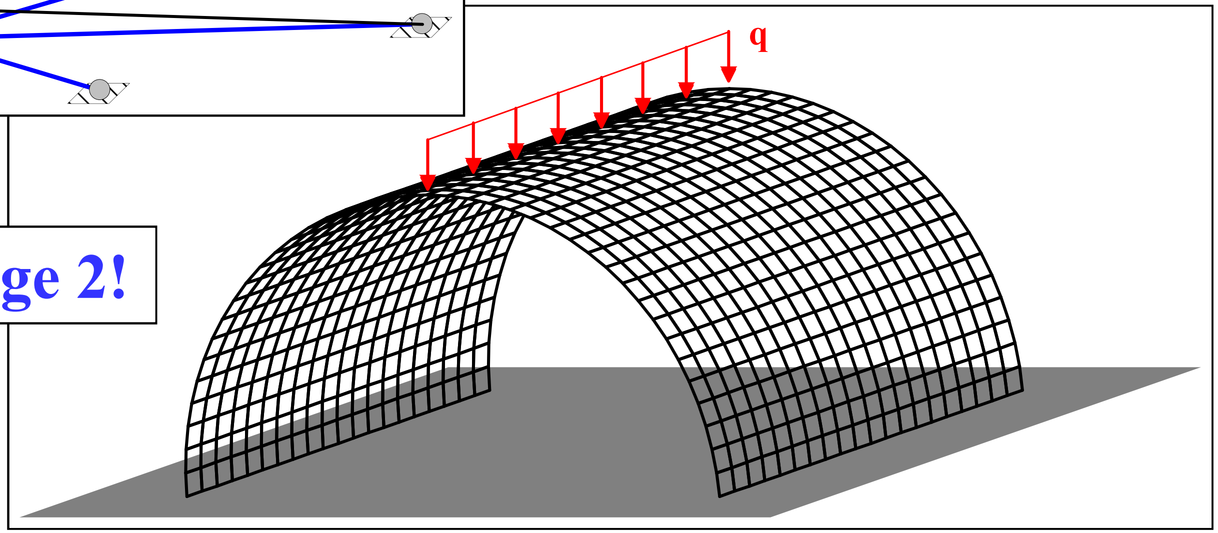
Unter keinen Umständen ist es möglich, eine implizite Darstellung in eine exakte explizite Darstellung zu überführen.

$$\boxed{\sin x = b} \not\Rightarrow \boxed{[(x)]\cdot x = b}$$

Offene Fragen

- **Wie finden wir die nichtlineare vektorielle Gleichgewichtsfunktion G?**
  - **Für Systeme mit beliebig vielen Freiheitsgraden!**
  - **Für beliebige Tragwerkstypen!**
- **Wie lösen wir das implizite nichtlineare Gleichungssystem auf?**





Wir beginnen mit Frage 2!

Mathematischer Rückblick: Taylorreihe

Jede beliebige „normale“ Funktion F(x) kann in einer *Potenzreihe* entwickelt werden. Die Abweichung der Potenzreihe von der Urfunktion hängt von der Anzahl der verwendeten Glieder ab. *Im Grenzfall unendlich vieler Potenzen werden Ursprungsfunktion und Reihe identisch*.

$$F(x_0+\Delta x)=F(x_0)+\frac{F'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{F''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n$$

lineare Näherung

quadratische Näherung

kubische Näherung

Beispiel: Wurzelfunktion

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x - \frac{1}{8\sqrt{x_0^3}}\Delta x^2 + \frac{3}{48\sqrt{x_0^5}}\Delta x^3 - \frac{15}{384\sqrt{x_0^7}}\Delta x^4 + \ldots, \quad |\Delta x| \le x_0$$

Ordnung	Inkrement	Fkt-Wert	Fehler [%]
0	1.00000000	1.00000000	-18.35
1	0.25000000	1.25000000	2.06
2	-0.03125000	1.21875000	-0.59
3	0.0078125	1.22656250	0.15
4	-0.00244141	1.22412109	-0.05

Taschenrechner:

$$\sqrt{1.5} = 1.22474487$$

gewählt:

$$x_0 = 1 \qquad \Delta x = 0.5$$

Durch die Reihenentwicklung wird das *implizit* in der Wurzelfunktion auftauchende Argument herausgezogen und man erhält eine *explizite Darstellung* in Form eines *Polynoms*!

Das NEWTON-Verfahren: Prediktorschritt

Das NEWTON-Verfahren dient zur Nullstellenbestimmung beliebiger Funktionen bzw. zur Lösung beliebig nichtlinearer Gleichungen auf *iterativem Weg*. Hierbei wird die Funktion in einer *linearen Taylorreihe* entwickelt.

nichtlineare Gleichung:

$$F(x) = P$$

lineare Taylorreihe:

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0) \cdot \Delta x = F(x_0) + \Delta F$$

linearisierte nichtlineare Gleichung:

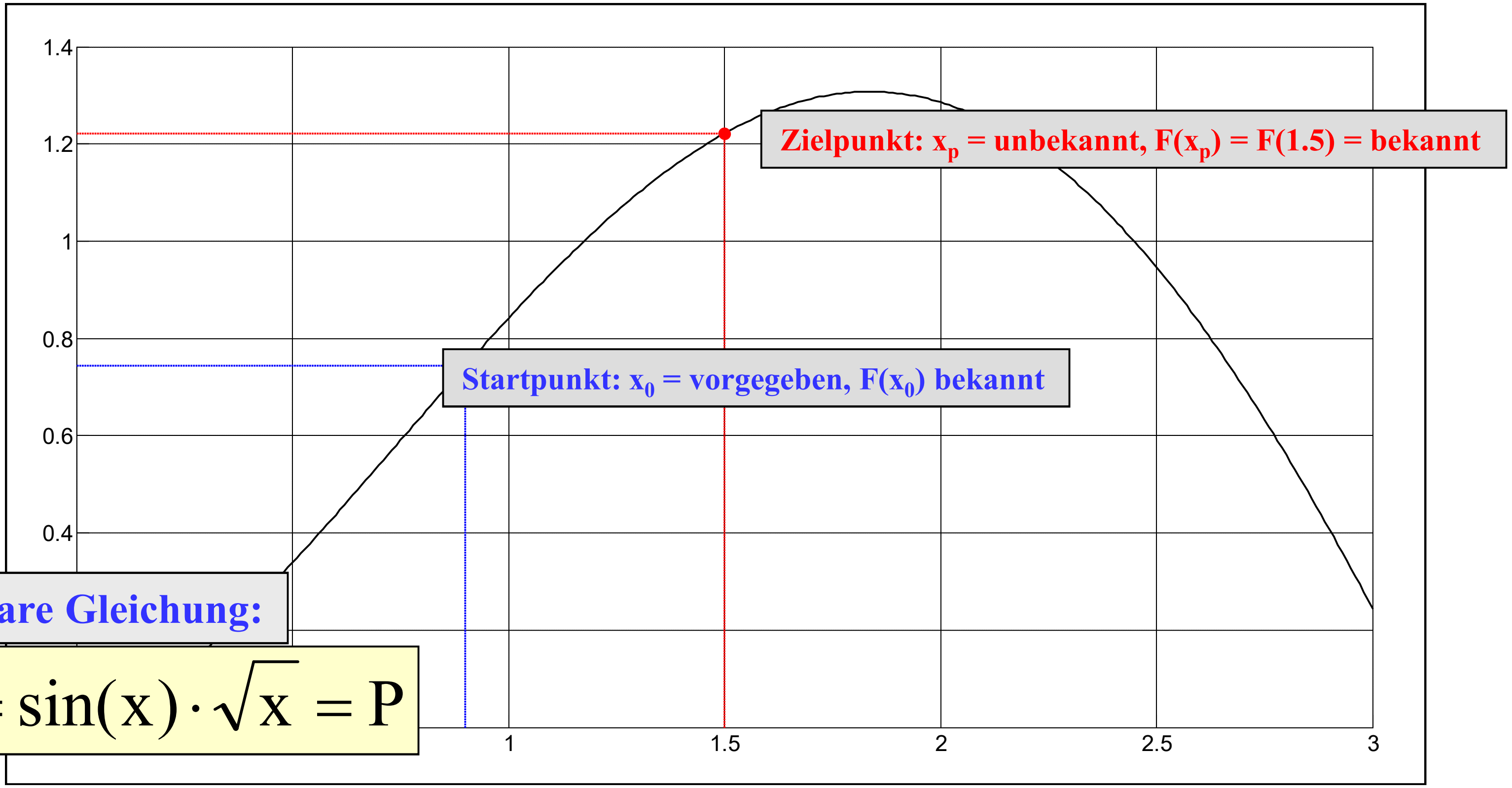
$$F'(x_0) \cdot \Delta x_0 = P - F(x_0)$$

$$\Delta x_0 = \frac{P - F(x_0)}{F'(x_0) \cdot}$$

Die oberste Gleichung geht von einer Abszisse x_0 aus, für die die Lösung $F(x_0)$ bekannt ist, und erlaubt die Berechnung des Funktionswertes *$F(x_0)+\Delta F$* an einer *benachbarten Stelle $x_0+\Delta x_0$* durch Berechnung des *Zuwachses ΔF_0* aus einer *linearen Gleichung*. Die Lösung ΔF_0 ist nicht exakt, da durch den Abbruch der Taylorreihe ein sog. *Linearisierungsfehler* entsteht. Es handelt sich bei ΔF_0 also um einen *Schätzwert*. Die Ermittlung des Schätzwertes nennt man *Prediktorschritt*. In der Regel ist das Problem invers formuliert: $\Delta F=\Delta P$ ist gegeben und die Stelle $x_0+\Delta x$ ist gesucht, an der $F(x_0+\Delta x)$ gerade den Wert P annimmt. Dann liefert der Prediktorschritt einen ersten Schätzwert Δx_0, der mit dem Linearisierungsfehler behaftet ist.

Beispiel

Aufgabe: gesucht ist die Stelle x, an der der Funktionswert den Wert $F(x_p=1.5)=1.2217$ annimmt. Die wahre Lösung für x wäre also x_p. Der Wert von x wird dadurch ermittelt, dass ausgehend von einer bekannten Lösung x_0 der Zuwachs Δx_0 mittels eines Prediktorschritts geschätzt wird. Der Startpunkt x_0 wird variiert, um die Qualität des Prediktorschritts zu untersuchen.



nichtlineare Gleichung:

$$F(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x} = P$$

Beispiel: Linearisierung A

Version A: direkte Linearisierung

Die Ableitung der Funktion wird durch direkte Anwendung der Regeln der Differentialrechnung gewonnen, im vorliegenden Fall der Produktregel,

$$F(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x} = P$$

$$F(x_0 + \Delta x) = \sin x_0 \cdot \sqrt{x_0} + \left\{ \cos x_0 \cdot \sqrt{x_0} + \sin x_0 \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \right\} \cdot \Delta x$$

Abkürzungen:

$$K_T = F'(x_0) = \cos x_0 \cdot \sqrt{x_0} + \sin x_0 \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$F_i = F(x_0) = \sin x_0 \cdot \sqrt{x_0}$$

Beispiel: Linearisierung B

Version B: schrittweise Linearisierung

Die beiden Faktoren des Produkts werden jede für sich linearisiert, dann wird das Produkt gebildet, und das Ergebnis wird erneut linearisiert. Das Endergebnis ist identisch zur Linearisierung A.

$$F(x) = F_1(x) \cdot F_2(x)$$

$$F_1(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F_1(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x$$

$$F_2(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad F_2(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x$$

Produkt ausführen ...

$$F(x_0 + \Delta x) = F_1(x_0 + \Delta x) \cdot F_2(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 \cdot \sqrt{x_0} + \left\{ \sin x_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}} + \cos x_0 \cdot \sqrt{x_0} \right\} \cdot \Delta x + \cos x_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x^2$$

Linearisieren: Streichen des quadratischen Anteils ...

$$F(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 \cdot \sqrt{x_0} + \left\{ \sin x_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}} + \cos x_0 \cdot \sqrt{x_0} \right\} \cdot \Delta x$$

Prediktorschritt: Numerische Ergebnisse

Prediktorgleichung:

$$F_i(x_0) + K_T(x_0) \cdot \Delta x = P$$

wahre Lösung:

$$F(1.5) = P = 1.2217$$

Ergebnisse:

Je weiter der Startpunkt vom Zielpunkt entfernt ist, umso größer ist der Linearisierungsfehler!

x_0	$K_T(x_0)$	$F_i(x_0)$	Δx_0	x	Fehler [%]
1.4	0.6175	1.1660	0.0902	1.4902	-0.66
1.3	0.7275	1.0986	0.1691	1.4691	-2.06
1.2	0.8224	1.0210	0.2440	1.4440	-3.73
1.1	0.9006	0.9347	0.3186	1.4186	-5.42
1.0	0.9610	0.8415	0.3956	1.3956	-6.96
0.9	1.0026	0.7431	0.4773	1.3773	-8.18
0.8	1.0242	0.6416	0.5664	1.3664	-8.92

Das NEWTON-Verfahren: Korrektorschritte

Durch den Linearisierungsfehler liegt die geschätzte Lösung mehr oder weniger weit von der wahren Lösung entfernt. Mittels sog. *Korrektorschritte* kann man den Linearisierungsfehler *iterativ* beseitigen und sich, abhängig von der Anzahl der Iterationen, *beliebig nah* an die wahre Lösung heranarbeiten.

Hierfür definiert man den durch den Prediktorschritt gewonnenen Punkt als neuen Startpunkt und führt einen *Korrektorschritt* bzw. *Iterationsschritt* durch.

Iterationsgleichung:

$$K_T(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k = P - F_i(x_{k-1})$$

Aktualisierung:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x_k$$

Das K_T und das F_i der k-ten Iteration ergeben sich aus dem x-Wert der vorherigen Iteration. Bei der ersten Iteration wird der x-Wert des Prediktorschritts verwendet; man kann diesen auch als „nullte" Iteration bezeichnen. Nach Berechnung des *iterativen Zuwachses* Δx_k wird der x-Wert aktualisiert und die nächste Iteration durchgeführt.

Der Iterationszyklus wird so lange durchlaufen, bis die rechte Seite ausreichend klein ist, d.h. die Abweichung zwischen dem Zielwert P und dem Schätzwert F_i vernachlässigbar wird. Ist dies der Fall, spricht man von *Konvergenz gegen die wahre Lösung*.

Iterationszyklus: Numerische Ergebnisse

Iterationsgleichung:

$$K_T(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k = P - F_i(x_{k-1}) = P_{uk}$$

wahre Lösung:

$$F(1.5) = P = 1.2217$$

$$\Delta x_k = \frac{P_{uk}}{K_T(x_{k-1})}$$

Ergebnisse:

Iteration	x_{k-1}	K_T	F_i	P_u	Δx_k	x_k	Fehler [%]
0	0.8000	1.0242	0.6416	0.5801	0.5664	1.3664	-8.92
1	1.3664	0.6561	1.1446	0.0771	0.1175	1.4839	-1.08
2	1.4839	0.5147	1.2135	0.0081	0.0158	1.4997	-0.02
3	1.4997	0.4943	1.2215	0.0002	0.0003	1.5000	0.00

Das NEWTON-Verfahren konvergiert schnell gegen die wahre Lösung, *sofern der Startwert nicht zu weit von dieser entfernt liegt*.

Die Erweiterung des NEWTON-Verfahrens auf mehrere Veränderliche geht auf NEWTONS Zeitgenossen RAPHSON zurück. Man spricht vom *NEWTON/RAPHSON-Verfahren*.

Das Newton/Raphson-Verfahren: Ausgangssituation

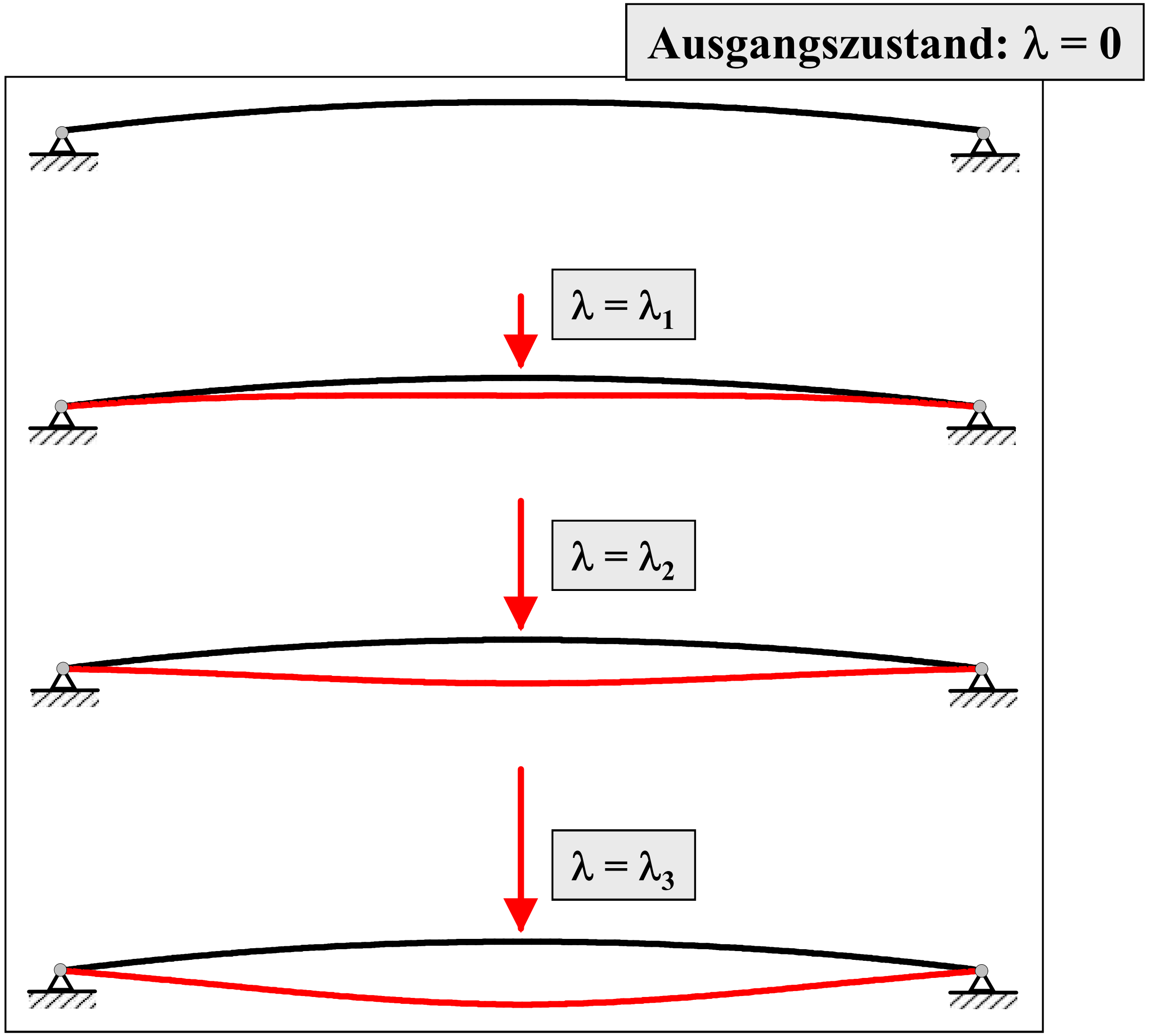
Gegeben ist ein System mit n Freiheitsgraden V_1, V_2, ... V_n, in deren Richtung Lasten P_1 bis P_n wirken. In Richtung der Freiheitsgrade werden n Gleichgewichtsbedingungen G_1 bis G_n aufgestellt, die nichtlinear sind und von denen jede grundsätzlich von allen Freiheitsgraden abhängen kann.

Die Freiheitsgrade und Lasten werden in den *Vektoren V und P* zusammengefasst. Die nichtlinearen Gleichungen bilden entsprechend eine *Vektorfunktion G*, die von dem Vektor V abhängt.

$$\begin{bmatrix} G_1(V_1, V_2, \cdots, V_n) \\ G_2(V_1, V_2, \cdots, V_n) \\ \bullet \\ G_n(V_1, V_2, \cdots, V_n) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \bullet \\ P_n \end{bmatrix}$$

***Gleichgewicht herrscht, wenn gilt: G = P*. Bei vorgegebenem V läßt sich durch Einsetzen leicht kontrollieren, ob Gleichgewicht gegeben ist. Die Fragestellung lautet jedoch umgekehrt: für welches V herrscht bei vorgegebenem P Gleichgewicht? Hierfür betrachten wir die Belastung nicht als *Zustand*, sondern als *inkrementellen Lastprozess*.**

Inkrementeller Lastprozess



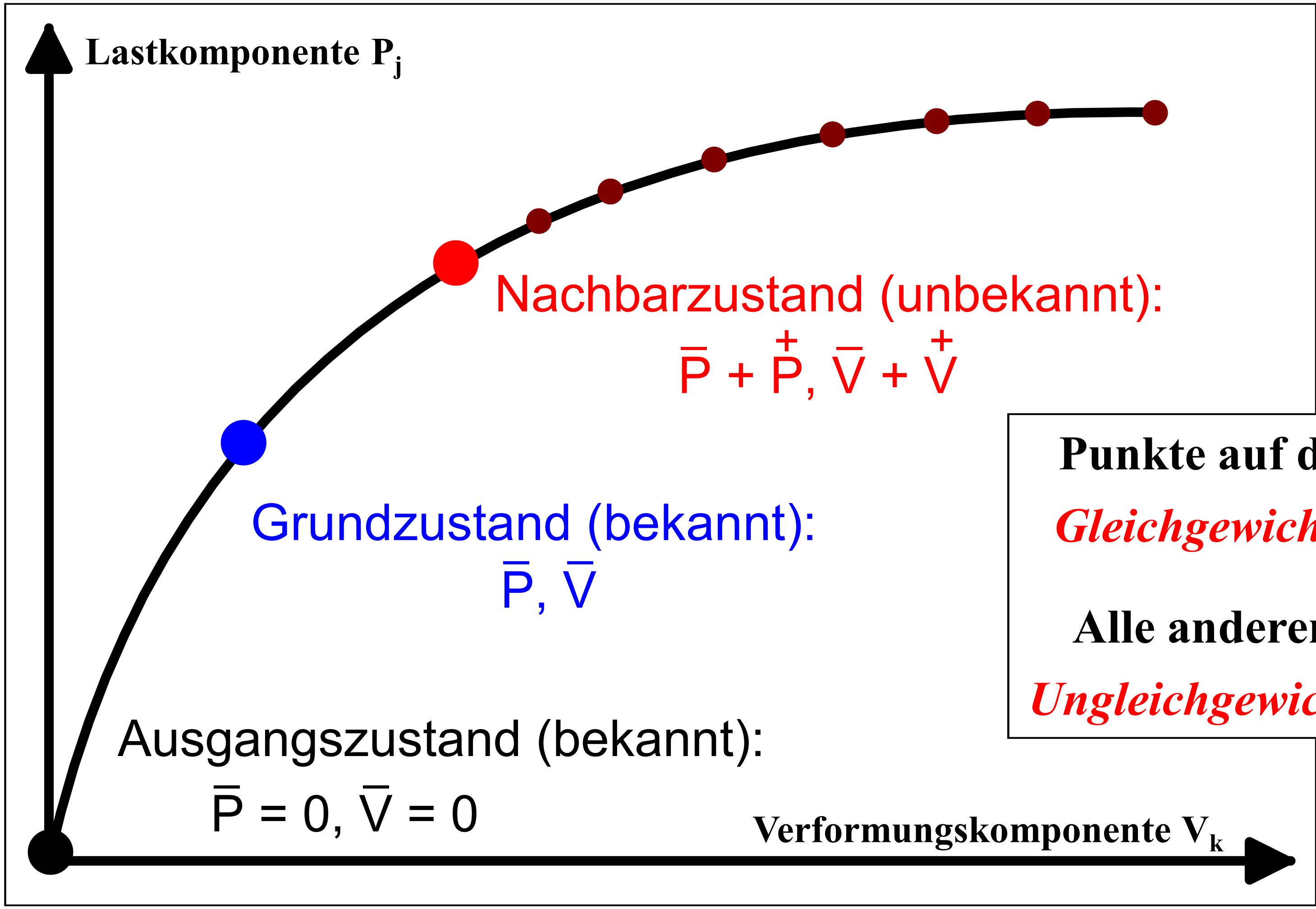
Lastprozess:

$$P = \lambda P_0$$

P_0: Referenzlast

λ: Lastfaktor

Visualisierung: Last-Verformungsdiagramm



Punkte auf der Kurve:

Gleichgewichtszustände

Alle anderen Punkte:

Ungleichgewichtszustände

Reformulierung des Problems

Grundzustand (*bekannt*)	→	Inkrement (*unbekannt*)	→	Nachbarzustand (unbekannt)
$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}}$		$\overset{+}{\mathbf{V}}$		$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \overset{+}{\mathbf{V}}$

Wie können wir den Nachbarzustand berechnen, wenn wir den Grundzustand bereits kennen? Anstatt also die *Gesamtverformung* zu suchen, suchen wir den *Verformungszuwachs* bzw. das *Verformungsinkrement*.

$$\overset{+}{\mathbf{V}} = ???$$

Berechnung des Nachbarzustands I

Ausgangspunkt: ein sich im Gleichgewicht befindender Grundzustand

$$\mathbf{G}(\overline{\mathbf{V}}) = \overline{\mathbf{P}}$$

Der Nachbarzustand soll auch im Gleichgewicht stehen!

$$\mathbf{G}(\overline{\mathbf{V}} + \overset{+}{\mathbf{V}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overset{+}{\mathbf{P}}$$

Aufgrund der Nichtlinearität gilt das Superpositionsprinzip NICHT!

$$\mathbf{G}(\overline{\mathbf{V}} + \overset{+}{\mathbf{V}}) \neq \mathbf{G}(\overline{\mathbf{V}}) + \mathbf{G}(\overset{+}{\mathbf{V}})$$

Berechnung des Nachbarzustands I

Entwicklung der Gleichgewichtsfunktion G als lineare TAYLORreihe

$$\mathbf{G}(\overline{\mathbf{V}}+\overset{+}{\mathbf{V}}) \approx \mathbf{G}(\overline{\mathbf{V}}) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}}\overset{+}{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{P}} + \overset{+}{\mathbf{P}}$$

Vektor der inneren Kräfte

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{G}(\overline{\mathbf{V}})$$

tangentiale Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}}$$

tangentiale Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{K}_T \overset{+}{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{P}} + \overset{+}{\mathbf{P}} - \mathbf{F}_i$$

Ableitungen

Fall 1: ***Skalare Funktion*** **mehrerer Veränderlicher V_1 bis V_n. Dann gibt es n partielle Ableitungen, die wir in einem** ***Zeilenvektor*** **sammeln können.**

$$G = G(\mathbf{V}) = G_1(V_1, V_2, \cdots, V_n) \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \mathbf{V}} = \left[\frac{\partial G}{\partial V_1} \;\middle|\; \frac{\partial G}{\partial V_2} \;\middle|\; \bullet \;\middle|\; \frac{\partial G}{\partial V_n} \right]$$

Fall 2: ***Vektorfunktion*** **einer Veränderlichen V. Dann gibt es n Vektorkomponenten, die jede für sich abgeleitet wird und die wir in einem** ***Zeilenvektor*** **sammeln können.**

$$\mathbf{G}(V) = \begin{bmatrix} G_1(V) \\ G_2(V) \\ \bullet \\ G_n(V) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial V} \\ \hline \frac{\partial G_2}{\partial V} \\ \hline \bullet \\ \hline \frac{\partial G_n}{\partial V} \end{bmatrix}$$

Tangentiale Steifigkeitsmatrix

Die Ableitung einer Vektorfunktion geschieht grundsätzlich durch Ableitung jeder einzelnen Komponente. Ist die Variable, nach der abgeleitet wird, wiederum ein Vektor, wird jede Komponente der Funktion nach jeder Komponente der Variablen partiell abgeleitet. Dadurch wird jede Funktionskomponente zu einem Zeilenvektor, dessen Spaltenzahl der Komponentenzahl der unabhängigen Variablen entspricht. Im vorliegenden Fall entsteht dadurch eine *quadratische Matrix* mit der Dimension der *Anzahl der Systemfreiheitsgrade*. Diese Matrix hat die Eigenschaften:

- **Sie stellt eine *n-dimensionale Tangentialebene* an die Gleichgewichtsfunktion dar.**
- **Sie hat die *physikalische Eigenschaft* einer *Steifigkeitsmatrix***

Deshalb heißt diese Matrix *tangentiale Steifigkeitsmatrix*.

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} G_1(V_1, V_2, \cdots, V_n) \\ G_2(V_1, V_2, \cdots, V_n) \\ \bullet \\ G_n(V_1, V_2, \cdots, V_n) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \dfrac{\partial G_1}{\partial V_1} & \dfrac{\partial G_1}{\partial V_2} & \bullet & \dfrac{\partial G_1}{\partial V_n} \\ \hdashline \dfrac{\partial G_2}{\partial V_1} & \dfrac{\partial G_2}{\partial V_2} & \bullet & \dfrac{\partial G_2}{\partial V_n} \\ \hdashline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hdashline \dfrac{\partial G_n}{\partial V_1} & \dfrac{\partial G_n}{\partial V_2} & \bullet & \dfrac{\partial G_n}{\partial V_n} \end{array}\right]$$

Interpretation der tangentialen Gleichgewichtsbedingung: Lastschritt

tangentiale Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{K}_T \overset{+}{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{P}} + \overset{+}{\mathbf{P}} - \mathbf{F}_i$$

Fall A:

- **Der Grundzustand ist im Gleichgewicht** → $\mathbf{F}_i = \overline{\mathbf{P}}$
- **Das Lastinkrement ist ungleich Null** → $\mathbf{K}_T \overset{+}{\mathbf{V}} = \overset{+}{\mathbf{P}}$

Lastschritt = Prediktorschritt:

Gleichung zur Berechnung der *Verformungsinkremente* infolge eines *Lastinkrementes*.

→ **Das Verformungsinkrement enthält den *Linearisierungsfehler*!**

Interpretation der tangentialen Gleichgewichtsbedingung: Iterationszyklus

tangentiale Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{K}_T \overset{+}{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{P}} + \overset{+}{\mathbf{P}} - \mathbf{F}_i$$

Fall B:

- **Das Lastinkrement ist gleich Null** → $\overset{+}{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$
- **Der Grundzustand ist nicht im Gleichgewicht** → $\mathrm{K}_T \overset{+}{\mathrm{V}} = \overline{\mathrm{P}} - \mathrm{F}_i = \mathrm{P}_u$

Iterationsschritte = Korrektorschritte:

Gleichung zur Berechnung der *Verformungsinkremente* infolge der *Ungleichgewichtskräfte*.

→ **Der Iterationszyklus wird so lange durchlaufen, bis Gleichgewicht herrscht!**

Inkrementell-iterativer Algorithmus

Lastschritt/Inkrementschritt

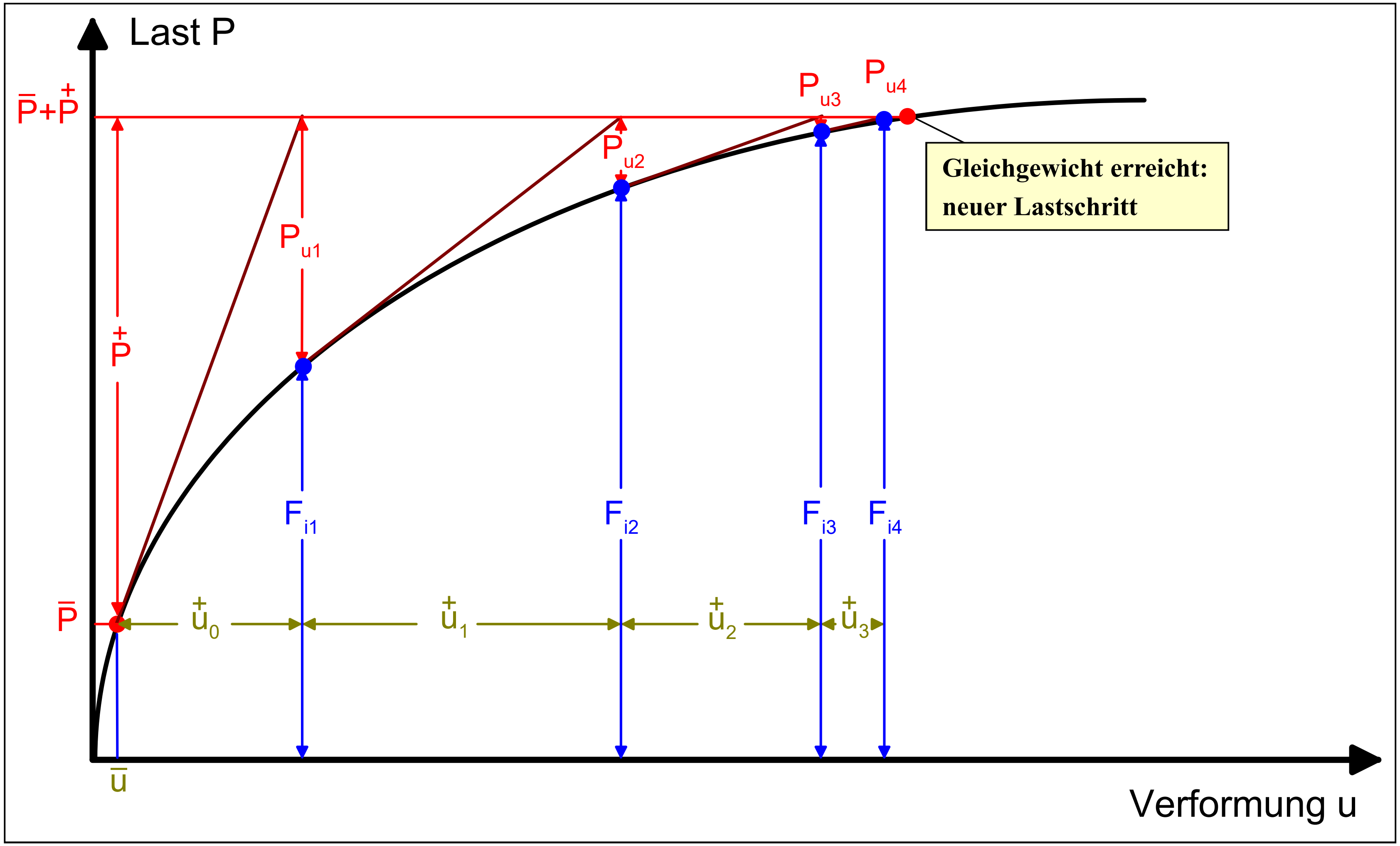
$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\overset{+}{\mathbf{V}} = \overset{+}{\mathbf{P}}$$

eingebetteter Iterationszyklus

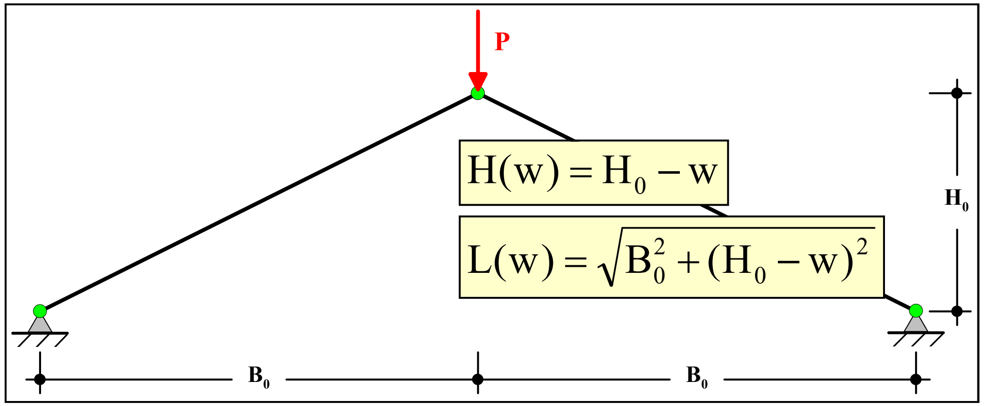
$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\overset{+}{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} = \mathbf{P}_{\mathrm{u}}$$

Nachfahren der gesamten Last-Verformungsgeschichte.

Inkrementelle NEWTON/RAPHSON-Methode



Anwendung: Fachwerkbock, vollständige Theorie



$$H(w) = H_0 - w$$

$$L(w) = \sqrt{B_0^2 + (H_0 - w)^2}$$

Nichtlineare Gleichgewichtsbedingung:

$$G(w) = 2EA \cdot H(w)\left\{\frac{1}{L(w)} - \frac{1}{L_0}\right\} = P$$

tangentiale Steifigkeit:

$$K_T = \frac{dG}{dw} = 2EA\left\{\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L(w)} + \frac{H^2(w)}{L^3(w)}\right\}$$

Ergebnisse:

Iteration	w_{k-1}	K_T	F_i	P_u	Δw_k	w_k	N	ε [%]
0	0.0000	751.3	0.0	8000.0	10.6479	10.6479	-8150.0	100.0
1	10.6479	372.4	5968.9	2031.1	5.4542	16.1022	-11672.3	33.87
2	16.1022	188.9	7494.4	505.6	2.6770	18.7791	-13228.8	14.25
3	18.7791	103.5	7885.0	115.0	1.1112	19.8904	-13840.8	5.59
4	19.8904	69.2	7980.9	19.1	0.2762	20.1666	-13989.7	1.37
5	20.1666	60.8	7998.8	1.2	0.0191	20.1857	-14000.0	0.09
6	20.1857	60.2	8000.0	0.0	0.0001	20.1858	-14000.0	0.00

Zusammenfassung

Ein nichtlineares, diskretes System wird durch einen Satz von N nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen beschrieben. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind leider nicht elementar lösbar.

Wir haben ein allgemeingültiges Konzept zur iterativen Lösung derartiger nichtlinearer Systeme kennengelernt: das *NEWTON/RAPHSON-Verfahren*. Es besteht darin, die Gleichgewichtsfunktion in einer *linearen TAYLOR-Reihe* um einen als *bekannt vorausgesetzten Grundzustand* zu entwickeln. Auf diesen Grundzustand wird ein Lastinkrement aufgebracht. Ein erster *Schätzwert* für das aus diesem *Lastinkrement* hervorgehende *Verformungsinkrement* lässt sich durch einen *Prediktorschritt* ermitteln, dessen Steifigkeit durch die *tangentiale Steifigkeitsmatrix* im Grundzustand gegeben ist. Diese ist für den *Ausgangszustand* identisch zur *linearen Steifigkeitsmatrix*. Das Ergebnis des Prediktorschritts ist infolge des *Linearisierungsfehlers* jedoch ungenau. Durch einen anschließenden *Iterationszyklus* lässt sich dieser Fehler jedoch auf ein beliebig kleines Maß reduzieren, so dass wir eine vom Ingenieurstandpunkt aus exakte Lösung erhalten.

Durch Hintereinanderschaltung mehrerer Lastschritte mit jeweils eingebetteten Iterationszyklen kann man die ganze Last-Verformungsgeschichte abfahren. Man spricht dann von einer *inkrementell-iterativen Berechnung*, die als Ergebnis eine *Pfadverfolgung* liefert.

Nächste Schritte

Frage 1:

Der Newton/Raphson-Algorithmus erwächst unmittelbar aus der Taylor-Reihenentwicklung der Gleichgewichtsbedingung.

- **Besitzt das NR-Verfahren Anwendungsgrenzen, jenseits derer es versagt?**
- **Gibt es weitere, eventuell besser geeignete Pfadverfolgungsalgorithmen?**

Diesen Fragen wird in Vorlesung 4 "Pfadverfolgungsalgorithmen" nachgegangen.

Frage 2:

Wir haben vorausgesetzt, dass die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen bekannt sind, und diese dann linearisiert, welches auf die tangentiale Steifigkeitsmatrix und den Vektor der inneren Kräfte führte. Unbeantwortet blieb bislang die Frage, wie man die tangentiale Gleichgewichtsbedingung im Allgemeinen bestimmt, also für beliebige Tragwerkstypen, die in beliebig viele finite Elemente aufgelöst werden. Diese Frage gehen wir im Teil B dieser Vorlesung an: "Schwache Form der tangentialen Gleichgewichtsbedingung".