

Wolfhard Zahlten

Vorlesungsreihe:

Numerische Methoden im Bauingenieurwesen

FEM III: Nichtlineare Probleme

Vorlesung 1

Einführung:

Geometrische und Physikalische Nichtlinearität



menum

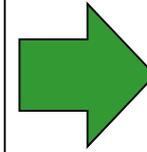
Überblick

- **Was sind nichtlineare Systeme?**
- **Was bedeutet Nichtlinearität für unsere Berechnungspraxis?**
- **Woher kommt Nichtlinearität?**
 - **Geometrische Nichtlinearität**
 - **Physikalische Nichtlinearität**
- **Wie löst man nichtlineare Probleme?**



Lineare Funktionen

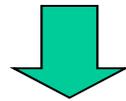
Eine *lineare Funktion* stellt eine *proportionale Beziehung* zwischen einem Input x (einer Last) und einem Output y (Verformung, Schnittgröße etc.) her.



$$y = mx$$

Sehr wichtig: das *Überlagerungsprinzip* gilt! Wir können für zwei Inputs x_1 and x_2 mit entsprechenden Outputs y_1 and y_2 den Output für das gleichzeitige Wirken von x_1 und x_2 ($x = x_1 + x_2$) durch einfache Addition der Teillösungen erhalten:

$$y_1 = y(x_1) = mx_1 \quad y_2 = y(x_2) = mx_2$$



$$y(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)$$

Beispiel: das Biegemoment infolge Eigengewicht G plus Windlast W ist gleich dem Moment infolge Eigengewicht plus dem Moment infolge Wind: $M(G+W) = M(G) + M(W)$. Diese Tatsache erlaubt uns die Definition von *Grundlastfällen* und die nachträgliche Bildung von *Lastfallkombinationen* aus diesen.



Nichtlineare Funktionen

Eine *nichtlineare Funktion* definiert einen *beliebigen Zusammenhang* zwischen einem Input x (einer Last) und einem Output y (Verformung, Schnittgröße etc.). Das *Überlagerungsprinzip gilt nicht!*

$$\sin(x_1 + x_2) \neq \sin(x_1) + \sin(x_2)$$

$$\sqrt{x_1 + x_2} \neq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

$$e^{x_1 + x_2} \neq e^{x_1} + e^{x_2}$$

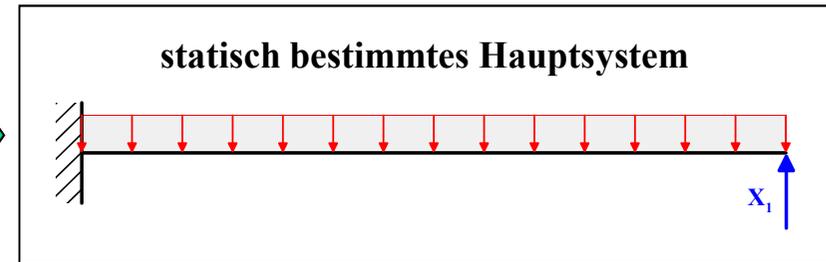
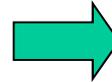
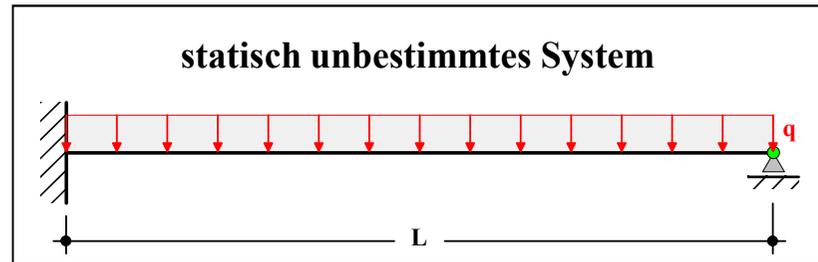
Das bedeutet: das Biegemoment infolge Eigengewicht G plus Windlast W ist **NICHT GLEICH** dem Moment infolge Eigengewicht plus dem Moment infolge Wind : $M(G+W) \neq M(G) + M(W)$. Die nachträgliche Bildung von *Lastfallkombinationen* ist nicht *nicht möglich* – jede Kombination muss für sich neu berechnet werden.

Alle klassischen Methoden setzen stillschweigend die Gültigkeit des Superpositionsprinzips voraus. Zum Beispiel ...



menum

Klassische Methode: Das Kraftgrößenverfahren

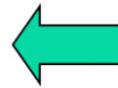


Nomenklatur des KGV:

Lagerverschiebung: δ_1
Lagerverschiebung infolge q : δ_{10}
Lagerverschiebung infolge X_1 : δ_{1X}

kinematische Kompatibilität:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{1X} = 0$$



Linearität 1: die Verschiebung infolge $q+X_1$ ist identisch zur Verschiebung infolge q plus der Verschiebung infolge von X_1 .

$$\delta(q + X_1) = \delta(q) + \delta(X_1)$$

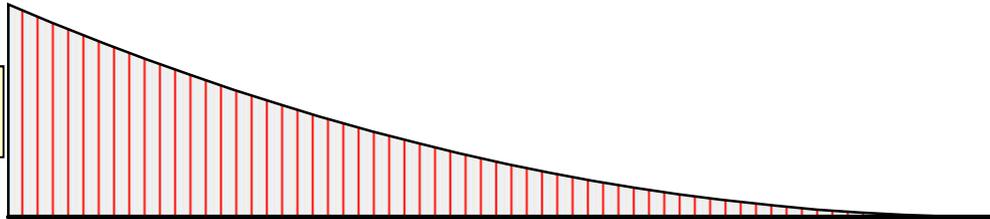


menum

Lösungen für das statisch bestimmte Hauptsystem

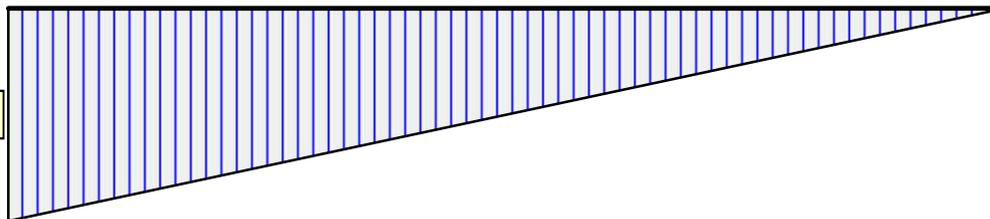
Momentenverlauf infolge q:

$$M_{0E} = -\frac{qL^2}{2}$$



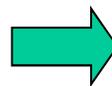
Momentenverlauf infolge $X_1 = 1$:

$$M_{IE} = 1 \cdot L$$



Einzelverformungen:

$$\delta_{ik} = \int_L \frac{M_i M_k}{EI} dx$$



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} \cdot L \cdot L \cdot L = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{4} \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot L \cdot L = -\frac{qL^4}{8EI}$$

Linearität 2:

lineare Kinematik: $\kappa = -w''$

Linearität 3:

lineares Materialgesetz: $M = EI \cdot \kappa$

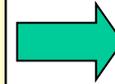


menum

Ermittlung der statisch Überzähligen

Elastizitätsgleichung:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{1X} = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$$



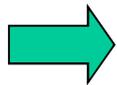
$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Linearität 4:

Die Verschiebung infolge X_1 ist gleich der X_1 -fachen Verschiebung infolge der Einwirkung „1“.

Statisch Überzählige X_1 :

$$X_1 = \frac{qL^4}{8EI} \cdot \frac{3EI}{L^3} = \frac{3}{8}qL$$



Endgültige Momentenlinie:

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1$$

Linearität 5:

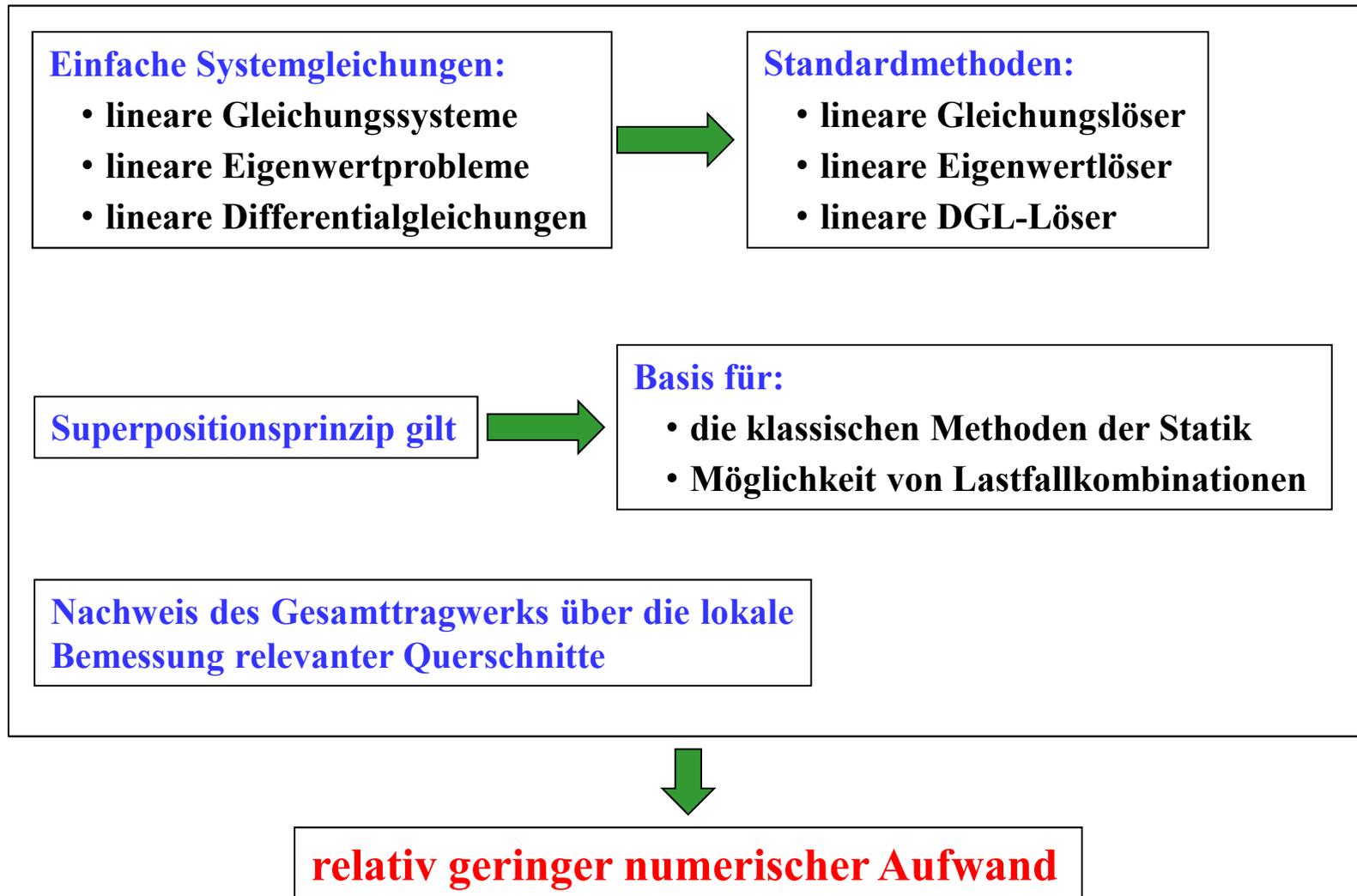
Das Moment infolge $q+X_1$ ist gleich dem Moment infolge q plus dem X_1 -fachen Moment der Einwirkung „1“.

Bei Nichtgültigkeit des Superpositionsprinzips würde das gesamte δ_{ik} -Verfahren zusammenbrechen!



menum

Vorteile linearer Systeme



Standardmethode: Gleichungslöser in FORTRAN

```
subroutine gaussv(a,b,x,n)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(n,n),b(n),x(n)
! gleichungsloesung nach gauss
call dreiv(a,b,n)
call rueckv(a,b,x,n)
!
return
end
```

```
subroutine dreiv(a,b,n)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(n,n),b(n)
! dreickszerlegung nach gauss
eps = 1.d-20
n1 = n-1
!
do 100 m=1,n1
amm=a(m,m)
if(dabs(amm).lt.eps) then
write(*,*) 'Abbruch'
stop
endif
amm1=1.d0/amm
bm=b(m)
m1=m+1
do 100 j=m1,n
fak=a(j,m)*amm1
do 20 k=m,n
a(j,k)=a(j,k)-fak*a(m,k)
20 continue
b(j)=b(j)-fak*bm
100 continue
return
end
```

```
subroutine rueckv(a,b,x,n)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(n,n),b(n),x(n)
! rueckwaertseinsetzen
eps=1.d-20
!
ann=a(n,n)
if(dabs(ann).lt.eps) then
write(*,*) 'Abbruch'
stop
endif
x(n)=b(n)/ann
n1=n-1
!
do 100 kk=1,n1
k=n-kk
if(dabs(a(k,k)).lt.eps) then
write(*,*) 'Abbruch'
stop
endif
sum=b(k)
k1=k+1
do 50 j=k1,n
sum=sum-a(k,j)*x(j)
50 continue
x(k)=sum/a(k,k)
100 continue
!
return
end
```



Standardmethode: Gleichungslöser in MATLAB

```
function X = gauss(A,B)

% Gleichungslösung mit dem
% GAUSSschen Eliminationsverfahren

% Schritt 1: Dreieckszerlegung
[A,B] = dreiGauss(A,B);
% Schritt 2: Rückwärtseinsetzen
X = rueckEins(A,B);

end
```

```
function [A,B] = dreiGauss(A,B)

% Dreieckszerlegung nach GAUSS
n = length(B);
eps = 1.e-20;

for m=1:n-1
    if abs(A(m,m)) < eps
        error('Matrix singular!')
    end
    amm1 = 1/A(m,m);
    bm = B(m);
    for j=m+1:n
        fak = A(j,m)*amm1;
        for k=m:n
            A(j,k) = A(j,k) - fak*A(m,k);
        end
        B(j) = B(j) - fak*bm;
    end
end

end
```

```
function X = rueckEins(A,B)

% Rückwärtseinsetzen
n = length(B);
eps = 1.e-20;
X = zeros(n,1);

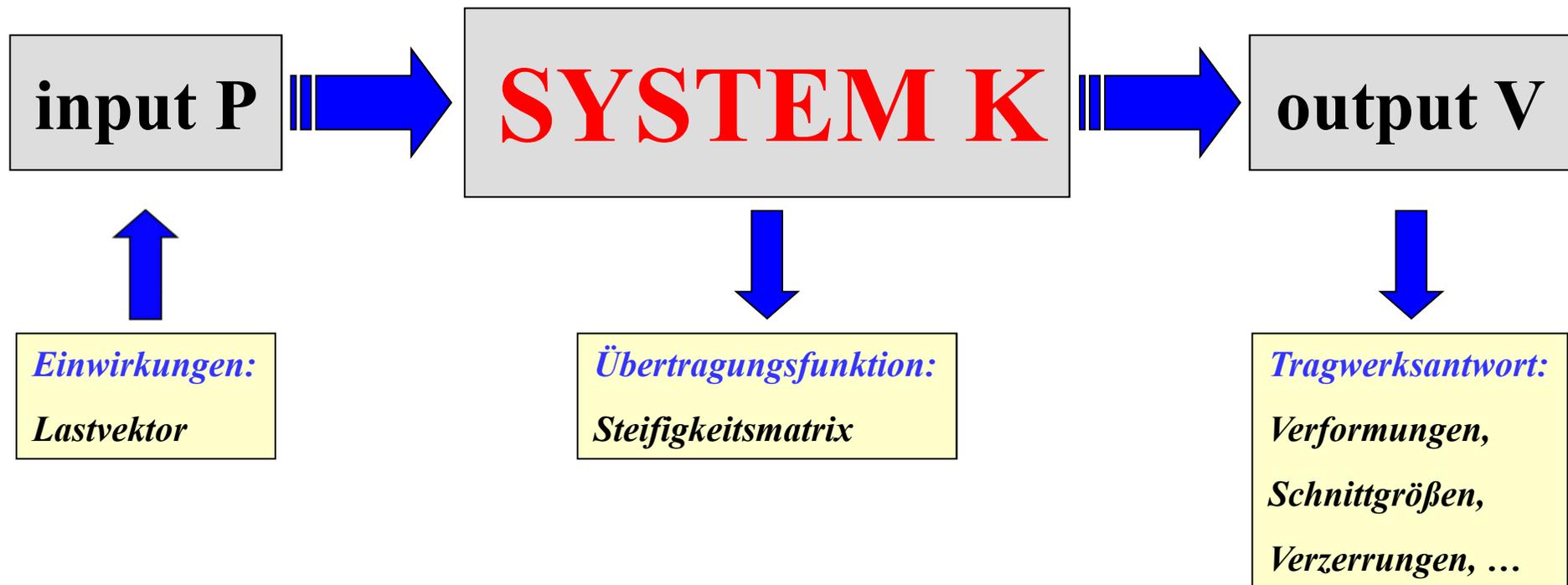
if abs(A(n,n)) < eps
    error('Matrix singular!')
end
X(n) = B(n)/A(n,n);

for kk=1:n-1
    k = n - kk;
    if abs(A(k,k)) < eps
        error('Matrix singular!')
    end
    sum = B(k);
    for j=k+1:n
        sum = sum - A(k,j)*X(j);
    end
    X(k) = sum/A(k,k);
end

end
```

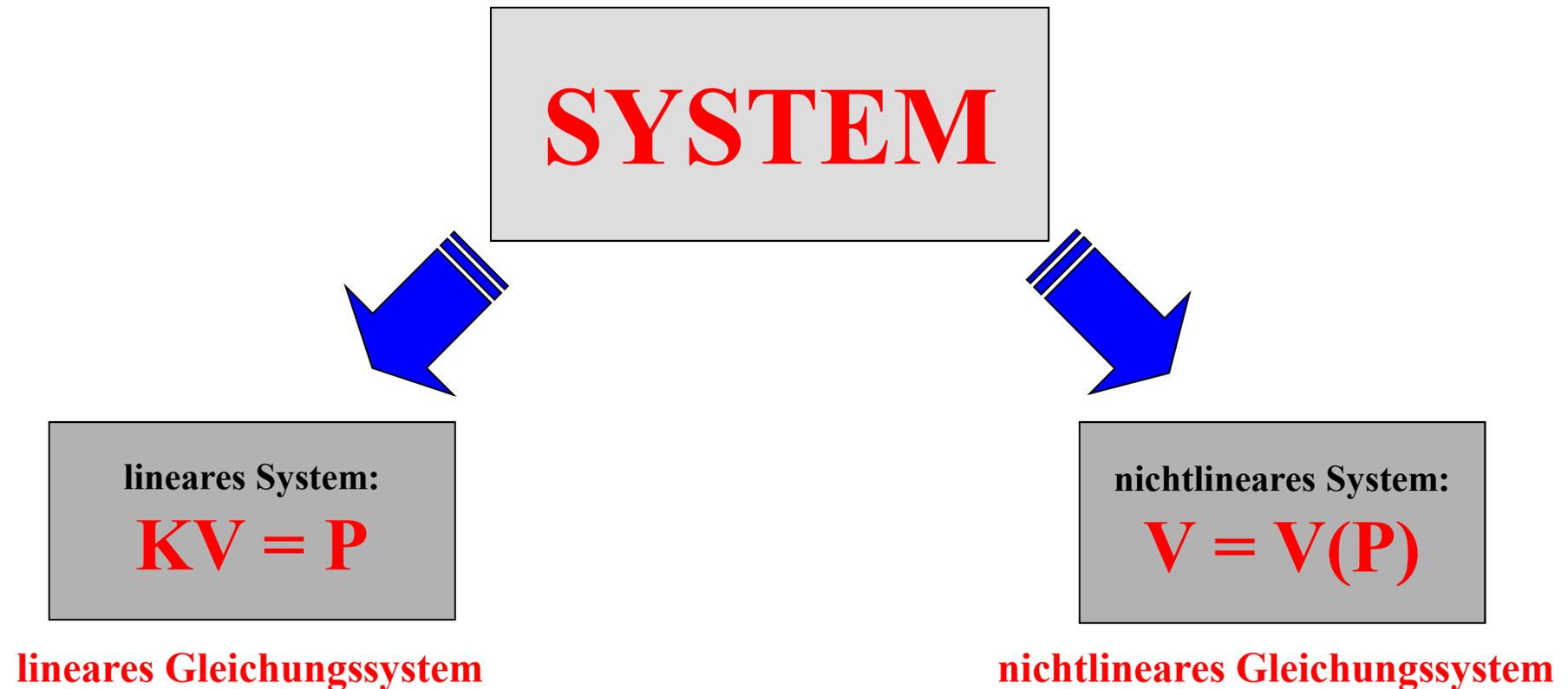


Abstrakte Sicht einer Struktur als allgemeines System



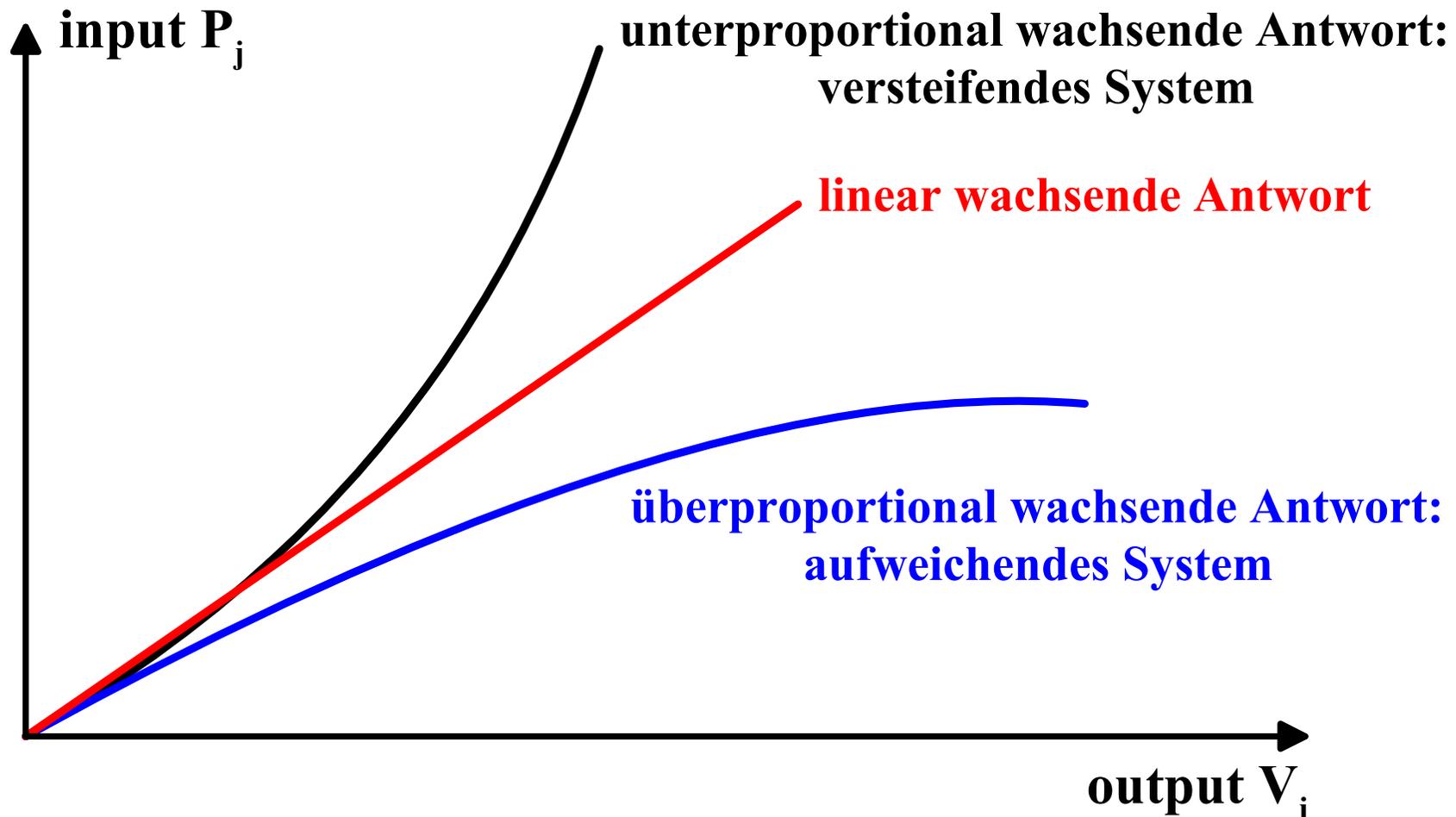
menum

Lineare und nichtlineare Systeme



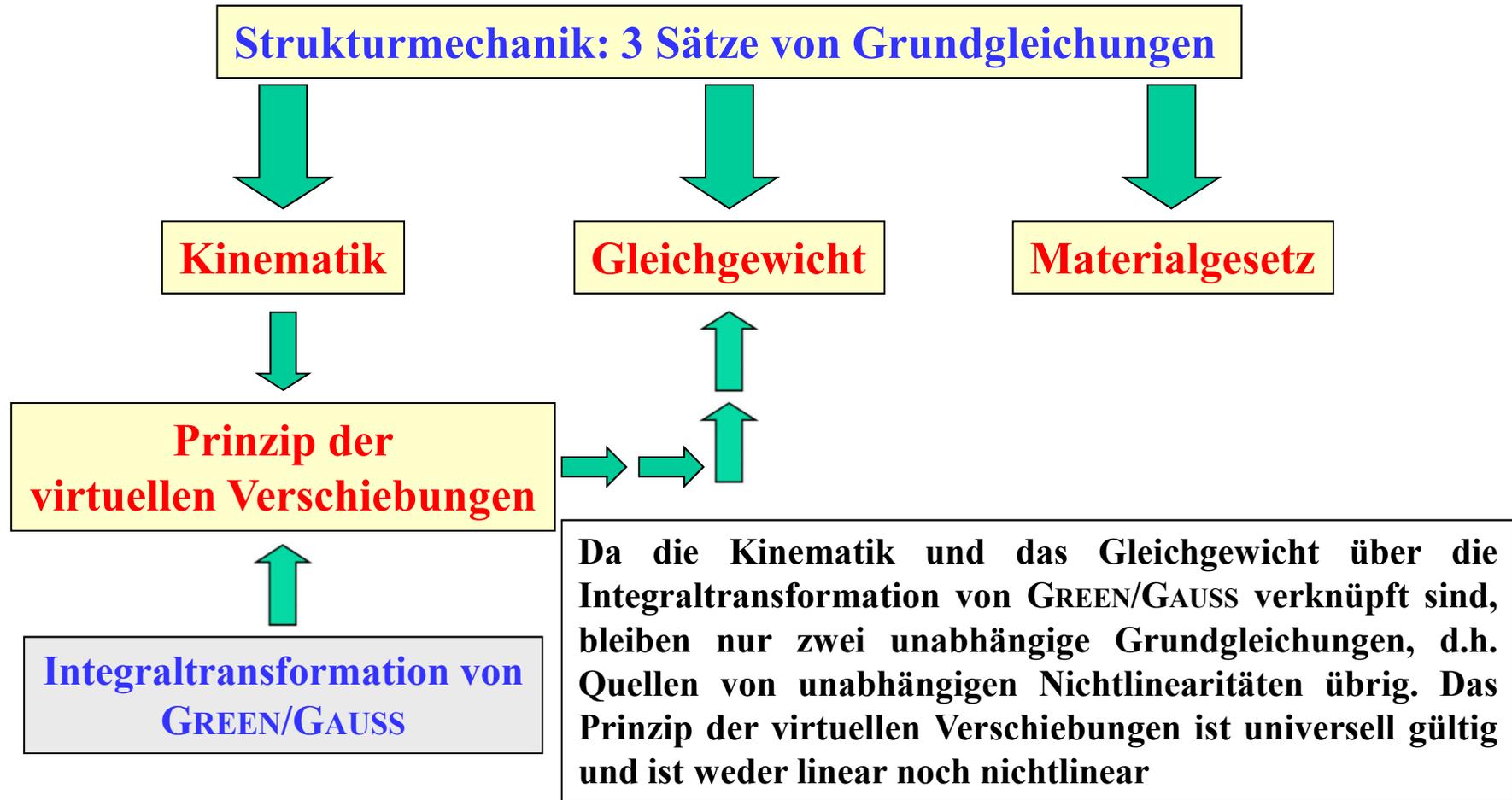
menum

Lineare und nichtlineare Systeme: Systemverhalten



menum

Quellen möglicher Nichtlinearitäten



Arten von nichtlinearen Problemen in der Strukturmechanik

Nichtlineare kinematische Gleichungen:

GEOMETRISCH NICHTLINEARE Probleme:

Gleichgewicht am verformten System

Nichtlineare Materialgesetze:

PHYSIKALISCH NICHTLINEARE Probleme:

Plastizierung bei Metallen, Rissbildung im Beton, etc

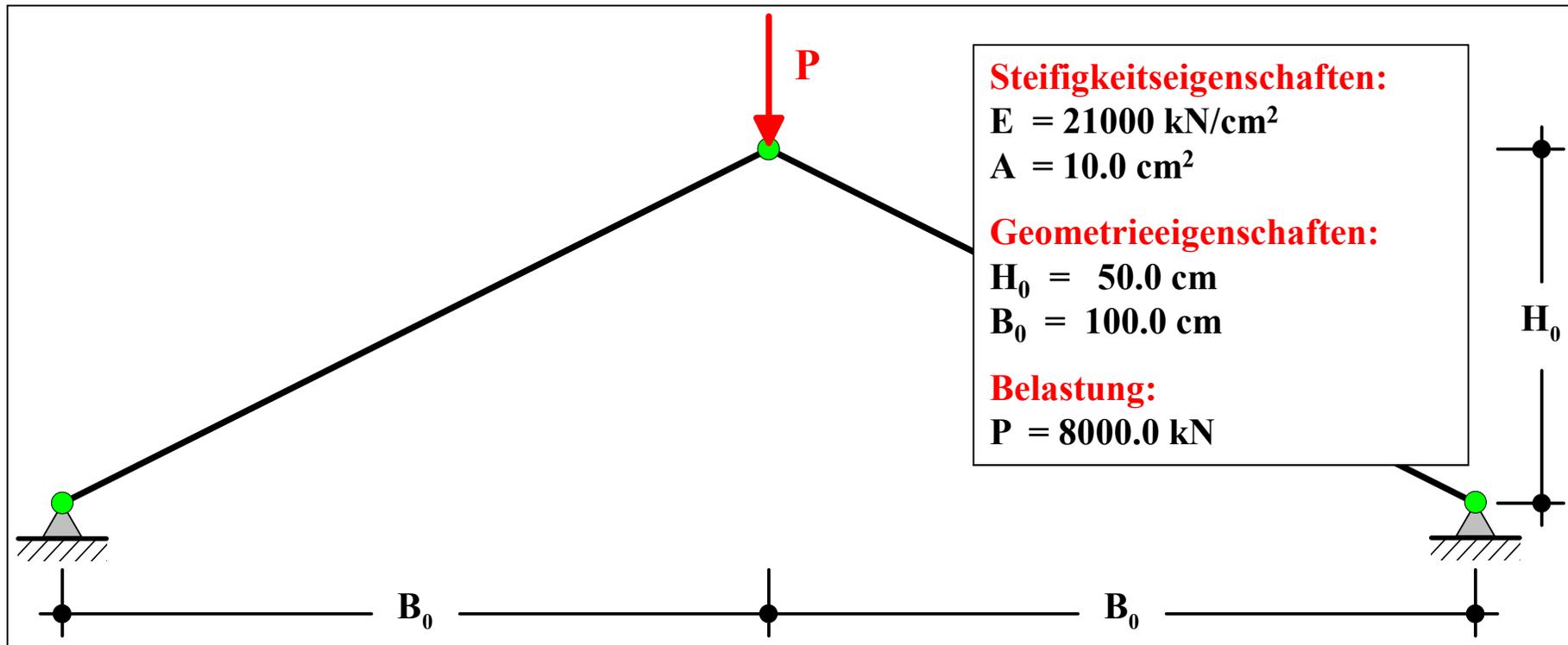


menum

Beispiel: Fachwerkbock

Wir beginnen mit einem extrem einfachen Beispiel: einem Fachwerkbock mit 2 Stäben unter einer Vertikallast. Unser Ziel ist die Entwicklung einer mathematischen Beziehung zwischen der Last P und der zugehörigen Vertikalverschiebung w .

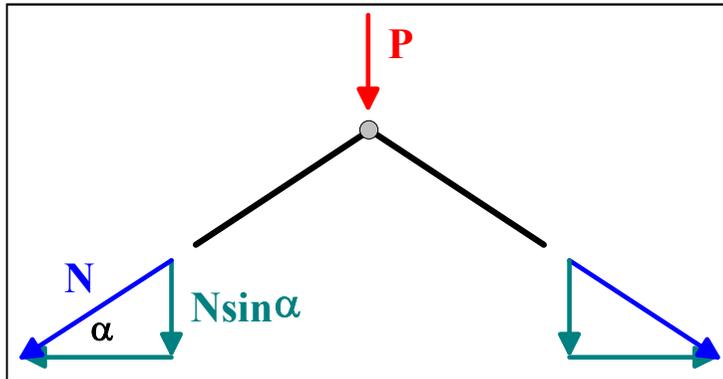
Wir beginnen mit der *linearen Lösung*: Gleichgewicht am *unverformten Tragwerk*.



menum

Klassische Berechnung I: Statik 1

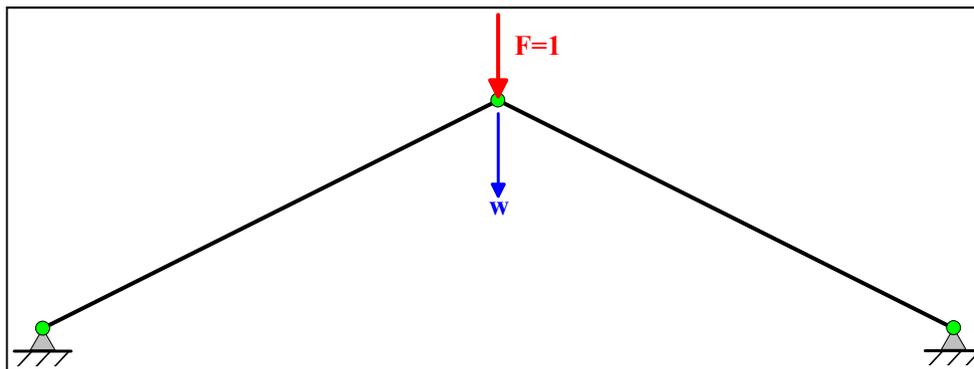
Normalkraft: Gleichgewicht am **UNVERFORMTEN** System



$$\tan \alpha_0 = \frac{H_0}{B_0}$$

$$N = -\frac{P}{2 \sin \alpha_0}$$

Vertikalverschiebung: Reduktionssatz



$$N_1 = -\frac{1}{2 \sin \alpha_0} \quad L_0 = \sqrt{B_0^2 + H_0^2}$$

$$w = \int \frac{N \cdot N_1}{EA} dx = \frac{P \cdot L_0}{2EA \sin^2 \alpha_0}$$



menum

Klassische Berechnung II: Mechanik 2

Normalkraft: Gleichgewicht am **UNVERFORMTEN** System

$$N = -\frac{P}{2 \sin \alpha_0}$$

Materialgesetz

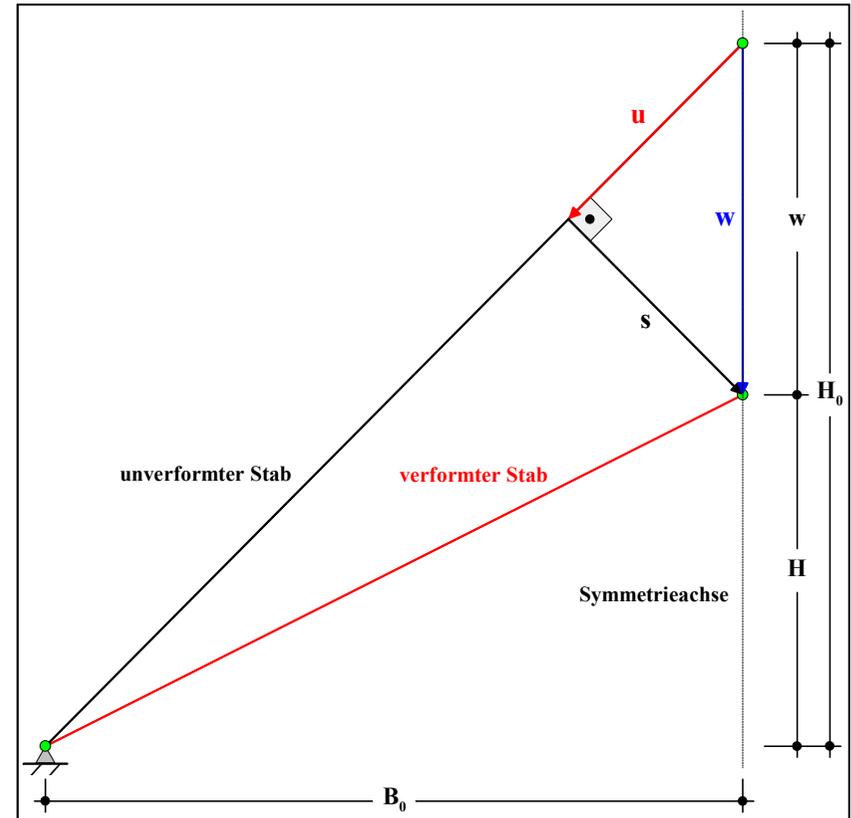
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

Stabkinematik

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \rightarrow \Delta L = -\frac{PL_0}{2EA \sin \alpha_0}$$

Systemkinematik:
elastische Verformung + Starrkörperverformung

$$w = \frac{u}{\sin \alpha_0} = \frac{PL_0}{2EA \sin^2 \alpha_0}$$



menum

Lineare Lösung

lineare Gleichgewichtsbedingung

$$2 \frac{EA(\sin \alpha_0)^2}{L_0} w = P$$

Eigenschaften der linearen Lösung:

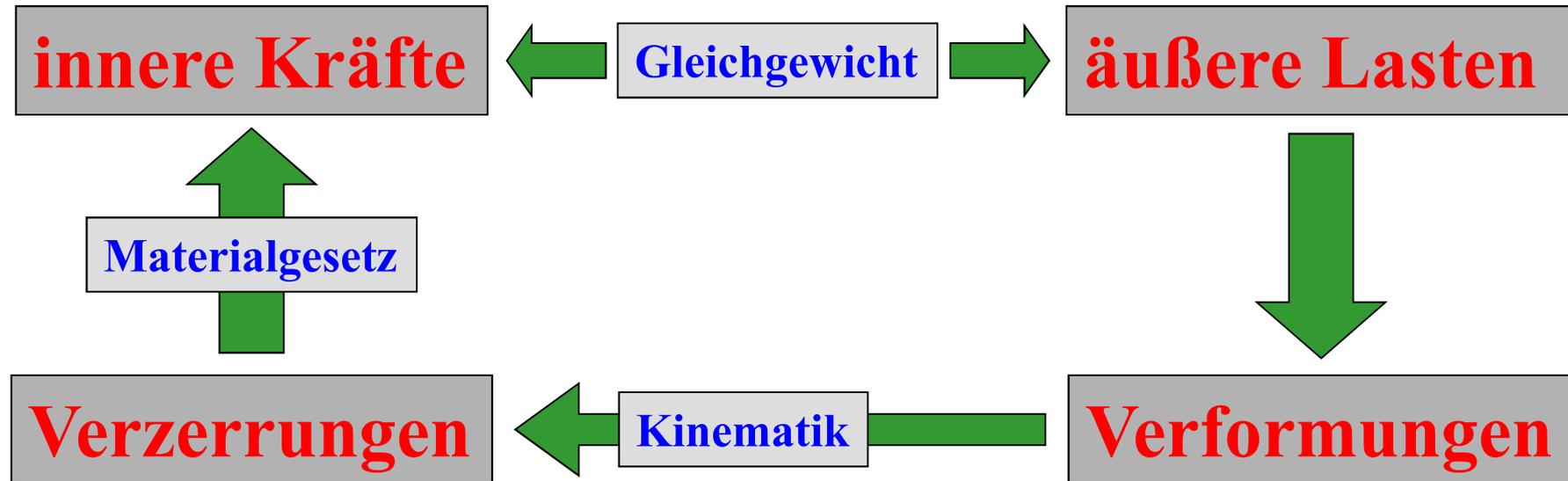
Es gibt immer ***eine einzige eindeutige Lösung!*** Für jeden Wert von P können wir einen zugehörigen Wert von w ermitteln.

Die Tragfähigkeit ist nur durch die ***maximal aufnehmbare Spannung*** beschränkt. Bei einem unendlich tragfähigen Material könnte die Normalkraft unendlich groß werden. Wir bezeichnen ein derartiges Problem als ***Spannungsproblem***, genauer gesagt ein ***lineares Spannungsproblem***.



menum

Einige Gedanken zum Gleichgewicht



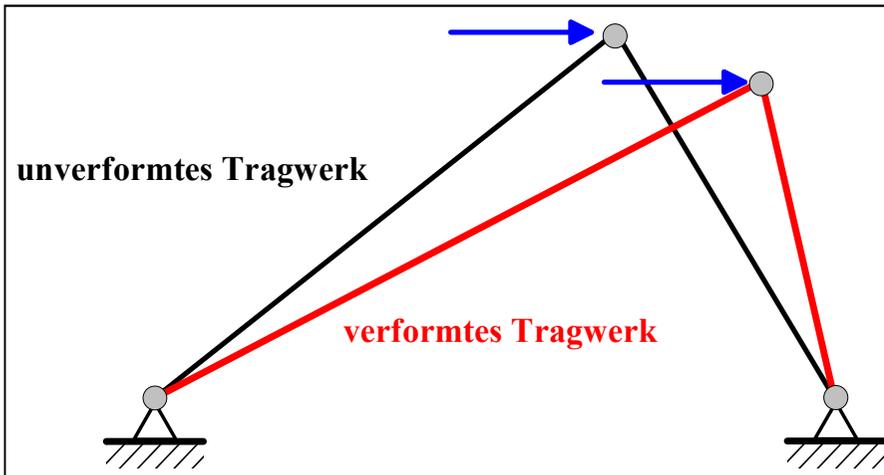
- Ohne Verformungen keine Verzerrungen.
- Ohne Verzerrungen keine Schnittgrößen.
- Ohne Schnittgrößen kein Gleichgewicht.



menum

Gleichgewicht am unverformten Tragwerk ist Unsinn!

Gleichgewicht herrscht zwischen den äußeren Lasten und den inneren Kräften. Die inneren Kräfte entstehen in den einzelnen Bauteilen. **Kein Bauteil, keine Kraft!** Unter der Last gibt es nur die roten verformten Stäbe. In diesen entstehen die Normalkräfte, die also in Richtung der **verformten Geometrie** wirken. Bei Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung müssen also die Stabkräfte in Richtung der **roten verformten Stäbe** angesetzt werden.



Das Aufstellen des Gleichgewichts am verformten System führt zu **nichtlinearen Gleichungen**. Da die Nichtlinearität auf den Unterschied zwischen der Ausgangsgeometrie und der verformten Geometrie zurückzuführen ist, spricht man von **geometrischer Nichtlinearität**.

Alle Tragwerke sind demnach geometrisch nichtlinear! Sind die **Verformungen klein**, kann der Effekt aber vernachlässigt werden.

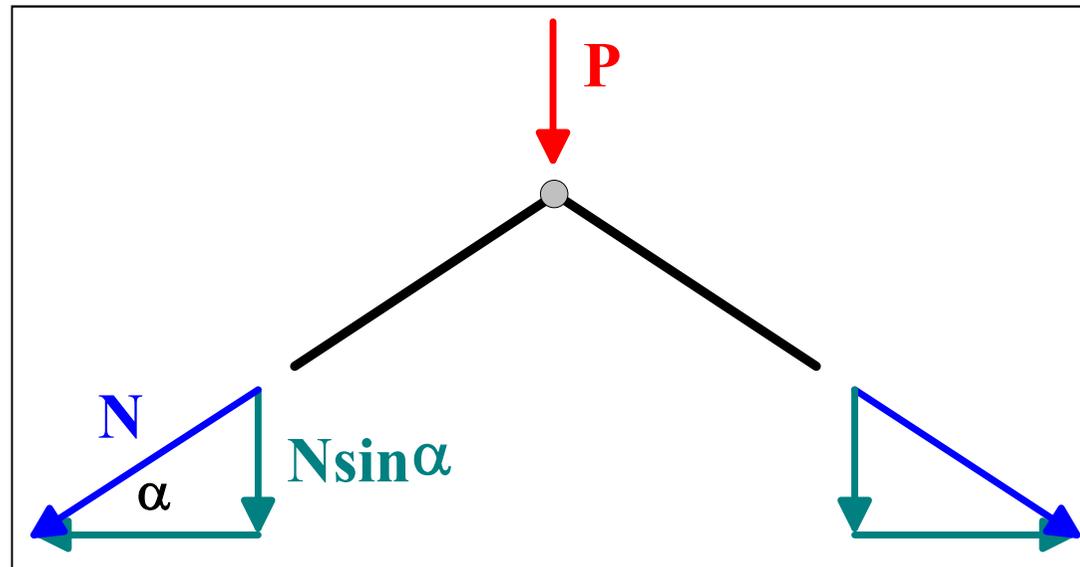
Wie geht man aber bei nicht vernachlässigbar kleinen Verformungen vor?



menum

Nichtlineare analytische Lösung I: Gleichgewicht

Normalkraft: Gleichgewicht am **VERFORMTEN** System

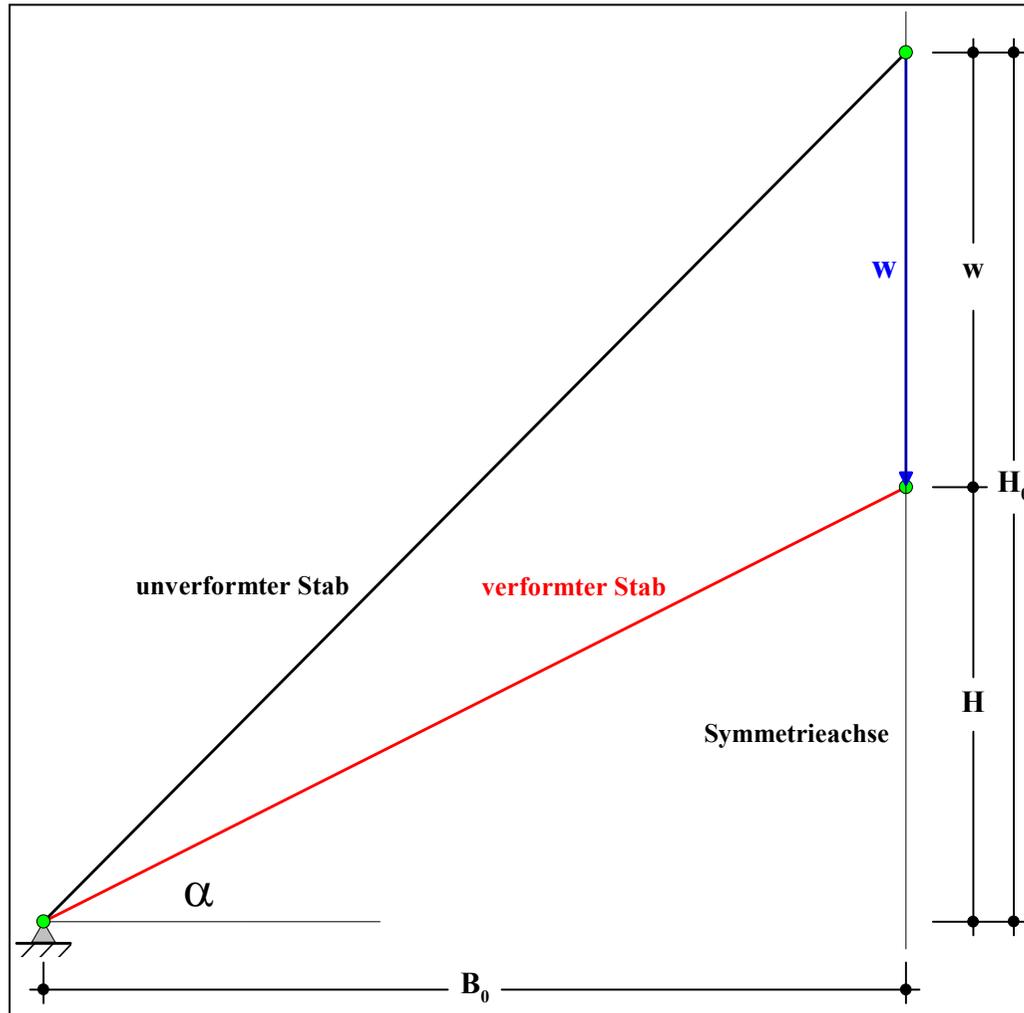


$$N = -\frac{P}{2 \sin \alpha}$$



menum

Nichtlineare Lösung II: Verformte Geometrie



$$L = \sqrt{B_0^2 + (H_0 - w)^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{H}{B_0} = \frac{H_0 - w}{B_0}$$

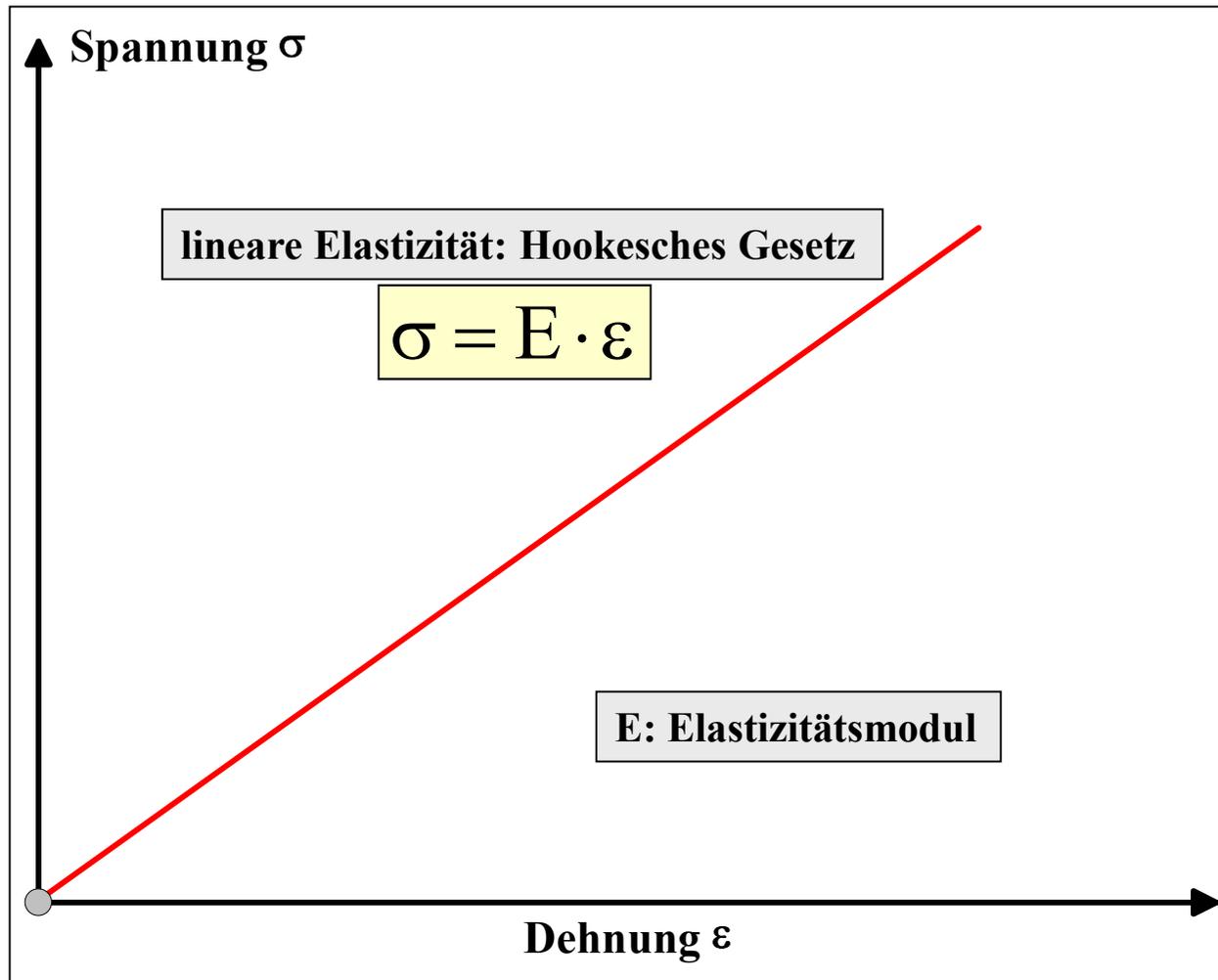
$$\sin \alpha = \frac{H_0 - w}{\sqrt{B_0^2 + (H_0 - w)^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{B_0}{\sqrt{B_0^2 + (H_0 - w)^2}}$$



menum

Nichtlineare Lösung III: Materialgesetz



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$



menum

Nichtlineare Lösung IV: Stabkinematik

Benötigt wird eine **Dehnungsdefinition**. Die bislang im Studium einzig verwendete Dehnung ist die sog. **Ingenieurdehnung**. Sie ist definiert als die **relative Längenänderung**, und zwar bezogen auf die **Ausgangslänge**. Die Definition der Ingenieurdehnung erwächst aus der Anschauung – sie wird verwendet, wenn aus Materialversuchen der Elastizitätsmodul E bestimmt wird. Sie gilt für **kleine Dehnungen**.

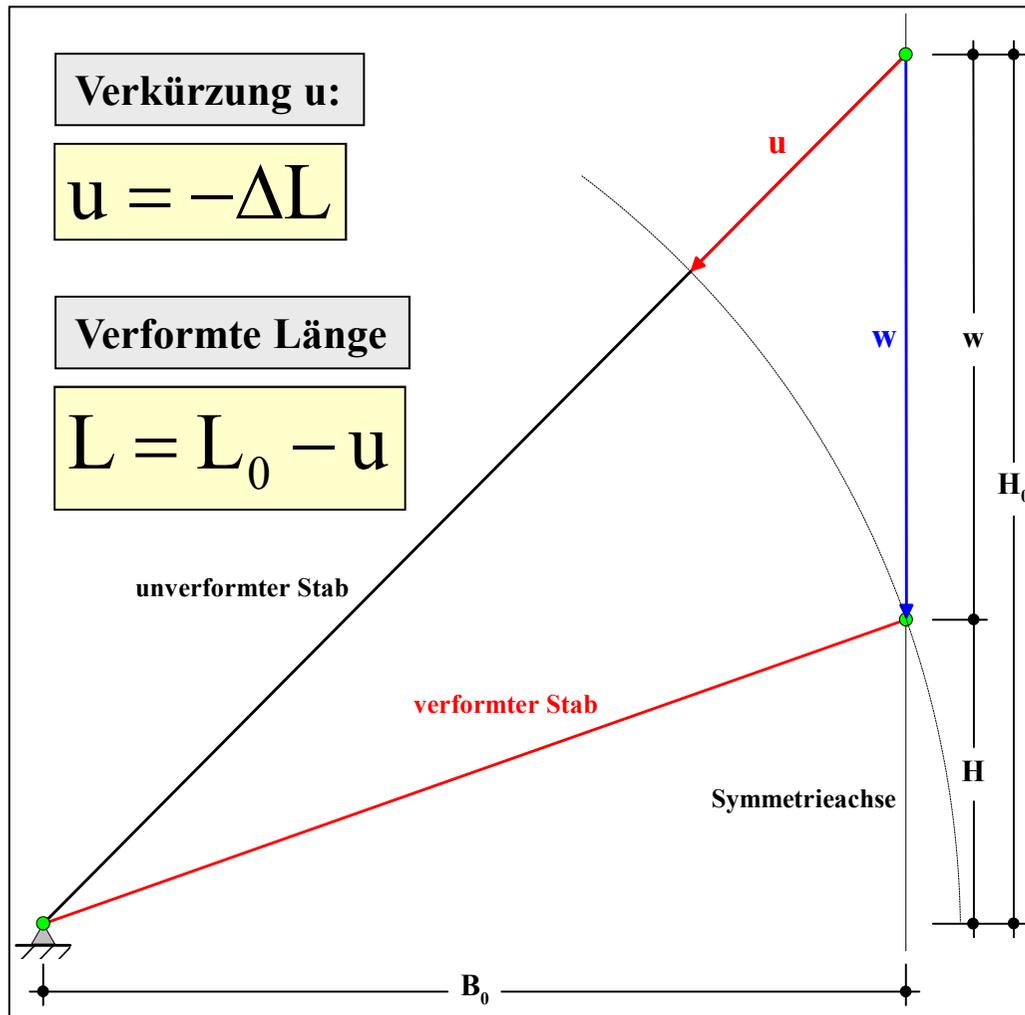
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \longrightarrow \quad \Delta L = \varepsilon \cdot L_0$$

Es gibt jedoch weitere Dehnungsdefinitionen, z.B. für **große Dehnungen** die sog. **logarithmische Dehnung** oder die sog. **GREEN/LAGRANGESCHE Dehnung**. Wichtig bei der Definition der Verzerrungen ist: auch bei großen Starrkörperbewegungen müssen sich Null-Verzerrungen ergeben.

Die gebräuchlichen Baumaterialien sind auf kleine Dehnungen beschränkt (die maximal zulässige Stauchung von Betons beispielsweise beträgt 0.35 %), so dass wir die Ingenieurdehnung verwenden dürfen.



Nichtlineare Lösung V-I: Kinematisches Modell A



Modell A: Der Stab erleidet die *elastische* Verkürzung u . zusätzlich führt er eine *Starrkörperrotation* durch. Der verformte Firstpunkt muss auf der Symmetrieachse liegen und ergibt sich somit als Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius der *verformten Stablänge* L mit der Symmetrieachse.

Pythagoras:

$$B_0^2 + (H_0 - w)^2 = (L_0 - u)^2$$



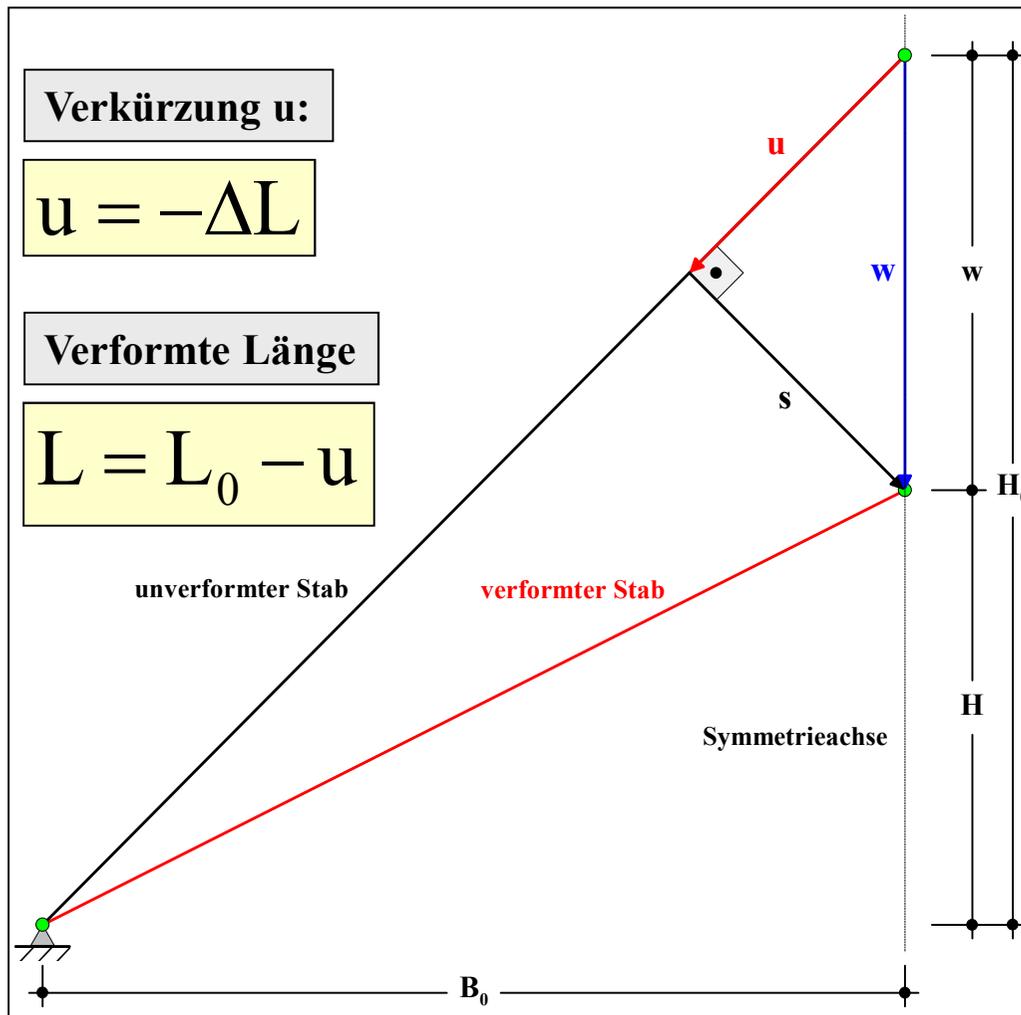
Durchsenkung:

$$w = H_0 - \sqrt{(L_0 - u)^2 - B_0^2}$$



menum

Nichtlineare Lösung V-II: Kinematisches Modell B



Modell B: wir nehmen Verschiebungen von *moderater Größe* an. Dann dürfen wir den Kreisbogen durch seine Tangente ersetzen. Die Tangente steht senkrecht auf dem unverformten Stab. Erneut finden wir den verformten Punkt als Schnittpunkt der Tangente mit der Symmetrieachse..

Durchsenkung:

$$w = \frac{u}{\sin \alpha_0}$$



menum

Beobachtung I

Es gibt keine geometrisch nichtlineare Theorie an sich, sondern es existieren eine Reihe von *unterschiedlichen Approximationen*. Unterschiedliche FE-Programme können unterschiedliche Approximationen enthalten und liefern dann auch unterschiedliche Ergebnisse.

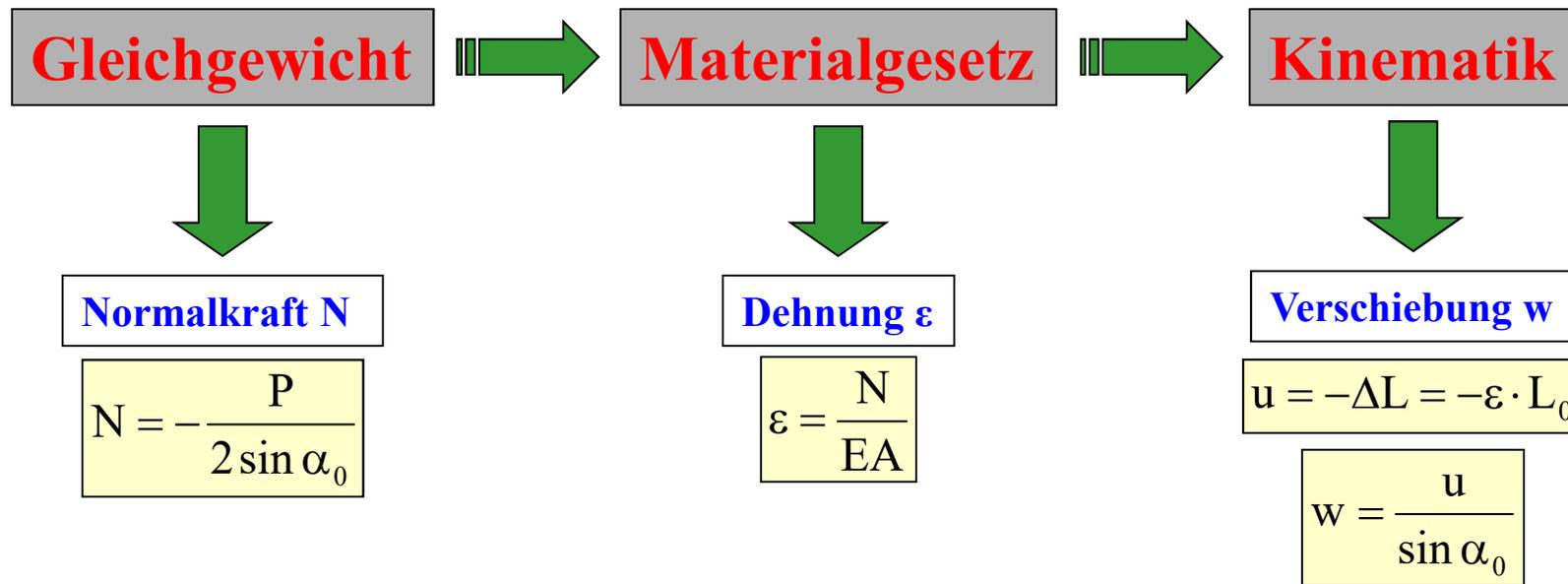
Allgemein unterscheiden wir zwischen:

- 1. Theorien 1. Ordnung*: geometrisch linear.
- 2. Theorien 2. Ordnung*: vereinfachte geometrisch nichtlineare Theorien, deren Anwendung auf bestimmte Tragwerkstypen beschränkt ist. Hierbei gibt es verschiedene Formulierungen.
- 3. Theorien 3. Ordnung*: vollständig geometrisch nichtlinear, jedoch gibt es auch hier unterschiedliche Approximationen jenseits der 2. Ordnung.

N.B.: Die Welt der geometrisch nichtlinearen Theorien ist komplexer als die Welt der linearen Theorien.



Lineares Problem: Sequentielle Lösung

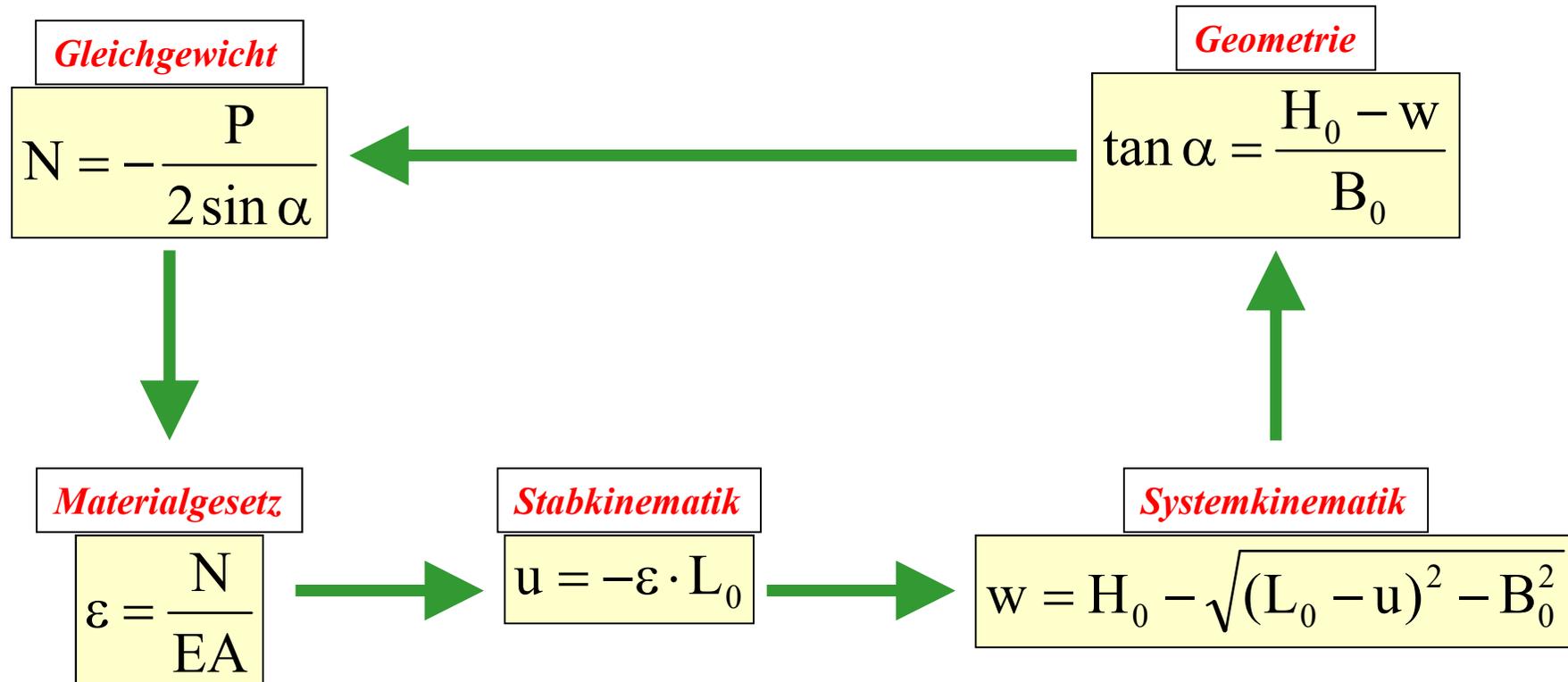


Die Grundgleichungen bei dem *statisch bestimmten Problem* können sequentiell abgearbeitet werden. Sie sind unabhängig voneinander in dem Sinne, dass die *Nachfolgleichungen* zwar das *Ergebnis* der *Vorläufergleichungen* benötigen, die Vorläufergleichungen jedoch von den Nachfolgern unabhängig sind. Bei *statisch unbestimmten Problemen* wären die Gleichungen auch *unabhängig* – man müsste nur die Gleichungssätze *simultan lösen*, da nur bei der gleichzeitigen Betrachtung aller Gleichungen die Anzahl der Gesamtunbekannten gleich der Anzahl der Gesamtgleichungen ist.



menum

Nichtlineares Problem: Kreis abhängiger Gleichungen



Es entsteht auch bei dem statisch bestimmten Problem ein *geschlossener Kreislauf von Gleichungen*, wobei jede Gleichung von einer Vorgängergleichung abhängt, so dass es keinen Anfangspunkt gibt, für den sämtliche notwendigen Daten bekannt sind.



menum

Lösungsstrategie I: Aufstellen einer Gesamtgleichung

Nacheinander werden Materialgesetz, Stabkinematik und Systemkinematik in das Gleichgewicht eingesetzt, bis als einzige Unbekannte die Systemweggröße verbleibt. Nachfolgend zwei Versionen mit w oder alternativ α als Systemunbekannte.

Version I: Durchsenkung w als Systemunbekannte

$$-2EA(H_0 - w) \left\{ \frac{1}{L_0} - \frac{1}{\sqrt{B_0^2 + (H_0 - w)^2}} \right\} = P$$

Version II: Winkel α als Systemunbekannte

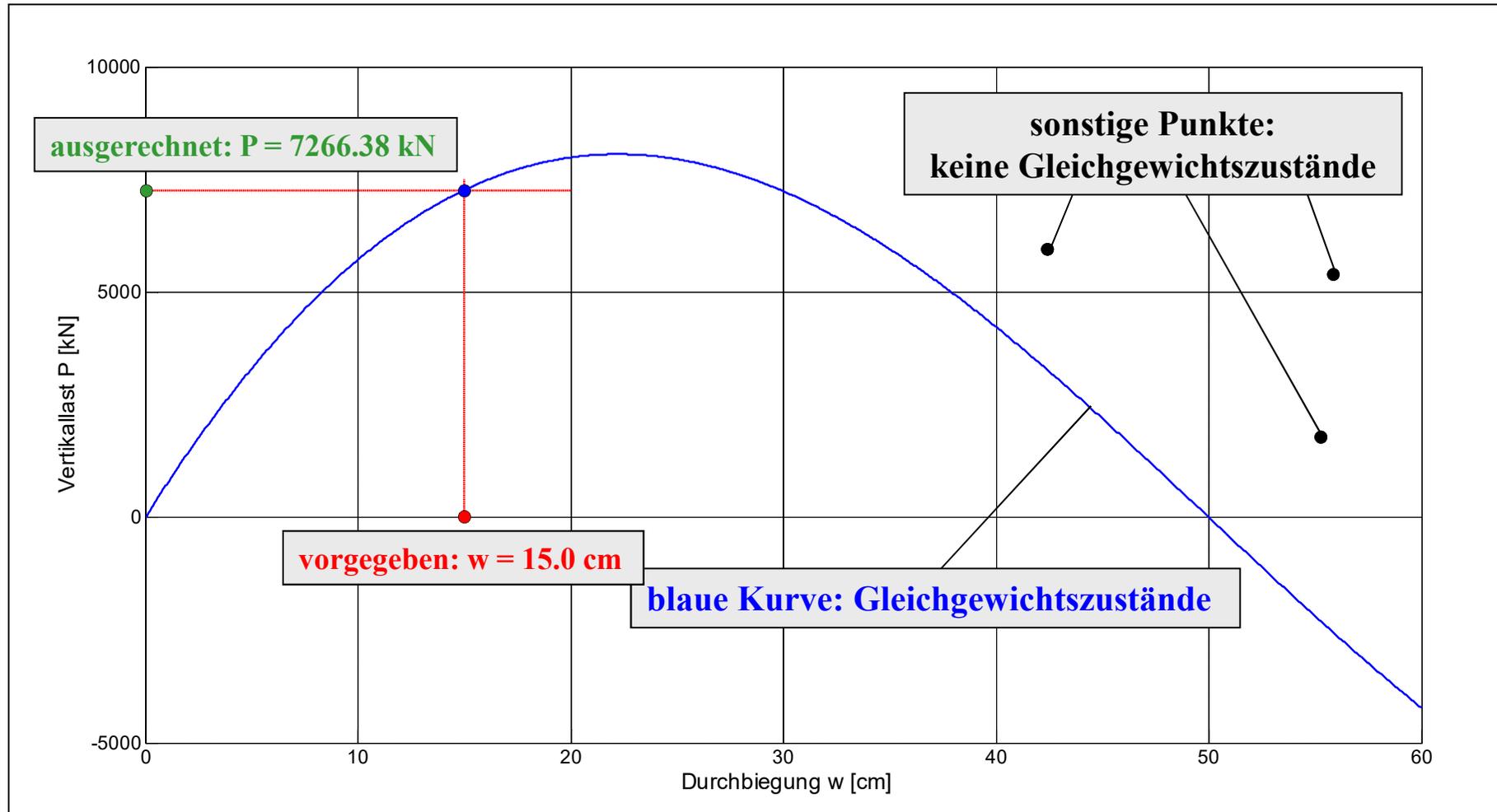
$$-2EA \left\{ \frac{B_0}{L_0} \tan \alpha - \sin \alpha \right\} = P$$

Die resultierende Systemgleichung ist **nichtlinear**. Bei vorgegebenem w kann man leicht durch Einsetzen das zugehörige P ausrechnen. Setzt man den gesamten sinnvollen Wertebereich von w ein, erhält man eine Kurve, das sog. **Last-Verformungs-Diagramm**. Alle Punkte auf dieser Kurve stellen **Gleichgewichtszustände** dar; für alle nicht auf der Kurve liegenden Kombinationen P/w ist die Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllt.



menum

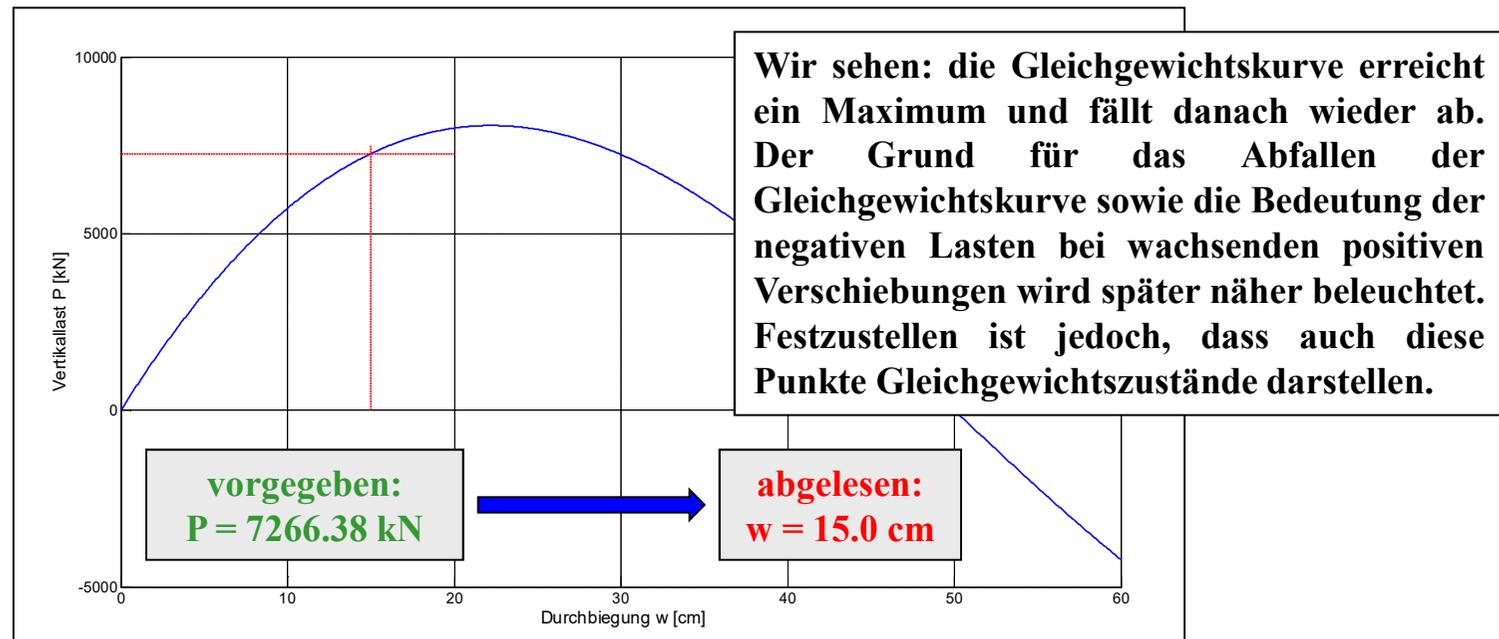
Last-Verformungs-Diagramm



menum

Bestimmung von w aus dem Last-Verformungs-Diagramm

Mit dem Last-Verformungsdiagramm ist auch das *inverse Problem* (P gegeben, w gesucht) dadurch lösbar, indem man zu einem *vorgegebenen P* das *zugehörige w abliest*.

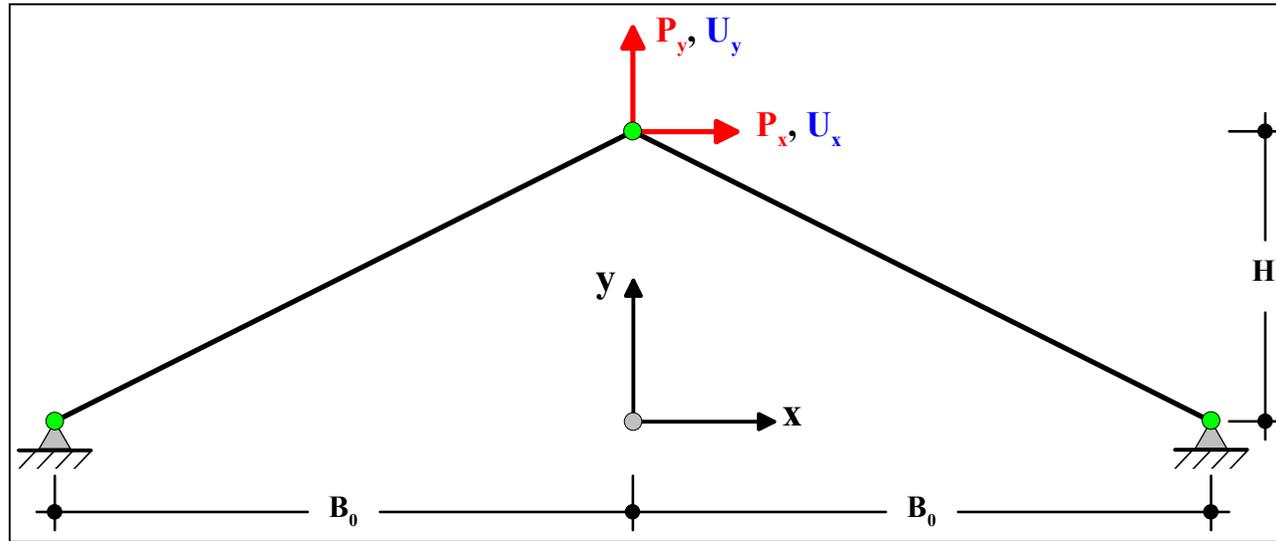


Schon bei einem Problem mit zwei Freiheitsgraden gestaltet sich die Bestimmung des Verschiebungszustandes zu einem vorgegebenen Lastzustand ungleich schwieriger.



menum

Verallgemeinerung auf 2 FG:



Nichtlineares *Gleichungssystem* mit 2 Systemunbekannten U_x und U_y

$$(EA)_1(B_0 + U_x) \left\{ \frac{1}{L_{10}} - \frac{1}{\sqrt{(B_0 + U_x)^2 + (H_0 + U_y)^2}} \right\} - (EA)_2(B_0 - U_x) \left\{ \frac{1}{L_{20}} - \frac{1}{\sqrt{(B_0 - U_x)^2 + (H_0 + U_y)^2}} \right\} = P_x$$

$$(EA)_1(H_0 + U_y) \left\{ \frac{1}{L_{10}} - \frac{1}{\sqrt{(B_0 + U_x)^2 + (H_0 + U_y)^2}} \right\} + (EA)_2(H_0 + U_y) \left\{ \frac{1}{L_{20}} - \frac{1}{\sqrt{(B_0 - U_x)^2 + (H_0 + U_y)^2}} \right\} = P_y$$



menum

Offene Fragen I:

Beliebige Tragwerke: Nichtlineares Gleichgewicht

Unser Fachwerkbeispiel ist extrem einfach – es stellt sogar das einfachst denkbare Beispiel dar. Jedoch war schon für das Problem mit nur 2 Freiheitsgraden die Ableitung des nichtlinearen Gleichungssystems nicht ganz so einfach. Schon der Übergang zu 3 Freiheitsgraden bei einem räumlichen Bock würde den Aufwand unakzeptabel hoch werden lassen.

Was wäre dann mit Systemen mit tausenden von Freiheitsgraden? Beliebige Tragwerke wie räumliche Rahmen, Bögen, Schalen oder Kontinua. Offensichtlich brauchen wir ein allgemeineres Konzept zur deren Lösung. Wir benötigen:

**Ein allgemeines Konzept für
geometrische Nichtlinearität**



menum

Bestimmung der Lösung?

Wiederum gilt: man kann beide Verschiebungen U_x und U_y beliebig vorgeben und erhält aus den Gleichgewichtsbedingungen die beiden zugehörigen Lasten P_x und P_y .

Beispiel

$$U_x = 20.0 \text{ cm}$$

$$U_y = -10.0 \text{ cm}$$



$$P_x = 63738.10 \text{ kN}$$

$$P_y = - - 10058.92 \text{ kN}$$

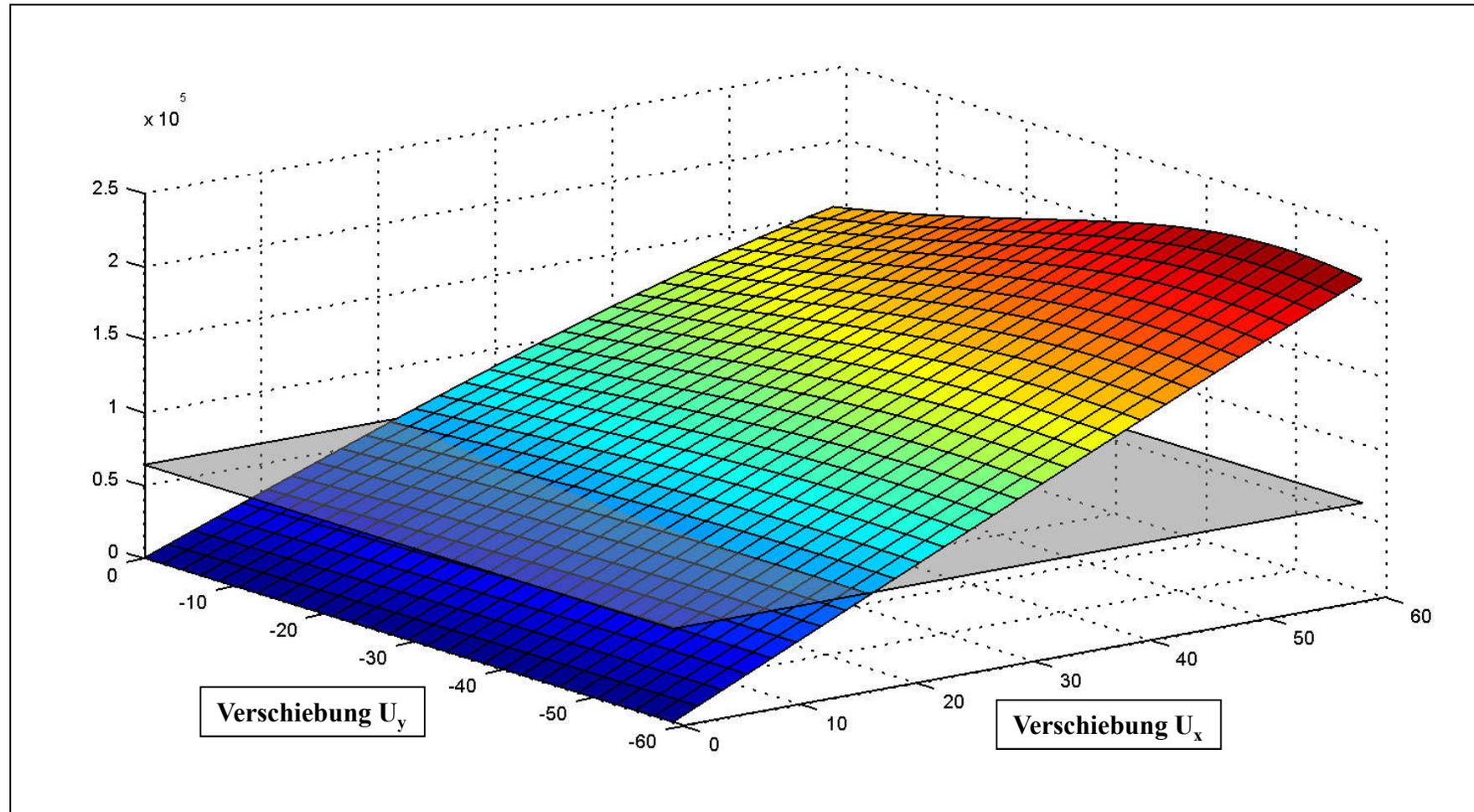
Nicht evident ist die Lösung der inversen Fragestellung: man gibt die oben ausgerechneten Lasten vor, und möchte die zugehörigen Verschiebungen bestimmen. Schon bei zwei Freiheitsgraden lässt sich der Lösungsraum nicht in Form einer Kurve darstellen. Die beiden Freiheitsgrade spannen eine Ebene auf, über der man P_x und P_y aufzutragen hätte. Dafür benötigt man zwei Diagramme, in denen jeweils eine *Fläche* dargestellt wird. Alle Punkte auf diesen Flächen stellen *Gleichgewichtszustände* dar.

Die Vorgabe einer Last P_{x0} liefert dann als Schnittmenge der *Gleichgewichtsfläche* mit der *Ebene* $P_x = P_{x0}$ eine *Schnittkurve*; es gibt also unendlich viele Gleichgewichtszustände zu einer vorgegeben Lastkomponente.



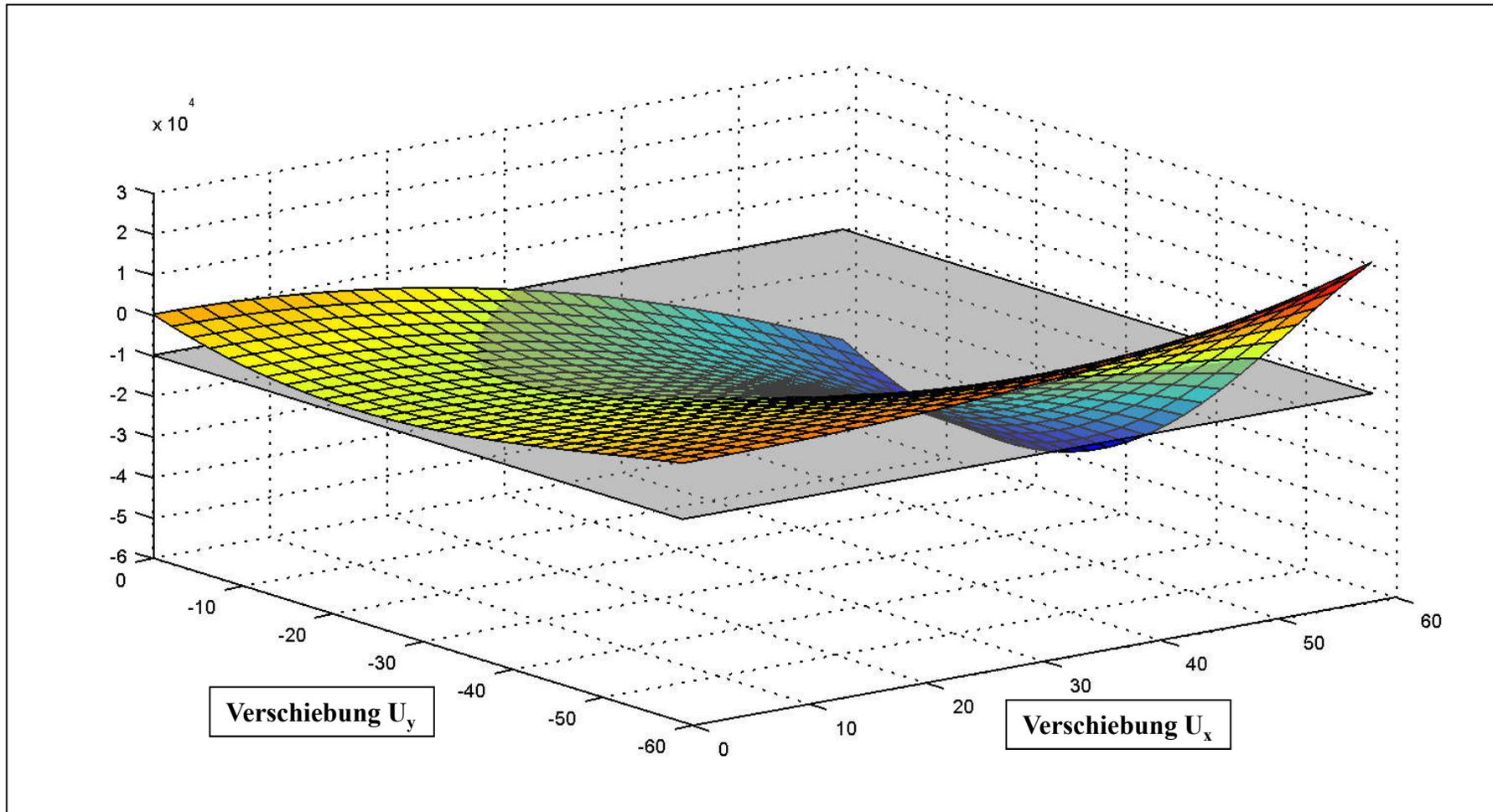
menum

Gleichgewichtsfläche für P_x



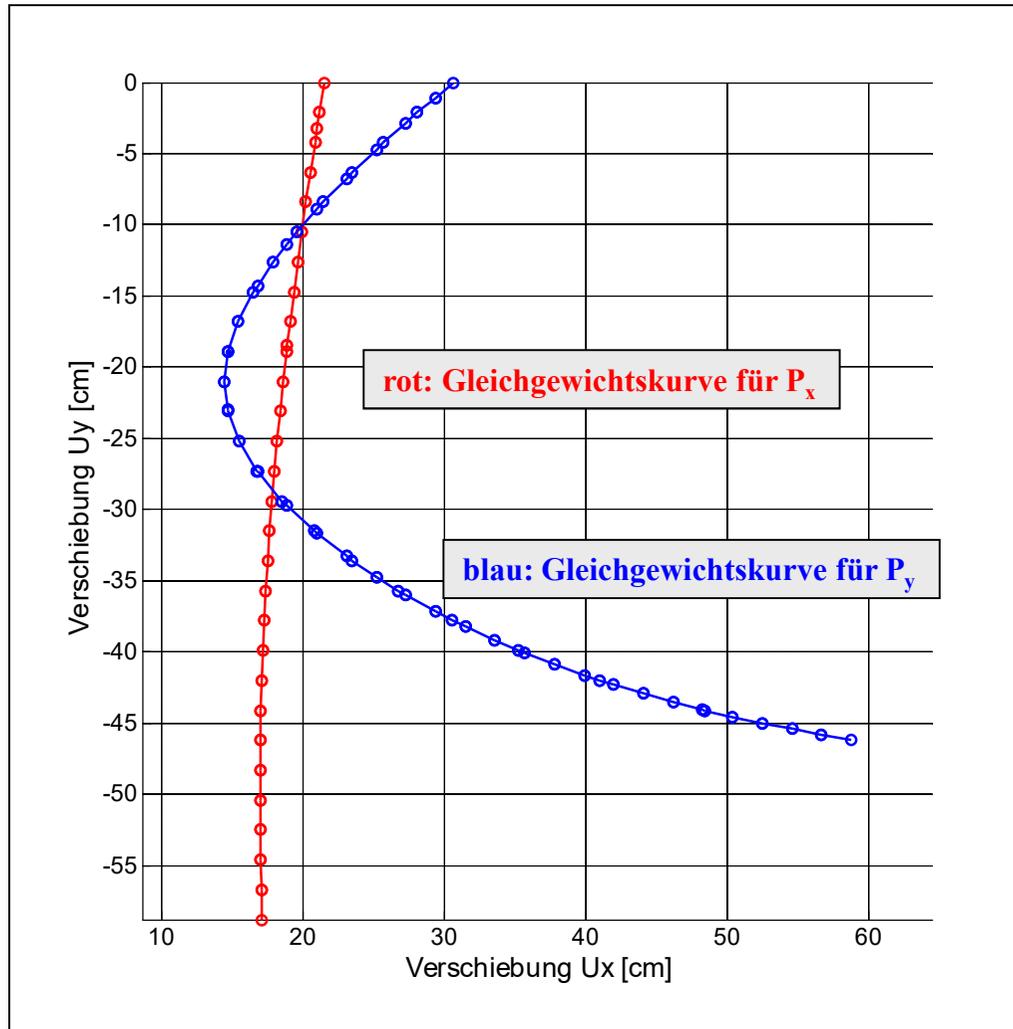
menum

Gleichgewichtsfläche für P_y



menum

Gleichgewichtskurven für P_x und P_y



Gesucht wird derjenige Zustand, der *beide Gleichgewichtsbedingungen* erfüllt, also auf *beiden Kurven gleichzeitig* liegt. Man erkennt, dass es nicht einen, sondern *zwei derartige Punkte* gibt. Die numerische Schnittpunktbestimmung liefert:

Nr	U_x [cm]	U_y [cm]
1	20.0021	-10.0042
2	17.8759	-28.6098

Der erste obere Punkt entspricht bis auf kleine numerische Ungenauigkeiten genau der gesuchten Lösung. Die Bedeutung des Punktes 2 ist zunächst unklar. Ob dieser Punkt relevant ist, wird später diskutiert. Klar ist jedoch, dass ein Lösungskonzept, welches auf Ablesen aus Diagrammen basiert, nicht zielführend ist, denn schon bei drei Freiheitsgraden versagt es, da man Flächen höherer Dimension erhalten würde.



Offene Fragen II: Nichteindeutige Lösungen

Wir haben zwei Lösungen gefunden, die beide Gleichgewichtszustände darstellen, und wir wissen nicht, welche dieser Lösungen relevant ist. Vielleicht kann es auch noch mehr Lösungen geben: drei, vier – wo ist die Grenze? Wie können wir aus dieser uneindeutigen Lösungsvielfalt die “wahre” Lösung herausgreifen?

**Gibt es Eigenschaften, welche die
mehrfachen Gleichgewichtspunkte
unterscheidbar machen?**



menum

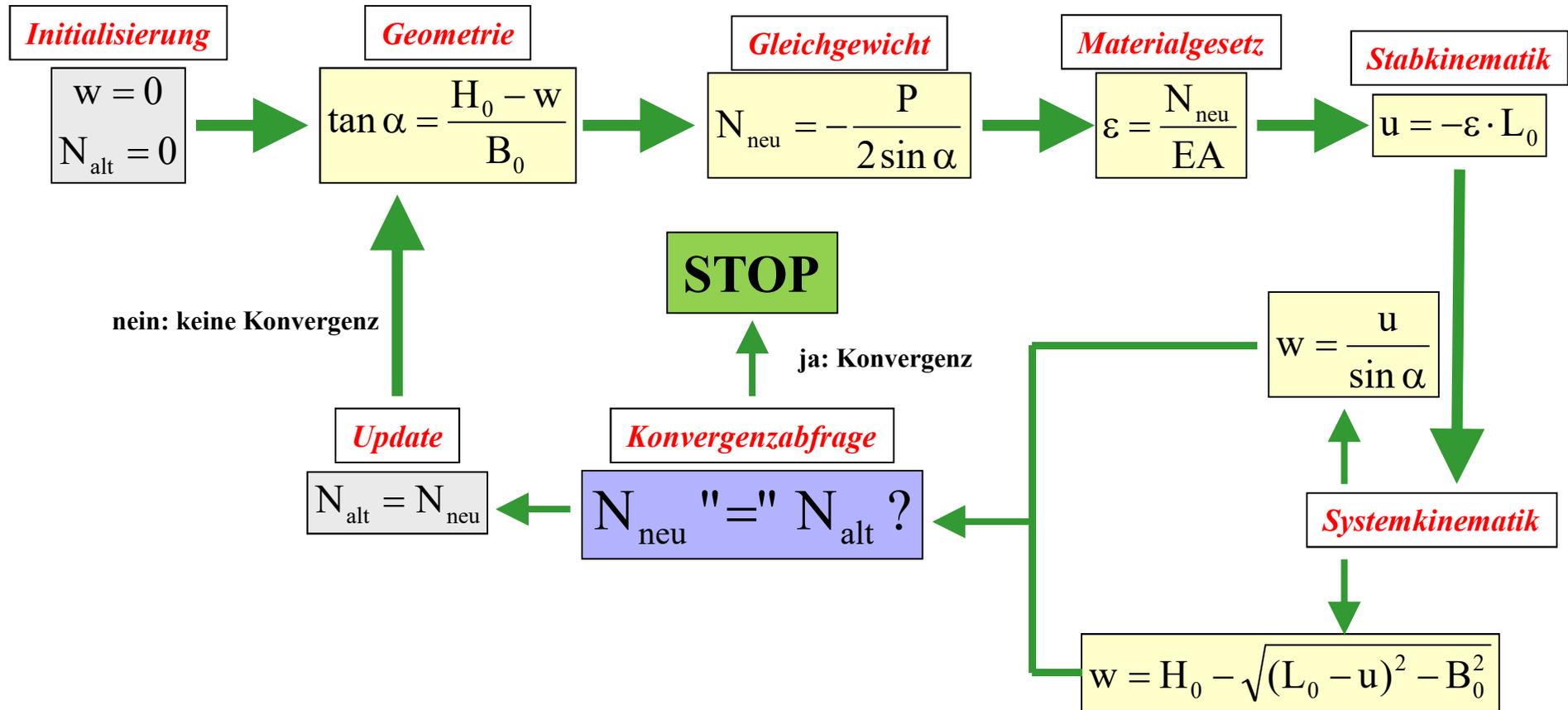
Open Questions III: Kinematic Models

Application ranges for different theories? Which kind of theory can be used for which class of problems?



menum

Lösungsstrategie II: Formulierung eines Iterationsalgorithmus



menum

Ergebnisse des kinematischen Modells A: Theorie großer Verschiebungen

Iteration	w_{alt} [cm]	N_{alt} [kN]	α [°]	N_{neu} [kN]	w_{neu} [cm]
1	0.000	0.00	26.57	-8944.27	11.818
2	11.818	-8944.27	20.90	-11213.75	15.349
3	15.349	-11213.75	19.11	-12217.15	17.017
...					
20	20.131	-13970.38	16.63	-13976.27	20.142
...					
48	20.186	-13999.94	16.60	-13999.95	20.186



Ergebnisse des kinematischen Modells B: Theorie moderater Verschiebungen

Iteration	w_{alt} [cm]	N_{alt} [kN]	α [°]	N_{neu} [kN]	w_{neu} [cm]
1	0.000	0.00	26.57	-8944.27	10.648
2	10.648	-8944.27	21.48	-10923.38	13.004
3	13.004	-10923.38	20.30	-11528.18	13.724
...					
7	14.075	-11822.58	19.76	-11830.87	14.084
...					
14	14.090	-11835.27	19.75	-11835.27	14.090



Kinematisches Modell A – Kinematisches Modell B

Errechnete Normalkräfte bei $P = 8000$ kN:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------|----------------|
| • lineare Theorie: | $N = -8944$ kN | |
| • geometrisch nichtlinear, Modell B: | $N = -11835$ kN | 14 Iterationen |
| • geometrisch nichtlinear, Modell A: | $N = -14000$ kN | 48 Iterationen |

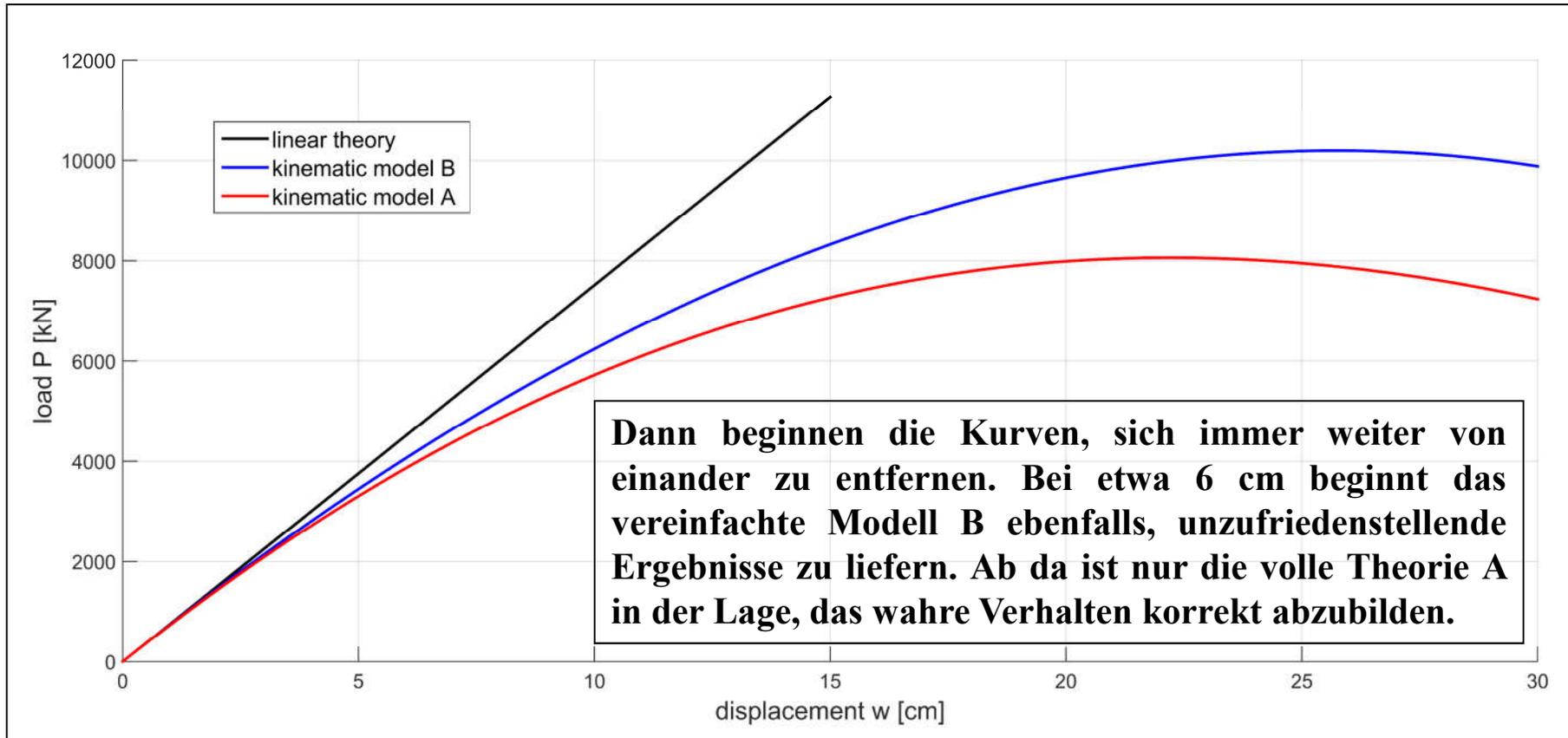
Für das vorliegende Beispiel:

- die Ergebnisse hängen signifikant von der verwendeten Theorie ab.
- die Iterationsgeschwindigkeit hängt vom Grad der Nichtlinearität ab. Je nichtlinearer, desto mehr Iterationen sind notwendig.
- die lineare Theorie ist nicht nur ungenau, sondern regelrecht falsch.
- das vereinfachte Modell B kann die wahre Bewegung nicht ausreichend gut erfassen.
- die Verformungen sind so groß, dass nur das exakte Modell A anwendbar ist.



Vergleich der drei Modelle

Wir sehen die Last-Verformungsdiagramme der drei Modelle. Für kleine Verschiebungen (etwa 2.5 cm) sind die Kurven praktisch identisch. Das stützt die Behauptung, dass die Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität für ausreichend kleine Verschiebungen unnötig ist



menum

Offene Fragen III: Kinematische Modelle

**Anwendungsbereiche und –
grenzen der verschiedenen
Theorien? Welche Art von
Theorie ist für welche Klassen
von Problemen geeignet?**



menum

Offene Fragen IV: Iterationsalgorithmen

**Gibt es bessere
Iterationsmethoden als unsere
intuitiv entwickelte
Vorgehensweise? Genauigkeit?
Geschwindigkeit? Robustheit?**



menum

Offene Fragen V: Lösbarkeit

Gibt es immer mindestens eine Lösung, oder kann es auch sein, dass es überhaupt keine Lösung gibt? Dann wäre für diese Last kein Gleichgewicht möglich.



menum

Ist Gleichgewicht immer möglich?

Wir nehmen ein fiktives Material an, welches unendlich hohe Spannungen ertragen kann. Damit ist Materialversagen ausgeschlossen. Heißt das, dass der Fachwerkbock unendlich hohe Lasten P tragen kann?

Lineare Theorie: Die Tragfähigkeit ist in der Tat unendlich hoch, da es möglich ist, zu jedem P ein entsprechendes N auszurechnen.

$$N = -\frac{P}{2 \sin \alpha_0}$$

Geometrisch nichtlineare Theorie A: Der verformte Kopfpunkt liegt auf der Symmetrieachse. Damit Gleichgewicht möglich ist, muss es also einen Schnittpunkt zwischen dem Kreis mit Radius L und der Symmetrieachse geben. Diesen gibt es nicht, wenn L kleiner wird als die halbe Spannweite B_0 . Damit ist die maximale Normalkraft allein aus geometrischen Überlegungen begrenzt.

$$L_{\min} = B_0$$



$$\varepsilon_{\max} = \frac{B_0 - L_0}{L_0}$$



$$N_{\max} = EA \frac{B_0 - L_0}{L_0}$$

Die Begrenzung der Tragfähigkeit bei unbegrenzt tragfähigem Material stellt ein sog. **Stabilitätsversagen** dar. Der Mechanismus, der zum Stabilitätsverlust führt, ist komplexer als die hier vorgenommene geometrische Überlegung, so dass die wahre Stabilitätslast kleiner ist als das hier errechnete N_{\max} .



menum

Offene Fragen VI: Stabilitätsprobleme

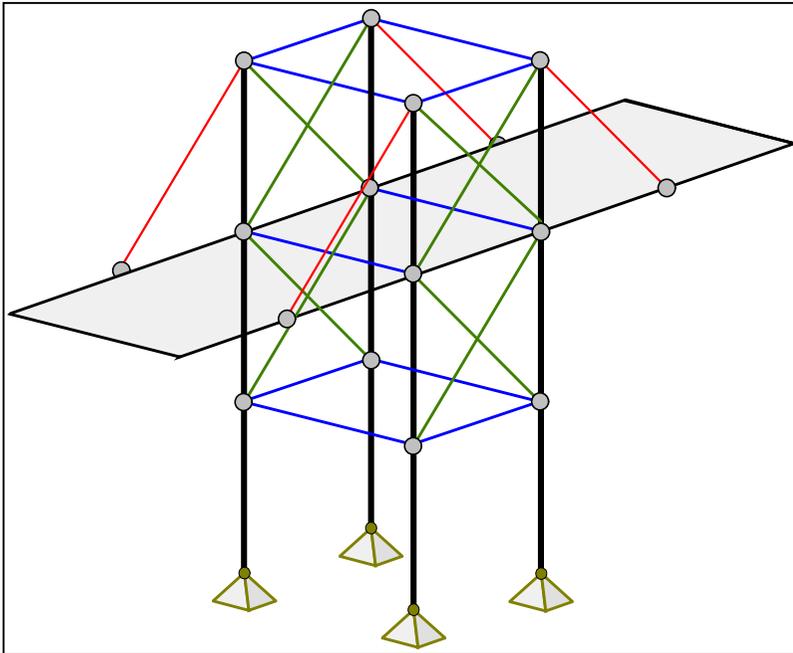
**Welche Mechanismen des
Stabilitätsversagens existieren?
Wie können wir die
Stabilitätslasten berechnen?**



menum

Einige Gedanken zum Traglastgrenzzustand

Normalfall: eine Tragstruktur besteht aus einer Vielzahl von Bauteilen.



Offensichtliches Nichtversagen: Wenn kein einzelnes Bauteil versagt, versagt die Gesamtstruktur auch nicht, wenn Stabilitätsversagen ausgeschlossen wird.

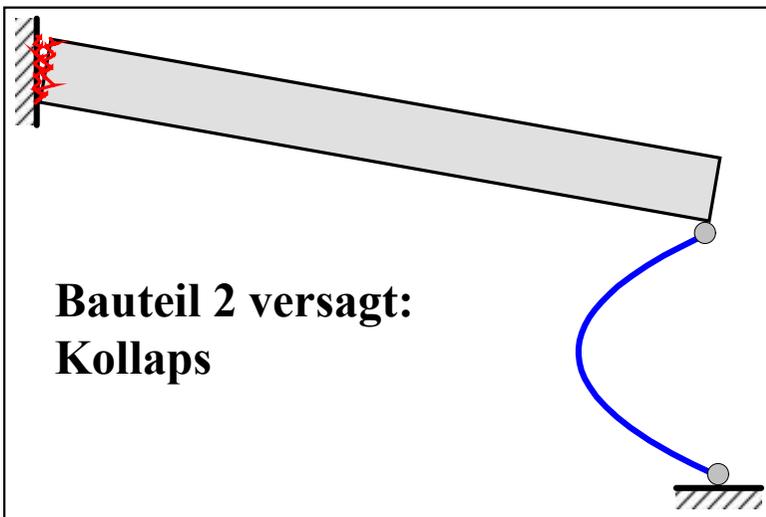
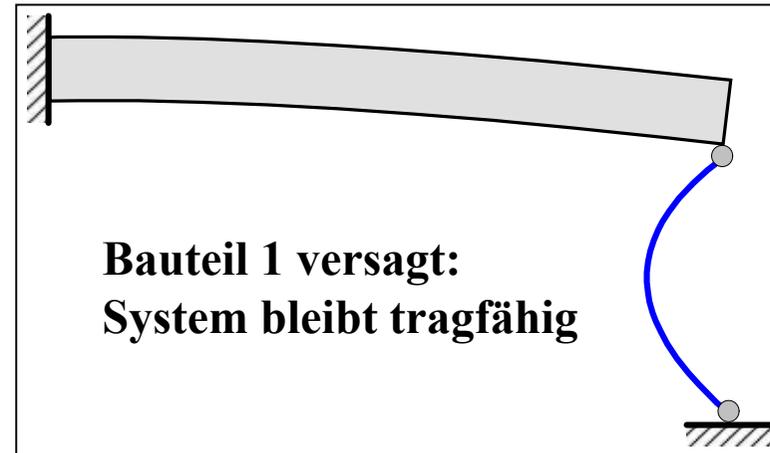
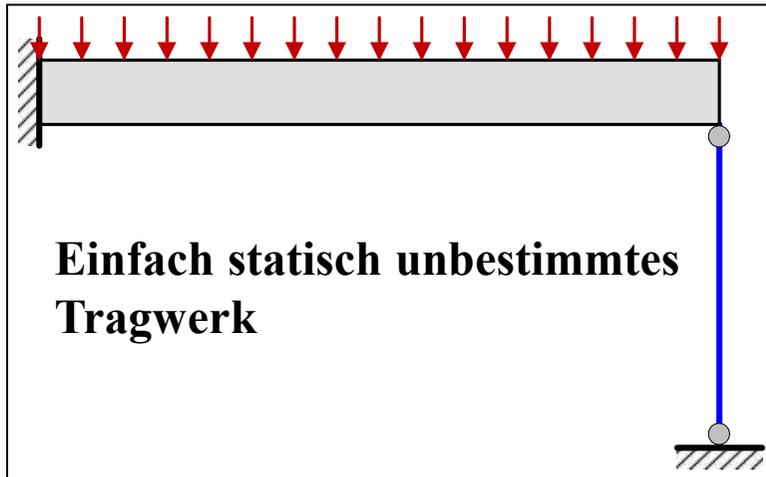
Ist die Verneinung der obigen Aussage wahr?

NEIN! Das Versagen einzelner Bauteile zieht nicht notwendigerweise das Versagen der Gesamtstruktur nach sich. Nur bei statisch bestimmten Tragwerken ist jedes Bauteil zur Sicherung des Gleichgewichts notwendig. Bei statisch unbestimmten Tragwerken können Kräfte von überbeanspruchten Bauteilen auf Bauteile mit Reserven umgelagert werden. Das Tragsystem verfügt über *Traglastreserven*, welche aktiviert werden können, wenn wir im Rahmen einer *plastischen Bemessung* lokales Versagen / lokale Schädigung einzelner Bauteile gestatten.



menum

Einfaches Beispiel: Balken mit Pendelstütze



Ein Stabtragwerk kann statisch bestimmt oder unbestimmt sein; Flächentragwerke sind immer in sich statisch unbestimmt, so dass sie immer die Fähigkeit haben, Kräfte innerhalb von sich selbst umzulagern.

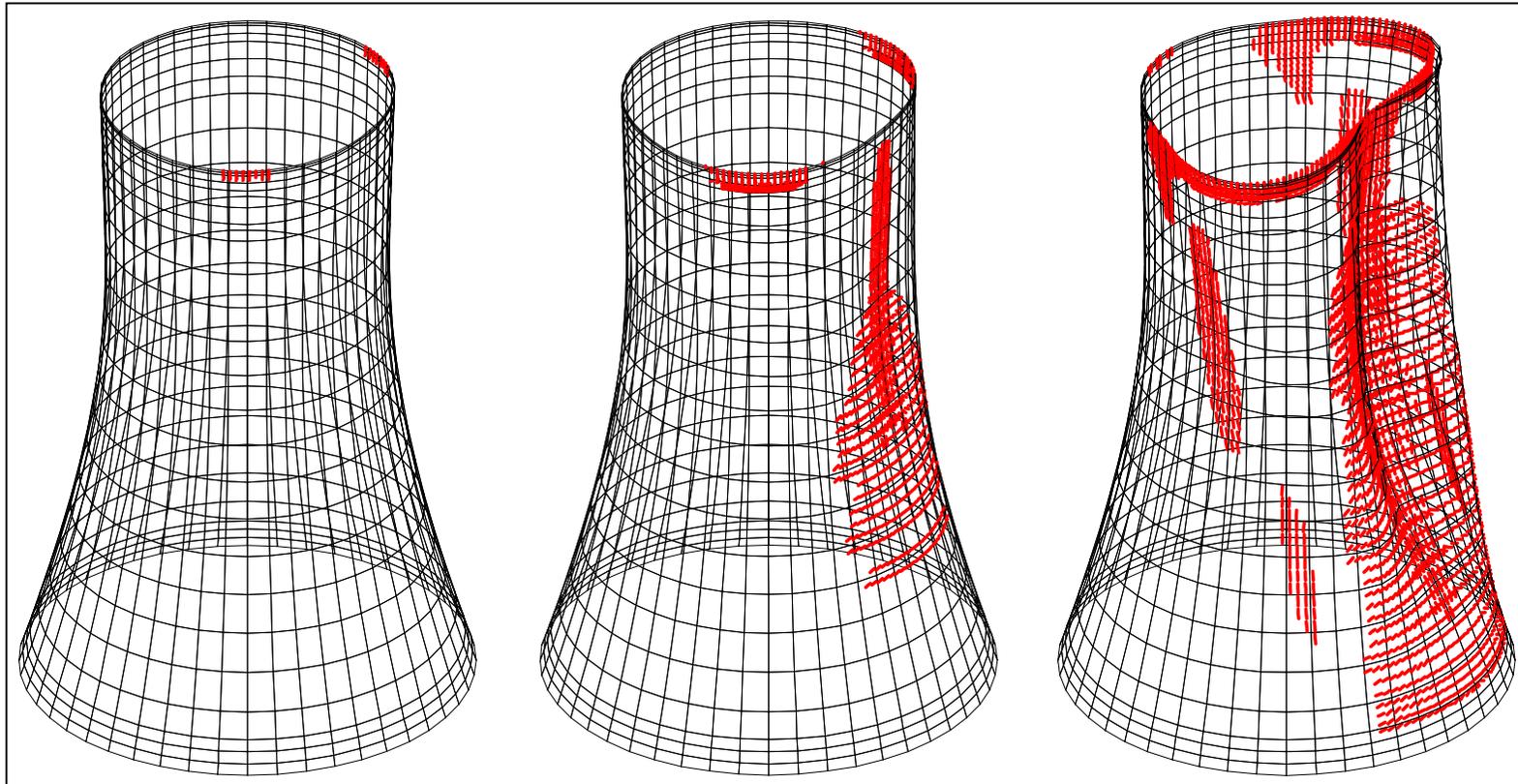
Eine Berechnung, die derartige Umlagerungseffekte mittels *nichtlinearer Materialgesetze* abbildet, wird *physikalisch nichtlinear* genannt. Sie gestattet die Berechnung der *wahren Tragfähigkeit* dadurch, dass das wahre Materialverhalten, welches in der Nähe des *ULS* nicht mehr *linear-elastisch* ist, erfasst wird.



menum

Ultrakomplexes Beispiel: Naturzugkühlturm

Simulation der Rissbildung, des Betonversagens und des Bewehrungsfließens bis zum Kollaps



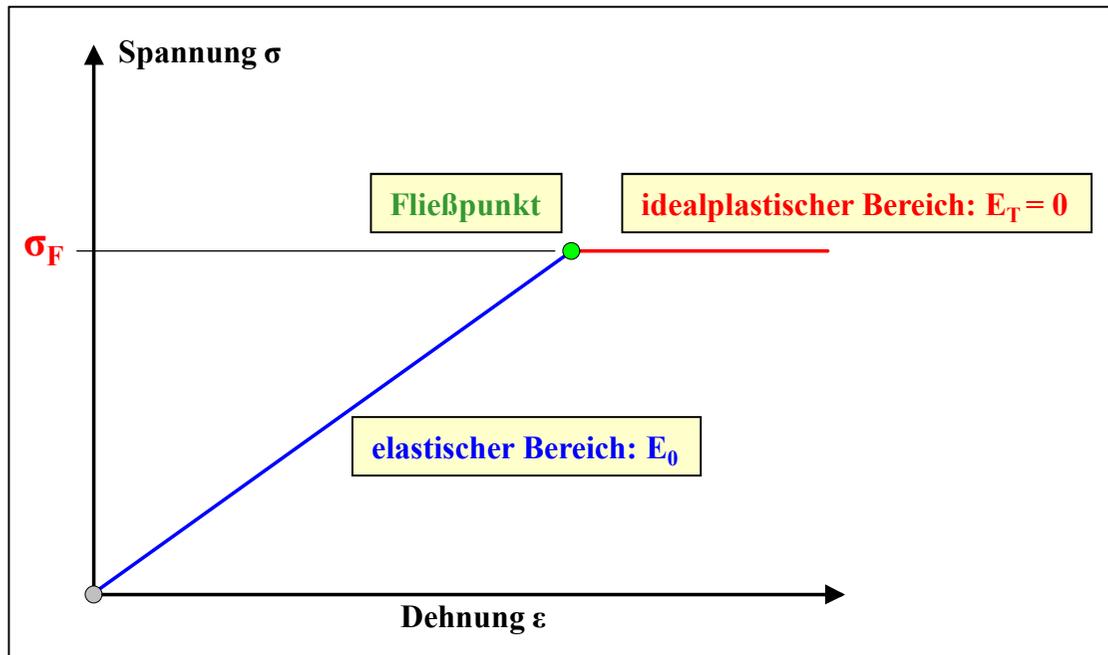
|| → **anwachsende Windlast** || →



menum

Physikalisch nichtlineare Berechnung: Traglastermittlung ebener Fachwerke

Fachwerke sind die einfachsten Tragwerkstypen überhaupt, da als einzige Schnittgröße eine stabweise konstante Normalkraft auftritt. Als Folge sind die Spannungen im gesamten Bauteil konstant – sowohl innerhalb des Querschnitts als auch längs der Stabachse. Ein Fachwerkstab fällt also bei Materialversagen als *Gesamtes* aus. Die Art und Weise des Ausfalls hängt vom verwendeten Materialmodell ab.



Die einfachste *physikalisch nicht-lineare Materialformulierung* ist das sog. *elastisch-idealplastische* Verhalten.

Zunächst verhält sich der Werkstoff *linear-elastisch* mit dem Elastizitätsmodul E_0 . Nach Erreichen der *Fließspannung* σ_F fällt der E-Modul auf den *Tangentenmodul* E_T ab. Im idealplastischen Fall ist keine weitere Spannungssteigerung möglich: $E_T=0$.

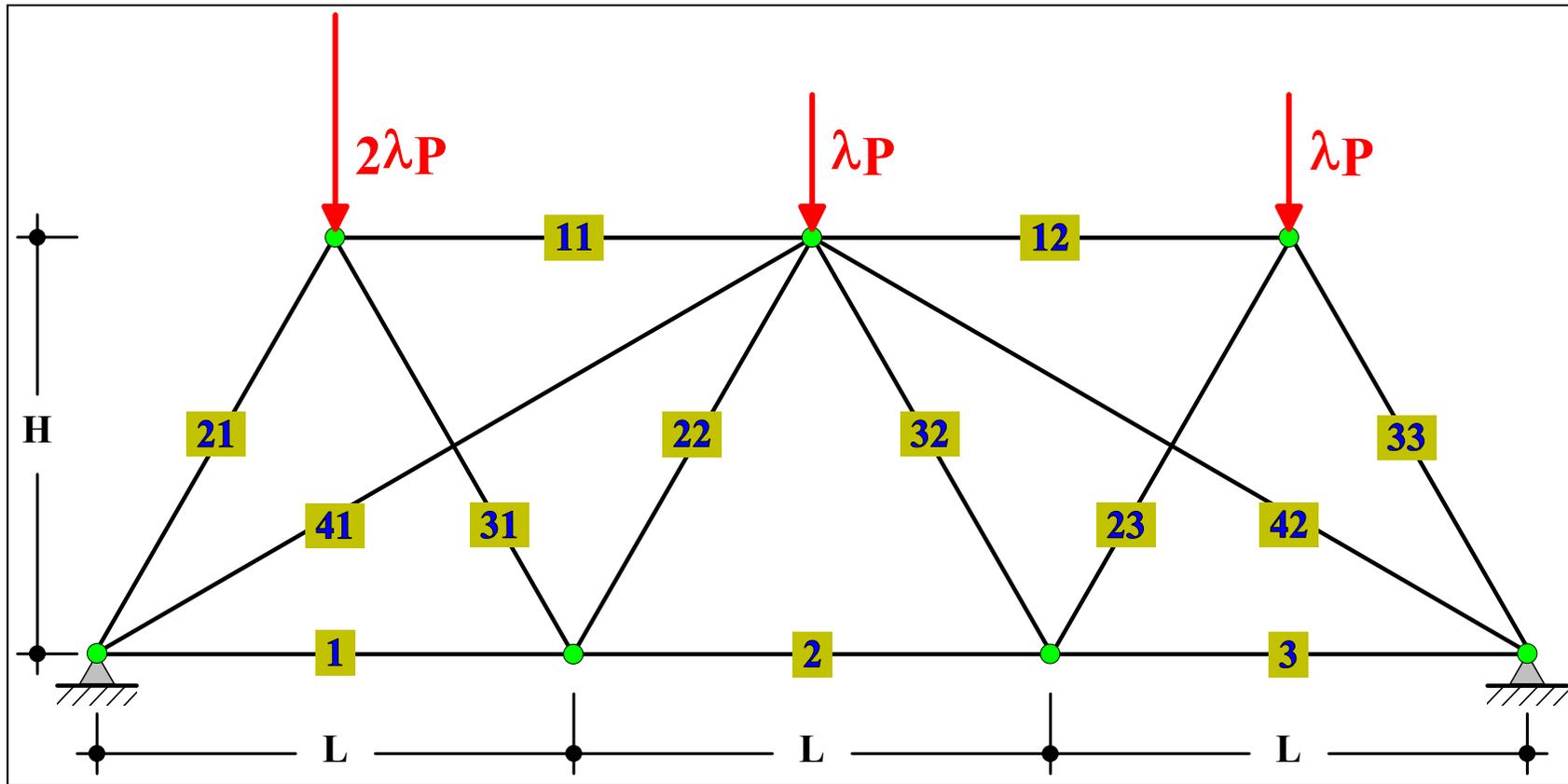


Beispiel aus der Praxis: Eingleisige Eisenbahnbrücke in den USA



menum

Beispiel: Fachwerk mit Redundanz 2



$$L = 5.0 \text{ m}, B = 4.33 \text{ m}, E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/cm}^2, A = 9.04 \text{ cm}^2, \sigma_F = 24.0 \text{ kN/cm}^2$$

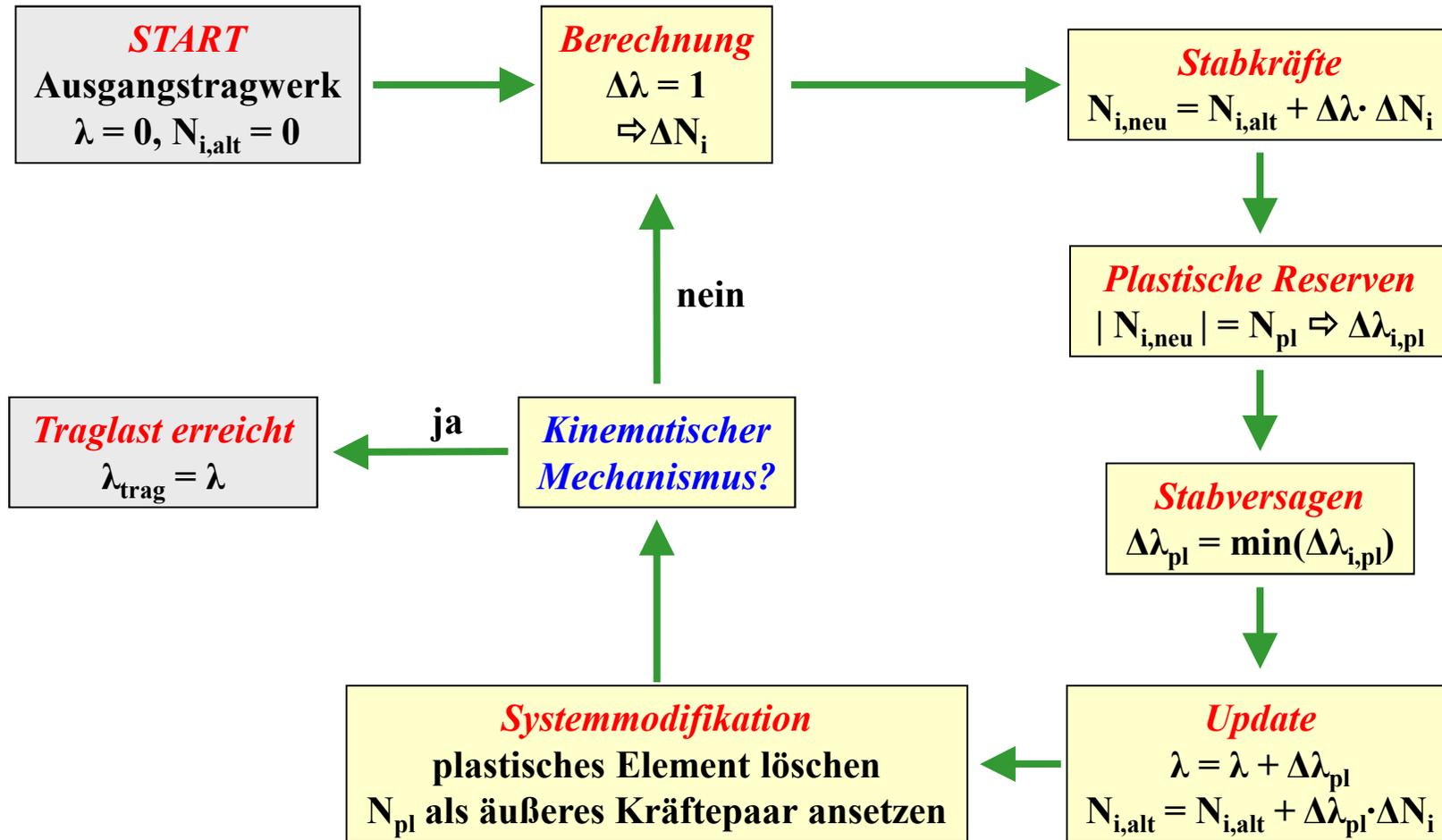
$$N_{pl} = A \cdot \sigma_F = 216.96 \text{ kN}$$

$P = P_{ref}$ wird so gewählt, dass der 1. Stab gerade plastisch wird.

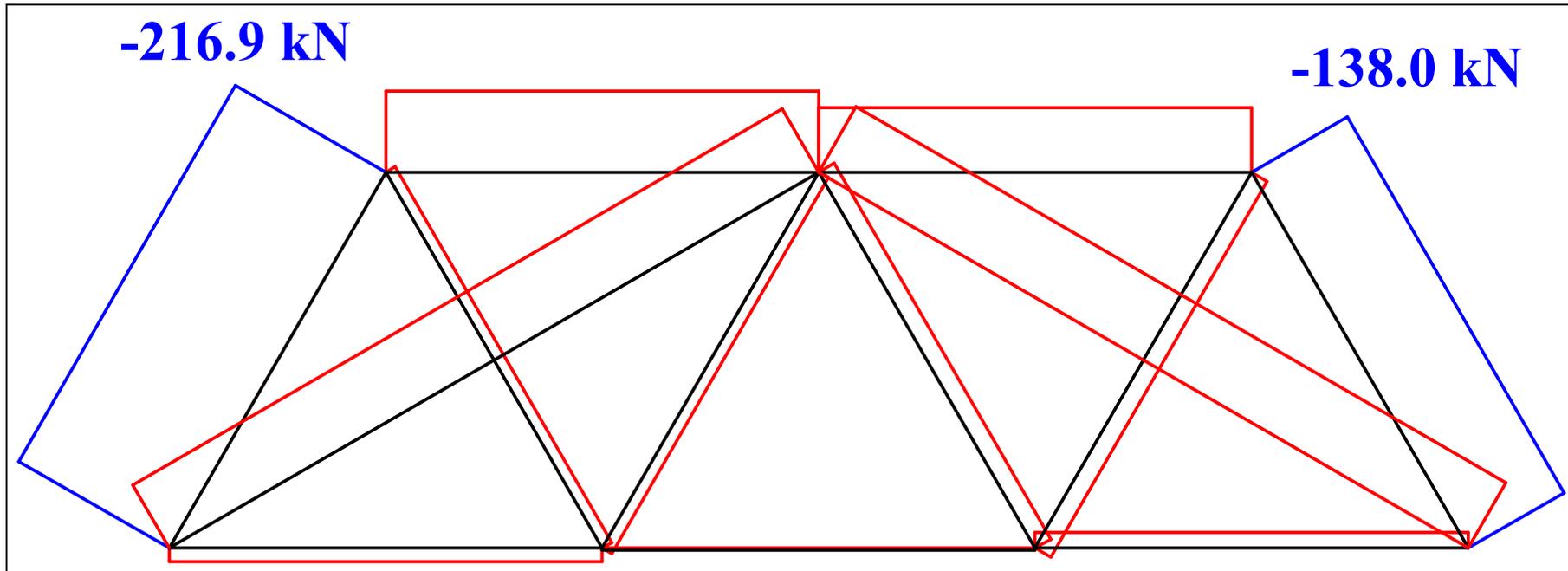


menum

Algorithmus zur Traglastermittlung



Ergebnisse der linearen Rechnung



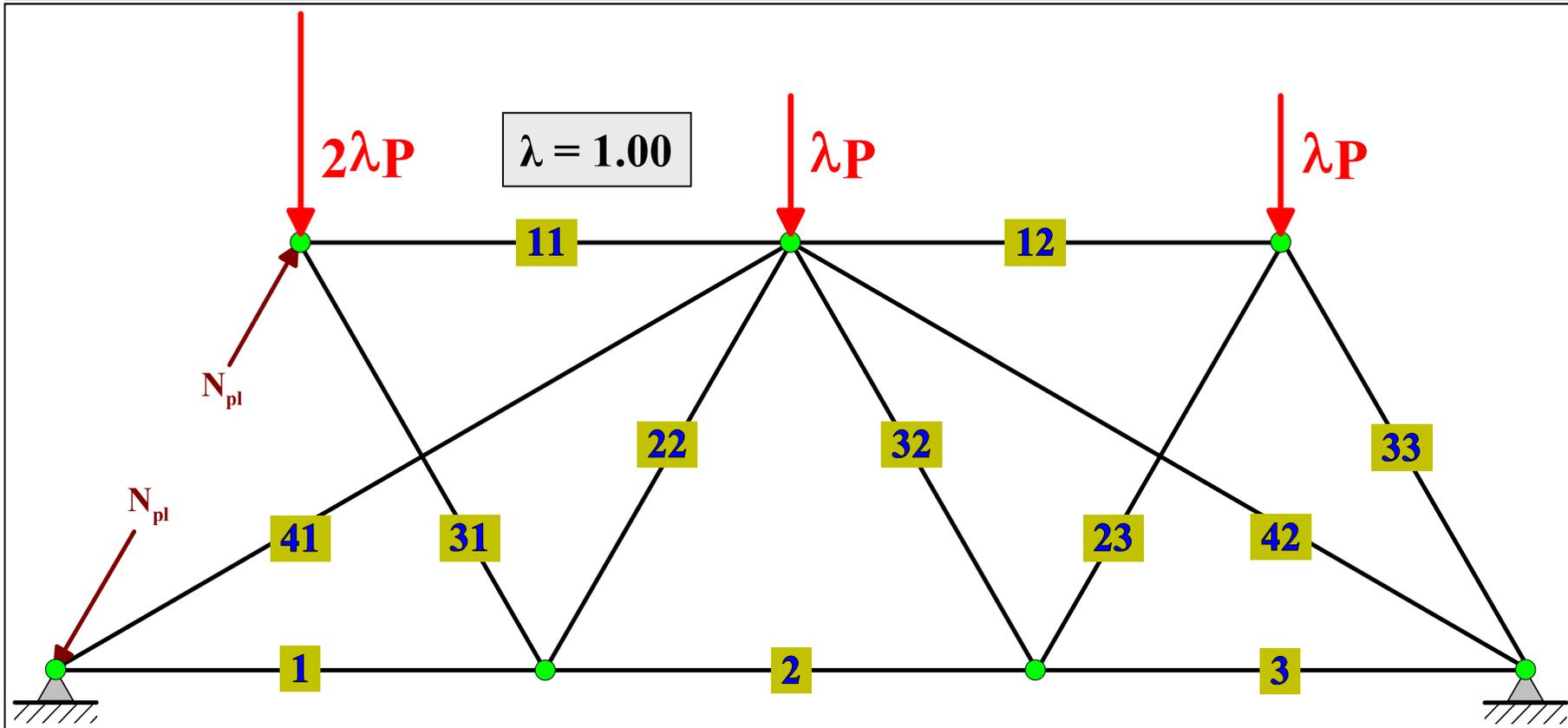
Die linearen Ergebnisse lassen vermuten: erst versagt das Bauteil mit der größten Normalkraft (Element 21), dann das mit der zweitgrößten Kraft (Element 33). Aber: stimmt das wirklich? Zur Überprüfung erhöhen wir die Last schrittweise von Null bis zum Systemversagen. Bei Versagen eines Stabes modifizieren wir das System dadurch, dass wir das Element entfernen und die plastische Normalkraft als äußere Last ansetzen.



menum

Tragwerksmodifikation I: Stab 21 versagt

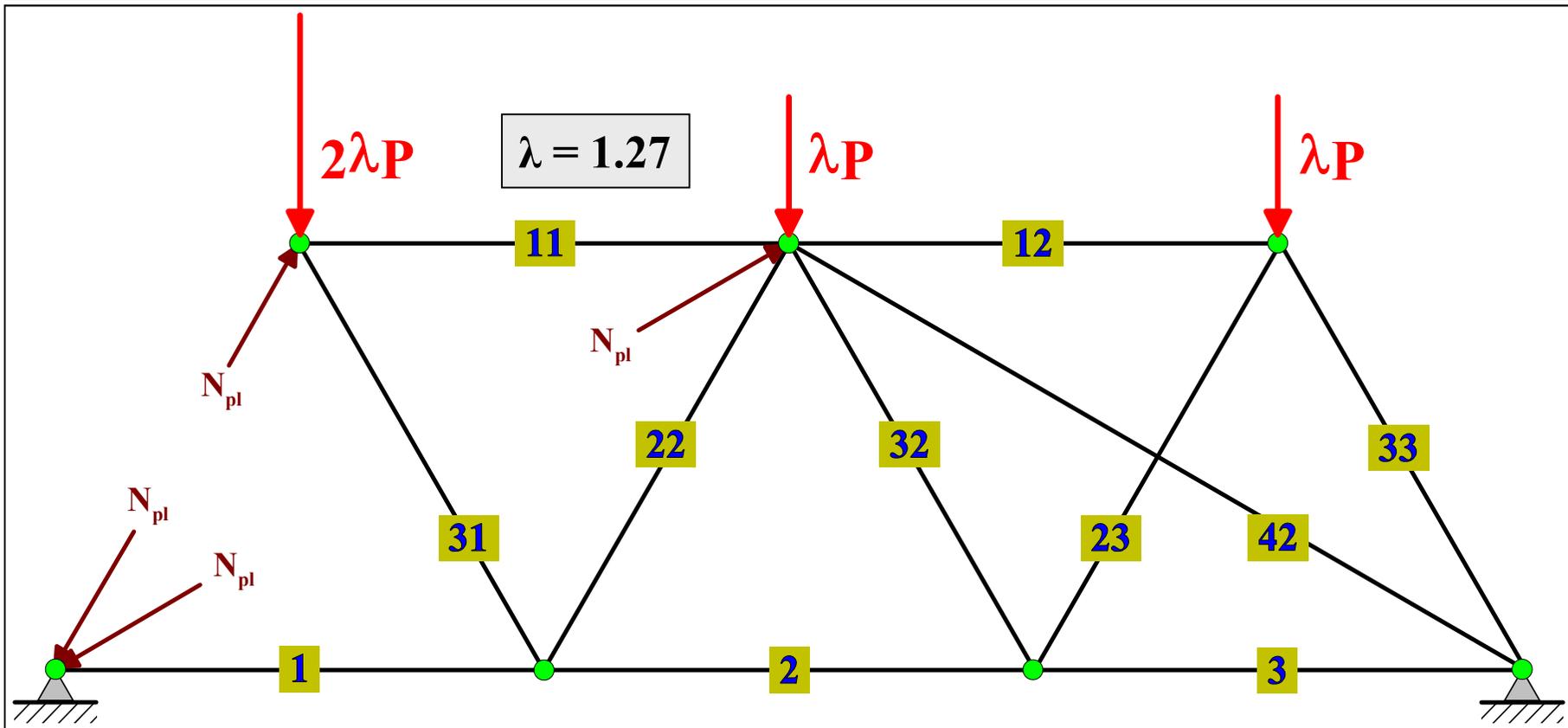
Stab 21 versagt als erstes, wie erwartet. Dieses *lokale Versagen* führt aber *nicht* zum *Systemkollaps*. Allerdings ändert sich ab jetzt der Kraftfluss: die $2\lambda P$ wandern jetzt durch 31 nach unten, dann über 22 nach oben, und erst jetzt über 41 in das linke Lager und 42 in das rechte Lager. Dadurch wächst die Stabkraft 41 jetzt stark an.



menum

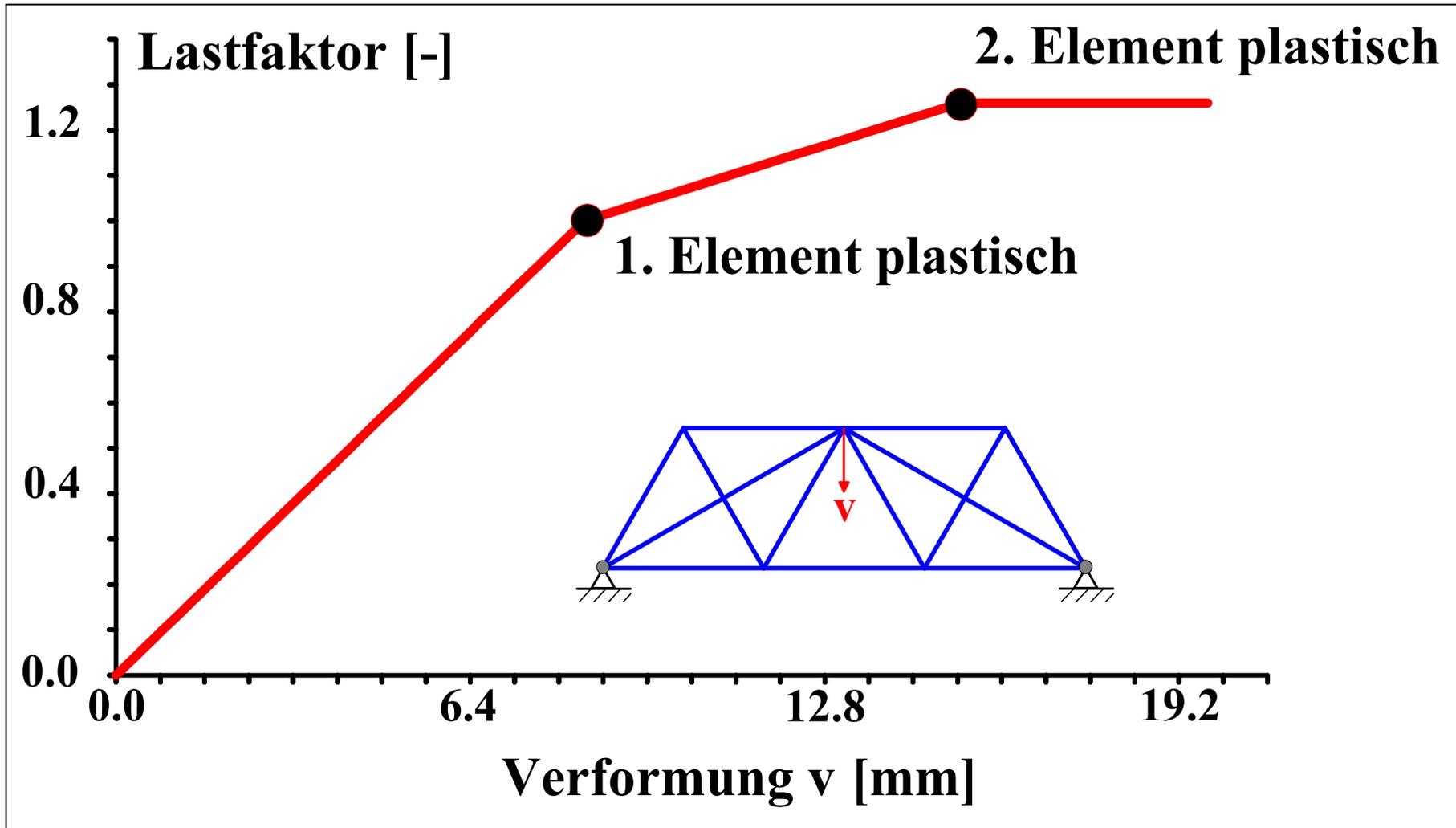
Tragwerksmodifikation II: Stab 41 versagt

Die neue Steifigkeitsverteilung führt zu einem veränderten Kraftfluss innerhalb des Tragwerks. Durch Kräfteumlagerung versagt nicht Stab 33, sondern 41. Das *lokale Versagen* von Element 41 führt zu einer *kinematischen Kette* und damit zum *Systemversagen*.



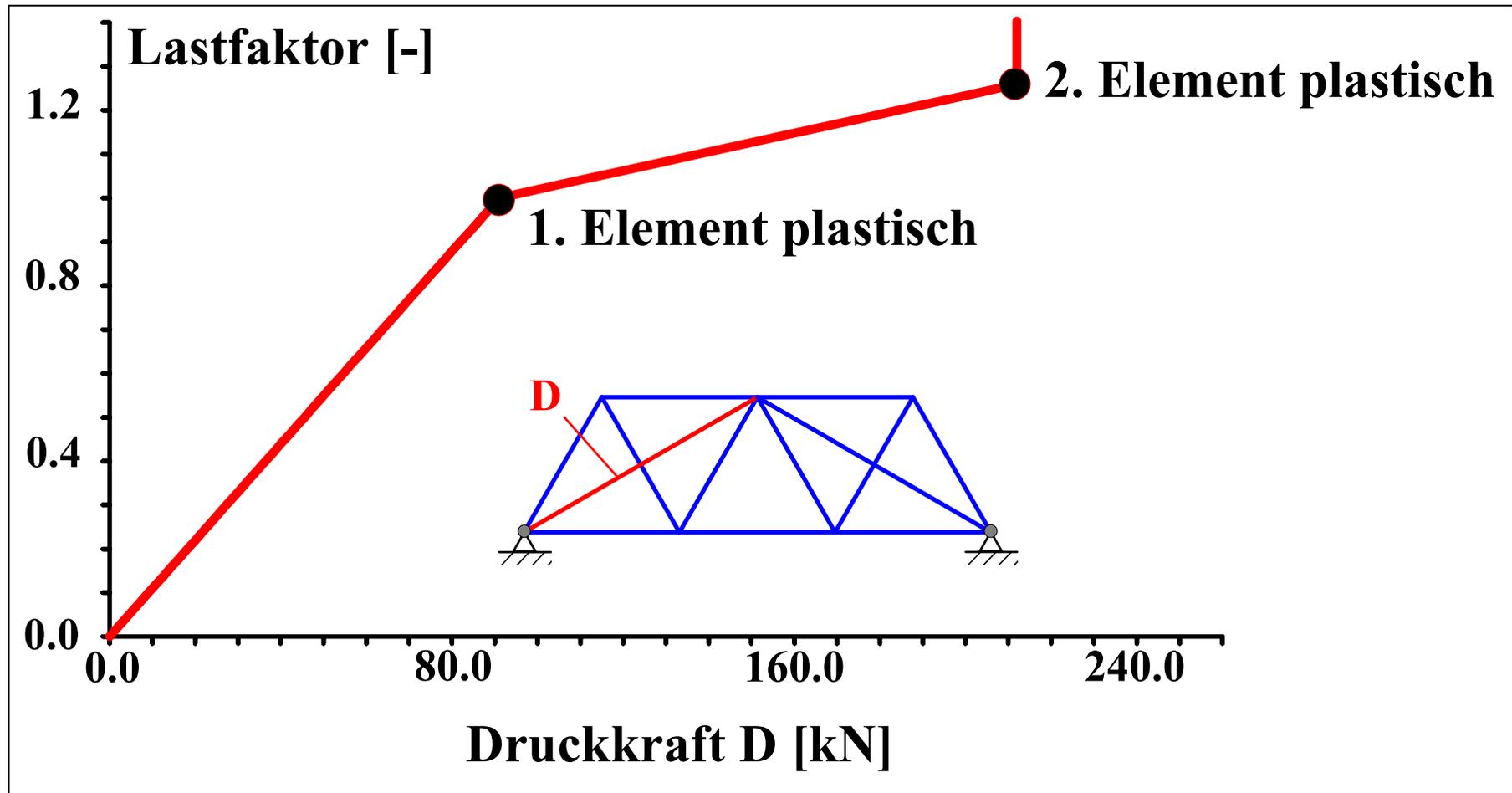
menum

Last-Verformungs-Diagramm



menum

Last-Normalkraft-Diagramm



menum

Offene Fragen VII: Physikalische Nichtlinearität

1. Welche Versagensmechanismen existieren auf Materialebene?
2. Wie formulieren wir Materialgesetze für die vielen verschiedenen Materialien (Metalle, Beton, Holz, Glas, synthetische Materialien, Verbundwerkstoffe)?
3. Wie erhält man Materialgesetze für die unterschiedlichen Tragwerkstypen (Rahmen, Platten, Scheiben, Schalen)?
4. Gibt es Besonderheiten bei den Iterationsalgorithmen zu beachten, bei denen sich geometrische und physikalische Nichtlinearität unterscheiden?
5. Werden die Ergebnisse durch die Lastgeschichte beeinflusst? Und wenn ja: auf welche Weise?



Nächste Schritte

Vorlesung 2: Das inkrementell-iterative Berechnungskonzept

Teil A: Die tangentiale Gleichgewichtsbedingung

Teil B: Die schwache Form der tangentialen Gleichgewichtsbedingung

Teil C: Diskretisierung des inkrementellen Arbeitsprinzips



menum