

**Wolfhard Zahlten**

**Vorlesungsreihe:**

**Numerische Methoden im Bauingenieurwesen**

**FEM III: Nichtlineare Probleme**

**Vorlesung 6**

**Stabilitätsprobleme**

**Teil A: Theorie**



menu

# Überblick

Wir haben in der vorangegangenen Vorlesung gesehen, dass es besondere Punkte in einem Lastverformungsdiagramm gibt, bei denen sich die Qualität des Gleichgewichtszustands ändert: Ein bislang *stabiles Gleichgewicht* geht in ein *instabiles Gleichgewicht* über, und umgekehrt. Der Verlust stabilen Gleichgewichts führt zur Initiierung eines schnell ablaufenden dynamischen Prozesses, während dessen das Tragwerk in einen weiter entfernten Nachbarzustand übergeht. Dieser Übergang ist i.d.R. identisch zum Versagen des Gesamttragwerks oder zumindest eines Tragwerksteils, z.B. das Ausknicken einer Druckdiagonalen. Kennzeichen eines Stabilitätsversagens ist seine Unabhängigkeit vom Spannungsniveau: Es handelt sich um ein *elastisches Phänomen*. Im Verlauf des dynamischen Übergangs in den Nachbarzustand kann es zu großen Verformungen und damit verbunden auch zu großen Spannungen kommen, die zum Materialversagen führen, aber beim *Einsetzen* des Stabilitätsversagens ist dies zunächst nicht der Fall.

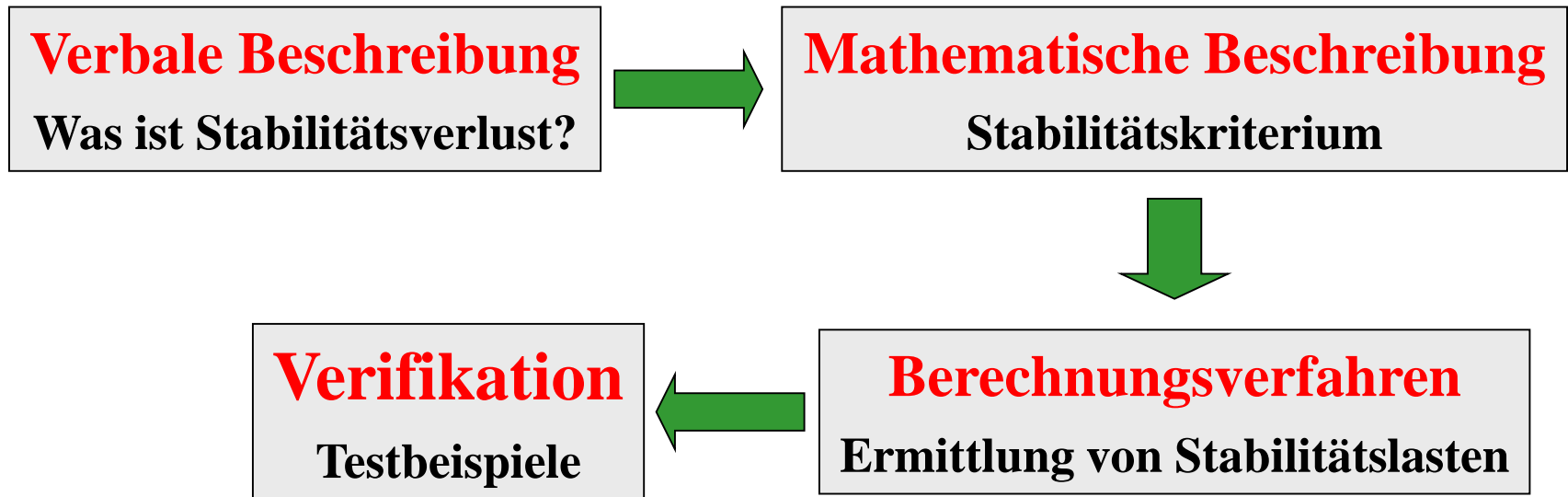
Infolge der fehlenden Versagensankündigung muss Stabilitätsversagen auf jeden Fall vermieden werden. Spannungsüberschreitungen sind in gewissem Grade noch tolerierbar, aber Stabilitätsversagen nie.

Somit besteht die Notwendigkeit, die zum Stabilitätsversagen gehörenden Lastniveaus auszurechnen. Dies ist Gegenstand der *Stabilitätstheorie*.



menu

# Entwicklungsschritte auf dem Weg zu einem praktisch handhabbaren Verfahren



menu

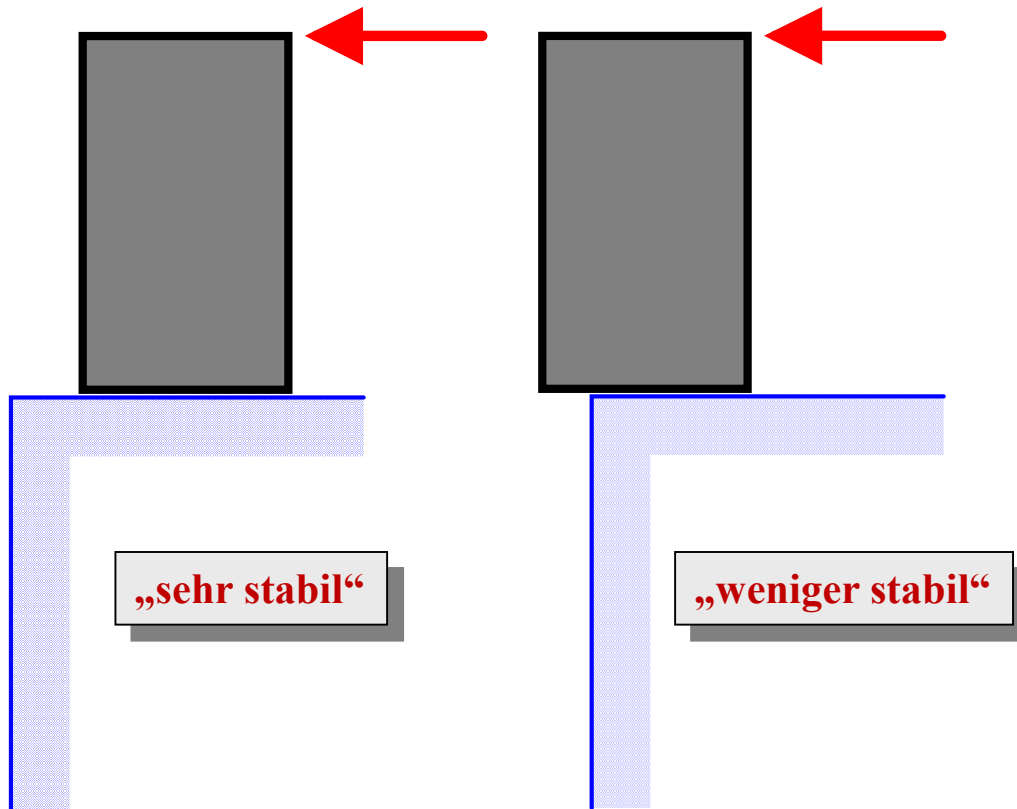
# Was ist Stabilitätsversagen?



menum

# Stabil – Instabil:

## Wie reagiert ein System auf eine Störung?

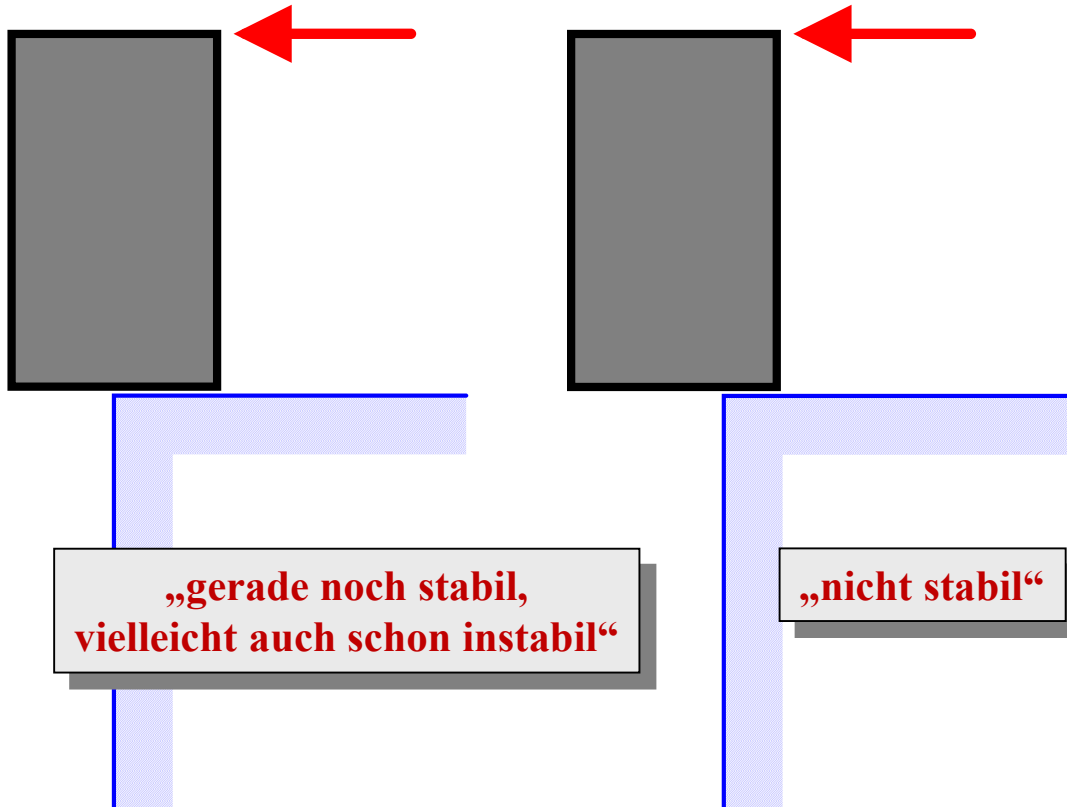


Der Begriff „Stabilität“ der Stabilitätstheorie lehnt sich eng an den Stabilitätsbegriff des „normalen“ Lebens an. Hier spricht man z.B. von einer „politisch stabilen“ oder einer „politisch instabilen“ Lage. Unter einer instabilen Lage verstehen wir hierbei eine Situation, bei der das ganze politische System kippen und durch Revolution in einen „Nachbarzustand“ übergehen kann. Dies verdeutlichen wir durch eine Dose, die an einer Kante steht. Wir empfinden den linken Zustand als „sehr stabil“, da es einer „sehr großen“ Kraft bedarf, die Dose über den Rand stürzen zu lassen. Der Zustand daneben erscheint schon „weniger stabil“.



menum

# Übergang stabil – nicht stabil



Schieben wir die Dose immer weiter nach links, erreichen wir einen Grenzzustand, bei dem die Dose auf der Kante balanciert. Je nach Laune würden wir diesen Zustand als bereits instabil oder als gerade noch stabil ansehen. Auf jeden Fall erscheint er uns nicht mehr als vertrauenswürdig.

Der rechte Zustand würde ohne wenn und aber als nicht stabil eingestuft werden, denn wir müssten die Dose aktiv festhalten, um ihr Herunterfallen zu verhindern.

Diese anschauliche Sichtweise bildet den Ausgangspunkt der Stabilitätsdefinition.



menum

# Klassifikation von Gleichgewichtszuständen

*infinitesimale* Störung von außen



Tragwerk im Gleichgewicht



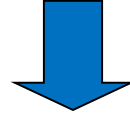
Tragwerk kehrt in den  
*ursprünglichen*  
Gleichgewichtszustand zurück



Ursprungszustand war *stabil*



Grenzfall:  
*indifferentes*  
Gleichgewicht



Tragwerk bewegt sich weg  
in einen *benachbarten*  
Gleichgewichtszustand

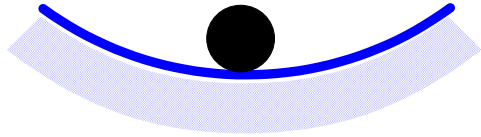


Ursprungszustand war *instabil*

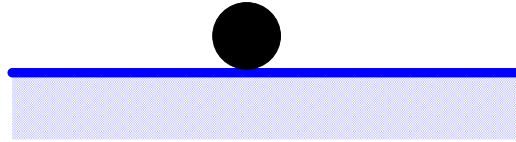


menum

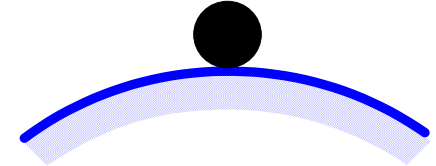
# Klassische Visualisierung der Gleichgewichtsarten



**stabiles  
Gleichgewicht**



**indifferentes  
Gleichgewicht**



**instabiles  
Gleichgewicht**

## Fragen:

- Wie können wir mathematisch entscheiden, ob ein Gleichgewichtszustand
  - **stabil**
  - **instabil**
  - **indifferent**ist?
- Wie können wir herausfinden, bei welcher Last das Tragwerk instabil wird?



menum



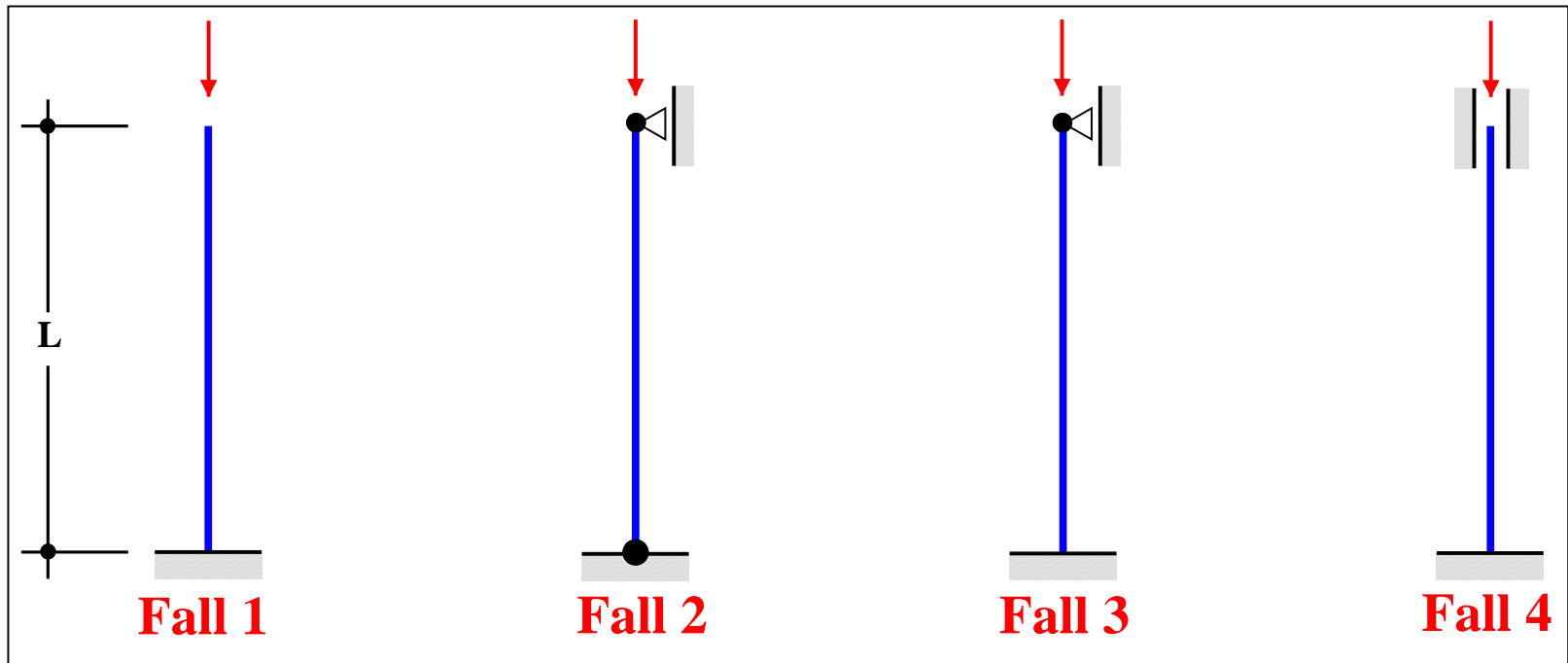
# Der Anfang: Knicken eines Einzelstabs



menum

# Einführung

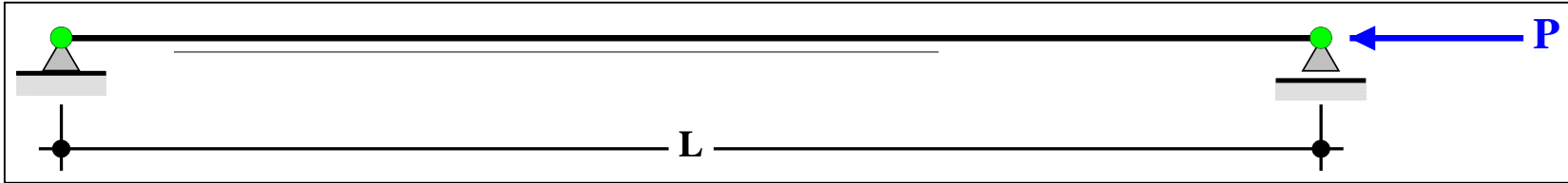
Leonard Euler (\* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in Sankt Petersburg) kann als Vater der Stabilitätstheorie bezeichnet werden. Er widmete sich der Frage, bei welcher Last ein einfacher, rein axial belasteter Stab in eine Nachbarkonfiguration ausknickt. Entsprechend der 4 möglichen Lagerbedingungen ergeben sich die 4 klassischen sog. *Eulerfälle*.



menu

# Beispiel: Eulerfall 2

Unverformtes Tragwerk



Verformtes Tragwerk



Der Vorbeulzustand ist durch eine reine Zusammendrückung des Stabes charakterisiert, bei der sich das rechte Lager in Richtung der Stabachse verschiebt. Nach Eintreten des Stabilitätsverlusts knickt der Stab aus und es stellt sich eine Verformung senkrecht zur Stabachse ein. Infolge der statischen Bestimmtheit des Tragwerks ergeben sich die Lagerreaktionen unabhängig vom Verschiebungszustand zu  $A_V = B_V = 0$  und  $A_H = -P$ .



menum

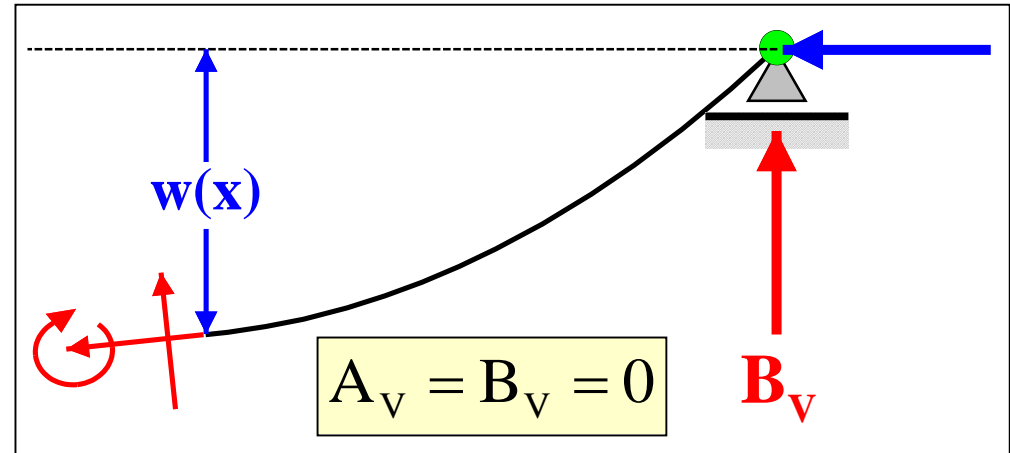
# Auffinden des Nachbarzustands: Gleichgewicht am verformten System

Gleichgewicht am verformten System

$$M(x) - P \cdot w(x) = 0$$

Kinematik + Materialgesetz

$$M(x) = -EIw''(x)$$



Hinsichtlich der Kinematik gilt: im Moment des Stabilitätsverlusts sind die Verformungen, insbesondere die Verdrehungen noch klein. Somit können geometrisch nichtlineare Effekte in der Krümmungsbeziehung vernachlässigt werden. Später im postkritischen Zustand bei eventuell großen Rotationen wäre dies nicht mehr der Fall.



menum

# Lösen der Knick-Differentialgleichung

**Knick-Differentialgleichung: lineare DGL mit konstanten Koeffizienten**

$$EIw'' + P \cdot w = 0$$

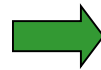


$$w'' + \frac{P}{EI} w = 0$$



**charakteristische Gleichung**

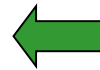
$$r^2 + \frac{P}{EI} = 0$$



$$r_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pm i \lambda$$



**allgemeine Lösung der DGL**



$$w'' = -\lambda^2 A \cos \lambda x - \lambda^2 B \sin \lambda x$$

$$w = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$



menum

# Einarbeitung der Randbedingungen

linker Rand

$$M(x=0)=0 \rightarrow w''(x=0)=0 \rightarrow A=0$$

rechter Rand

$$M(x=L)=0 \rightarrow w''(x=L)=0 \rightarrow -\lambda^2 B \sin \lambda L = 0$$

Knickbedingung

Die Knick-DGL hat nur dann eine Lösung, die gleichzeitig die Gleichgewichtsbedingung, d.h. die Knick-DGL selbst, erfüllt und kompatibel mit den Randbedingungen ist, wenn die Knickbedingung erfüllt ist.



menum

# Auswertung der Knickbedingung

Knickbedingung

$$-\lambda^2 B \sin \lambda L = 0$$

Fall 1

$$B = 0 \rightarrow w(x) \equiv 0$$

Diese Lösung stellt den unausgeknickten Grundzustand dar. Da dieser auf dem primären Gleichgewichtspfad liegt, erfüllt er die Knick-DGL.

Fall 2

$$\sin \lambda L = 0 \rightarrow \lambda L = n \cdot \pi \rightarrow \lambda = \frac{n \cdot \pi}{L} \rightarrow w(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Fall 2 beschreibt den ausgeknickten Nachbarzustand. Für ganz bestimmte Werte für  $\lambda$  (mathematisch stellen  $\lambda$  die Eigenwerte der DGL dar) kann das Tragwerk den primären Gleichgewichtspfad verlassen und in einen Nachbarzustand verzweigen.



menum

# Kritische Verzweigungslast

Das Last-Verformungsdiagramm weist unendlich viele Verzweigungspunkte auf. Bis zum 1. Verzweigungspunkt sind alle Gleichgewichtszustände auf dem Primärpfad stabil, danach jedoch instabil. Somit sind die höheren Verzweigungspunkte irrelevant, da die instabilen Gleichgewichtspunkte nicht erreicht werden. Stabilitätsversagen tritt also bei Erreichen des 1. Verzweigungspunktes ein. Dieser korrespondiert zum kleinsten Eigenwert.

$$\lambda = \frac{n \cdot \pi}{L}$$



$$\lambda_{\min} = \frac{\pi}{L} = \sqrt{\frac{P_{\text{krit}}}{EI}}$$



$$P_{\text{krit}} = \frac{EI\pi^2}{L^2}$$

Bei Erreichen der Knicklast verzweigt das System in den Nachbarzustand, dessen Form bekannt ist (eine sinusförmige Biegelinie), dessen Amplitude jedoch unbestimmt ist (über den Wert B konnten wir nichts aussagen). Zur Bestimmung der Amplitude müsste man eine geometrisch nichtlineare Theorie des ebenen Balkens aufstellen. Auf deren Basis könnte man dann für alle Lasten  $P > P_{\text{krit}}$  die zugehörige Durchbiegung ausrechnen.



menum



# Zusammenfassung

Auf analoge Art und Weise kann man die Verzweigungslasten der drei weiteren Eulerfälle bestimmen. Auch für Platten und Schalen können Beul-Differentialgleichungen aufgestellt werden, für die analytische Lösungen bekannt sind, allerdings nur für ganz bestimmte *einfache, insbesondere gleichförmige Randbedingungen*. Allen diesen Lösungen ist die Detektion des Verzweigungslastniveaus mittels einer Eigenwertbestimmung gemeinsam. Der Preis für das mathematisch einfache Eigenwertproblem besteht immer in dem Verlust jeglicher Kenntnisse über das postkritische Verhalten des Tragwerks. Bei komplexeren Tragwerken versagt der Ansatz über die Aufstellung und Lösung von Differentialgleichungen jedoch infolge unüberwindbarer mathematischer Schwierigkeiten.

Die Methode der finiten Elemente hat uns jedoch gestattet, *beliebig komplexe Tragwerke* durch Diskretisierung in Elemente mit eingeschränkt komplexem Verformungsverhalten einer Berechnung zuzuführen, und zwar bislang für lineare Statik, lineare Dynamik inklusive Eigenfrequenzberechnung, und geometrisch nichtlineare Statik. Somit liegt es nahe, eine FE-Formulierung des Stabilitätseigenwertproblems aufzustellen, um damit das kritische Lastniveau zu bestimmen. Auch hier wird es nicht möglich sein, Aussagen über das postkritische Verhalten zu treffen.



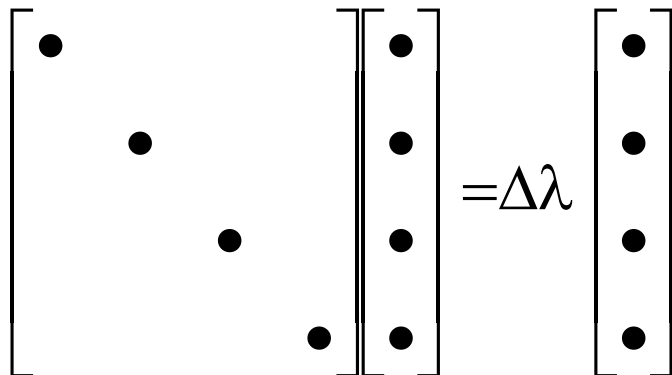
# Begleitende Eigenwertuntersuchung



menum

# Diskretes System

Sämtliche Information über das Tragwerk steckt in der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ , somit muss sich auch die Information über die Eigenschaften des Gleichgewichtszustandes aus  $\mathbf{K}_T$  gewinnen lassen. Wir nehmen vereinfacht an: das System sei entkoppelt.

$$\mathbf{K}_T^* \mathbf{V}^+ = \Delta\lambda \mathbf{P}_0^* :$$




$$\mathbf{V}_i^+ = \frac{\Delta\lambda \mathbf{P}_{0i}^*}{\mathbf{K}_{Tii}^*}$$



menum

# Definition von stabilen/instabilen Gleichgewichtszuständen

Ein Tragwerk befindet sich in einem stabilen Gleichgewichtszustand, wenn zur Erzielung einer weiteren Verschiebung positive Arbeit geleistet werden muss. Für den Sonderfall des entkoppelten Systems führt das zu der nachfolgenden Situation:

Ein Punkt auf der Last-Verformungskurve ist *stabil*, wenn für *alle Freiheitsgrade* gilt: Ein positives Lastinkrement  $\Delta \lambda P^*_{0i}$  führt zu einem positiven zugeordneten Verschiebungsinkrement  $\Delta V^*_i$ . Dann sind die Diagonalelemente  $K^*_{ii}$  alle positiv und die Arbeitsinkremente  $\Delta V^*_i \cdot \Delta \lambda P^*_{0i}$  sind alle positiv.

Ein Punkt auf der Last-Verformungskurve ist *instabil*, wenn *zumindest ein* positives Lastinkrement  $\Delta \lambda P^*_{0i}$  zu einem *negativen* Verschiebungsinkrement führt. Dann ist zumindest ein Diagonalelement  $K^*_{ii}$  und damit das korrespondierende Arbeitsinkrement  $\Delta V^*_i \cdot \Delta \lambda P^*_{0i}$  negativ.

Ein Punkt auf der Last-Verformungskurve ist *indifferent*, falls mindestens ein Diagonalelement der Steifigkeitsmatrix Null ist.



# Stabilitätskriterium

Die tangentielle Matrix ist zunächst nicht entkoppelt, und wird während der Gleichungslösung auch nicht in eine Diagonalmatrix umgewandelt. Die Diagonalglieder der LDL<sup>T</sup>-Zerlegung besitzen jedoch die gleiche Aussagekraft wie die Diagonalglieder der Diagonalmatrix bzw. die Eigenwerte der Matrix, da sich die Determinante ausschließlich als Produkt dieser ergibt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bullet\bullet & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & \bullet\bullet & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & \bullet\bullet & 0 \\ \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet \\ L_{N1} & L_{N2} & L_{N3} & \bullet\bullet & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \bullet\bullet & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \bullet\bullet & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \bullet\bullet & 0 \\ \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet & D_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L_{21} & L_{31} & \bullet\bullet & L_{N1} \\ 0 & 1 & L_{32} & \bullet\bullet & L_{N2} \\ 0 & 0 & 1 & \bullet\bullet & L_{N3} \\ \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet & 1 \end{bmatrix}$$

Ein Gleichgewichtszustand ist

- **stabil**, wenn alle Diagonalglieder der LDL<sup>T</sup>-Zerlegung positiv sind,
- **indifferent**, wenn mindestens ein Diagonalglied Null ist,
- **instabil**, wenn mindestens ein Diagonalglied negativ ist.



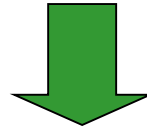
menum

# Indifferenzkriterium

Im *Indifferenzpunkt* sind mindestens zwei Gleichgewichtszustände möglich:

- der ungestörte Grundzustand
- der Knick- oder Beulzustand

Der Übergang vom Grundzustand in den Beulzustand kann durch Einwirkung einer *infinitesimal kleinen Störung* erzielt werden. Infinitesimal klein bedeutet: das Lastinkrement nimmt in der Grenze den Wert Null an:  $\Delta P = 0$ :



Die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

muss eine nicht-triviale Lösung besitzen!



menum

# Formulierung als Eigenwertproblem

## Schritt 1:

Aufspaltung der tangentialen Steifigkeitsmatrix in einen linearen und nichtlinearen Teil:



$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + (\mathbf{K}_T - \mathbf{K}_L) = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_N$$

Der nichtlineare Anteil der Steifigkeitsmatrix hängt von den Verformungen des Grundzustands ab:

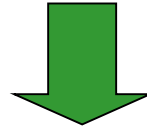
$$\mathbf{K}_N = \mathbf{K}_N(\mathbf{V})$$



menum

## Schritt 2:

Entwicklung der nichtlinearen Steifigkeitsmatrix in einer TAYLOR-Reihe um den Grundzustand:



$$\mathbf{K}_N = \Lambda \mathbf{K}_{NL} + \Lambda^2 \mathbf{K}_{NQ} + \Lambda^3 \mathbf{K}_{NC} + \dots$$

$\mathbf{K}_{NL}$ : linear abhängig von den Grundzustandsverschiebungen

$\mathbf{K}_{NQ}$ : quadratisch abhängig von den Grundzustandsverschiebungen

$\mathbf{K}_{NC}$ : kubisch abhängig von den Grundzustandsverschiebungen

Die einzelnen Anteile von  $\mathbf{K}_N$  ergeben sich durch entsprechende Reihenentwicklungen der kinematischen Gleichungen bei der Ermittlung der Elementmatrizen.

$\mathbf{K}_{NL}$ ,  $\mathbf{K}_{NQ}$ ,  $\mathbf{K}_{NC}$ , .. sind bekannt!!

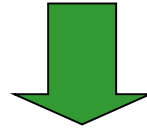


menum



### Schritt 3:

Anschreiben des Indifferenzkriteriums im Grundzustand:



$$(\mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL} + \Lambda^2 \mathbf{K}_{NQ} + \Lambda^3 \mathbf{K}_{NC} + \dots) \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

### Frage:

Wie groß muss der Parameter  $\Lambda$  sein, damit eine nicht-triviale Lösung  $\Delta \mathbf{V}$  existiert?

### Mathematischer Sichtwinkel: Eigenwertproblem

- $\Lambda$ : Eigenwerte  $\Rightarrow$  Knick- bzw. Beullasten
- $\Delta \mathbf{V}$ : Eigenvektoren  $\Rightarrow$  Knick- bzw. Beulfiguren



# Klassifizierung der möglichen Eigenwertprobleme

lineares EWP

$$( \mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL} ) \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

quadratisches EWP

$$( \mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL} + \Lambda^2 \mathbf{K}_{NQ} ) \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

kubisches EWP

$$( \mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL} + \Lambda^2 \mathbf{K}_{NQ} + \Lambda^3 \mathbf{K}_{NC} ) \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}$$



menum

# Standardfall: lineares Eigenwertproblem

Die Lösungstechnik hängt ab von der Anzahl  $n$  der Systemfreiheitsgrade:

- **wenige Freiheitsgrade:**

$$\det(\mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL}) = 0$$

⇒ Polynom des Grades  $n$  für die  $n$  Eigenwerte

- **viele Freiheitsgrade:**

numerische Eigenwertlöser, Black-Box-Programme



menum

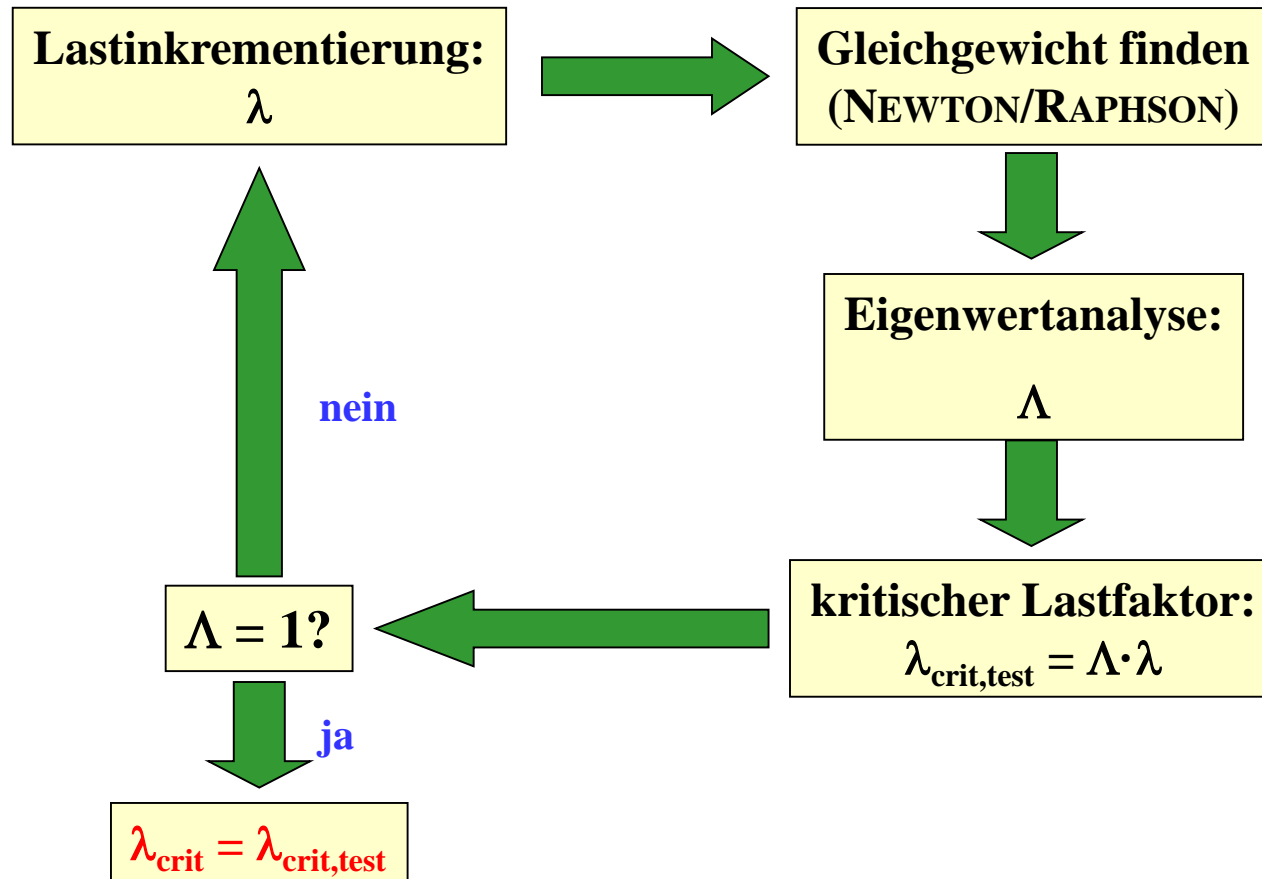
# Nichtlineare Berechnung mit eingebetteter Eigenwertanalyse

Zu Beginn einer inkrementell-iterativen Analyse hat man zunächst keine Vorstellung, wo ein mögliches kritisches Lastniveau liegen könnte. Dieses kann man durch Einschachtelung finden, indem man in den Pfadverfolgungsalgorithmus eine *begleitende Eigenwertuntersuchung* einbettet. Man führt einen Lastschritt durch und ermittelt durch einfache Subtraktion die zum Grundzustand gehörige nichtlineare Matrix  $K_N$ :  $K_N = K_T - K_L$ . Für diese nichtlineare Matrix führt man eine *lineare Eigenwertuntersuchung* durch:  $(K_L + \Lambda K_N)\Delta V = 0$ , d.h. man extrapoliert die bisherige nichtlineare Matrix linear. Als Ergebnis erhält man den Abstand  $\Lambda$  des Grundzustands vom Indifferenzpunkt. Dieser Abstand stellt jedoch nur einen Schätzwert dar, da die lineare Vergrößerung der nichtlinearen Matrix nicht der Wirklichkeit entspricht.

Jetzt führt man einen weiteren Lastschritt durch, dessen Größe man an den Schätzwert von  $\Lambda$  anpassen kann, und ermittelt einen verbesserten Schätzwert. Je näher man sich an den Indifferenzpunkt herantastet, desto mehr nähert sich  $\Lambda$  an „1“ an. Im Indifferenzpunkt selbst wäre  $\Lambda$  genau Eins und die tangentielle Matrix wäre singulär, aber dies wird man infolge von numerischen Rundungsfehlern praktisch nie erreichen.

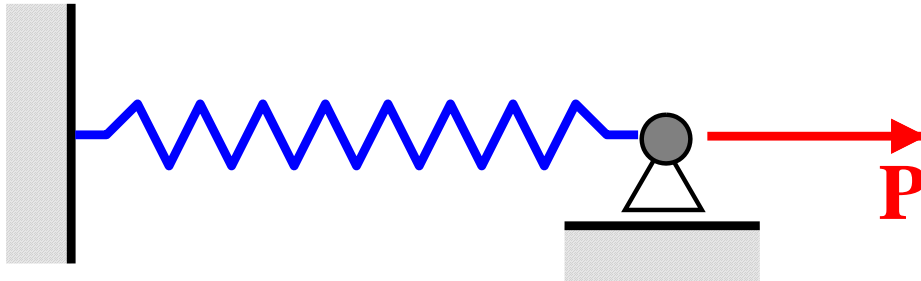


# Nichtlineare Berechnung mit eingebetteter Eigenwertanalyse



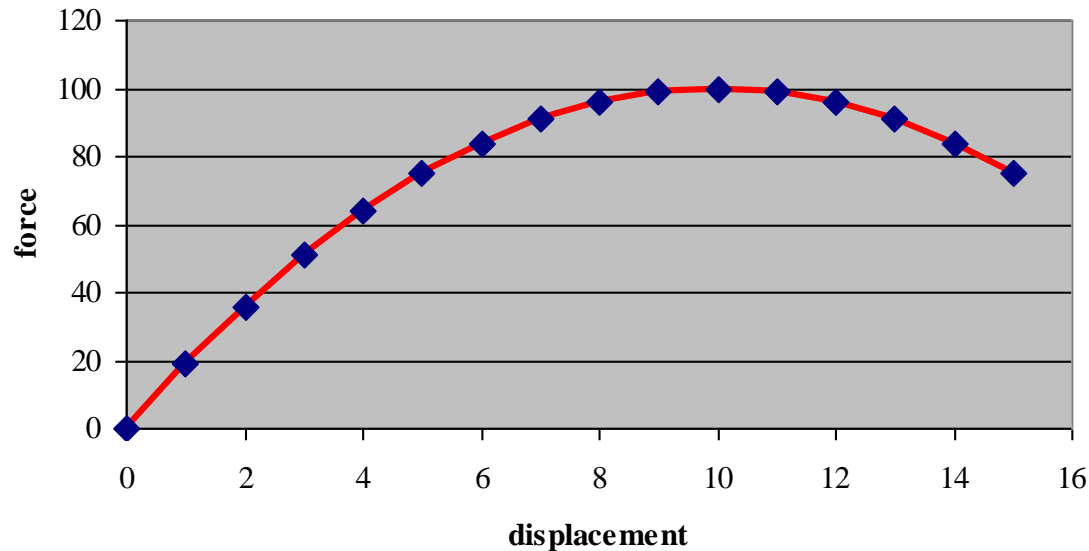
menum

# Beispiel: nichtlineare Feder



nichtlineares Federgesetz:

$$F(V) = 20V - V^2$$



menum

# Inkrementelle Formulierung

Gleichgewicht:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(V) = -V^2 + 20V = P$$



Tangentiale Gleichgewichtsbedingung:

$$(20 - 2V) \Delta V = \lambda P_0 - (-V^2 + 20V)$$



$$K_L = 20.0$$

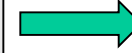


menum

# Ergebnisse der eingebetteten Eigenwertanalyse

willkürlich gewählt:  $P_0 = 50.0$

$P_{\text{crit,exakt}} = 100.0$



$\lambda_{\text{crit,exakt}} = 2.0$

$\lambda$	$V$	$K_T$	$K_N$	$\Lambda$	$\lambda_{\text{crit}}$
0.1	0.2532	19.4936	-0.5064	39.49	3.95
0.5	1.3397	17.3205	-2.6795	7.464	3.73
1.0	2.9289	14.1421	-5.8579	3.414	3.41
1.5	5.0000	10.0000	-10.0000	2.000	3.00
1.9	7.7639	4.4721	-15.5279	1.288	2.45
2.0	10.0000	0.0000	-20.0000	1.000	2.00

kritische Last:  $P_{\text{crit}} = \lambda_{\text{crit}} \cdot P_0 = 2.0 \cdot 50.0 = 100.0$



menum



# Lineare und klassische Stabilitätstheorie



menum

# Einführung

Mit der begleitenden Eigenwertanalyse können wir systematisch nach dem kritischen Lastniveau suchen. Die Berechnung erfordert jedoch nach wie vor eine inkrementell-iterative Pfadverfolgung, die rechenzeitintensiv ist und über die das Programmsystem zunächst einmal verfügen muss. Der Berechnungsalgorithmus ist nicht einfacher geworden, sondern im Gegenteil noch aufwendiger.

Für die tägliche Praxis ist ein derart komplexes Verfahren nicht geeignet. Hier möchte man ein Verfahren haben, welches

- **Keine Pfadverfolgung benötigt, sondern direkt die kritischen Lasten liefert.**
- **Unabhängig ist von der Wahl der Referenzlast.**

Dieses Verfahren gibt es mit der klassischen Stabilitätstheorie. Sie stellt gleichsam eine Verallgemeinerung der EULER-Stabilitätsfälle auf allgemeine Tragwerke dar. Der Gewinn an Einfachheit muss allerdings mit einem Verlust an Genauigkeit bezahlt werden. Je nachdem, wie genau die Voraussetzungen der klassischen Stabilitätstheorie erfüllt sind, ergeben sich mehr oder weniger große Abweichungen von der exakten Stabilitätslast. Für gewisse Tragwerkstypen kann die klassische Stabilitätsberechnung überhaupt nicht angewendet werden.



menum

# Annahmen der linearen Stabilitätstheorie

## Annahme 1:

Das Tragwerk verhält sich linear bis zum Stabilitätsversagen.

$$\mathbf{V}(\lambda \cdot \mathbf{P}_0) = \lambda \cdot \mathbf{V}(\mathbf{P}_0)$$

## Annahme 2:

Die nichtlineare Matrix hängt linear von den Verschiebungen ab.

$$\mathbf{K}_N(\lambda \cdot \mathbf{V}) = \lambda \cdot \mathbf{K}_N(\mathbf{V})$$



# Lineare Stabilitätstheorie

## Konsequenz der Annahmen 1+2:

Die nichtlineare Matrix hängt linear von der Last ab

$$\mathbf{K}_N(\lambda \cdot \mathbf{P}_0) = \lambda \cdot \mathbf{K}_N(\mathbf{P}_0)$$



## Anteile in der nichtlinearen Matrix:

- linearer Anteil der geometrischen Matrix  $\mathbf{K}_{gL}$
- linearer Anteil der Anfangsverschiebungsmatrix  $\mathbf{K}_{VL}$



menum

# Eigenwertproblem der linearen Stabilitätstheorie

## Eigenwertproblem

$$\{\mathbf{K}_L + \Lambda(\mathbf{K}_{gL} + \mathbf{K}_{VL})\}\Phi = \mathbf{0}$$

Die kritische Last hängt nicht von der gewählten Referenzlast ab. Bei Verdopplung der Referenzlast  $P_0$  geschieht Folgendes:

- Aufgrund der Annahme 1 verdoppelt sich der Verschiebungszustand.
- Aufgrund der Annahme 2 verdoppeln sich sowohl  $K_{gL}$  wie auch  $K_{VL}$ .
- Damit halbiert sich der kritische Lastfaktor  $\Lambda_{krit}$ .
- Das Produkt aus verdoppeltem  $P_0$  und halbiertem  $\Lambda_{krit}$  bleibt identisch.

Wählt man  $P_0$  gleich der Gebrauchslast, entspricht  $\Lambda_{krit}$  genau der Knick- bzw. Beulsicherheit.



menum

# Klassische Stabilitätstheorie

## Annahme 3:

Die Anfangsverformungsmatrix wird vernachlässigt.

$$(K_L + \Lambda \cdot K_{gL})\Phi = 0$$

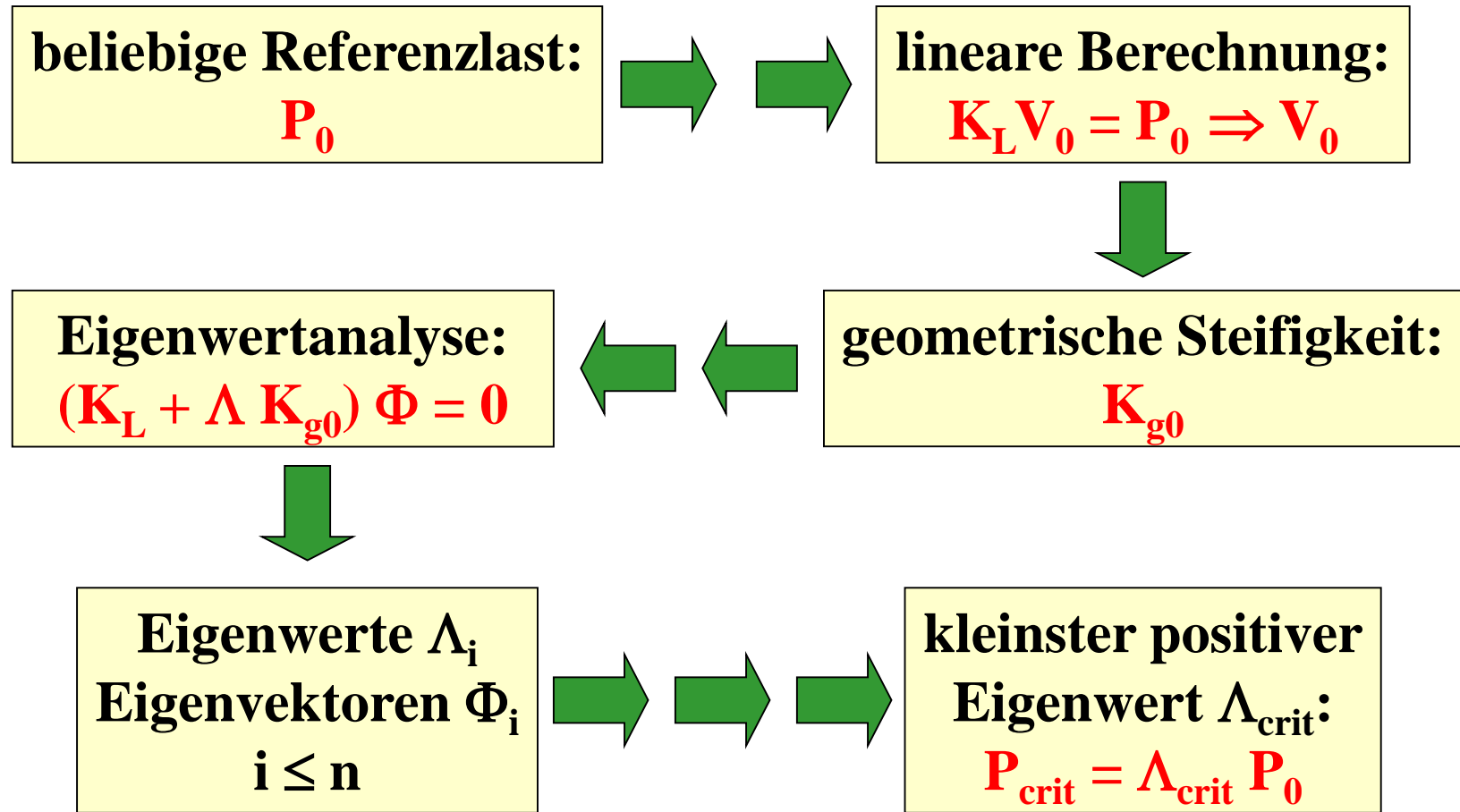
Die Vernachlässigung der Anfangsverformungsmatrix führt bei den 4 klassischen EULER-Fällen (siehe später) zu exakt den gleichen Knicklasten, wie sie sich bei der Lösung der EULERSchen Differentialgleichungen ergaben. Damit haben wir eine verallgemeinerte Stabilitätstheorie, die für alle Tragwerkstypen gilt. Insofern ist es gerechtfertigt, auch hier von EULER-Lasten zu sprechen, auch wenn sich EULER nie selbst mit diesen Tragwerken beschäftigt hat.

Die Qualität der EULER-Lasten hängt von dem Maße ab, in dem die Annahmen 1 bis 3 erfüllt sind. Bei den klassischen Eulerstäben sind sie perfekt erfüllt, so dass die EULER-Lasten perfekt mit den Verzweigungslasten einer vollständig nichtlinearen Pfadverfolgung übereinstimmen. Bei anderen Tragwerken/Belastungssituationen kommt es zu mehr oder weniger großen Abweichungen.



menum

# Flussdiagramm für eine klassische Stabilitätsuntersuchung



menum

# Eigenschaften der klassischen Stabilitätstheorie

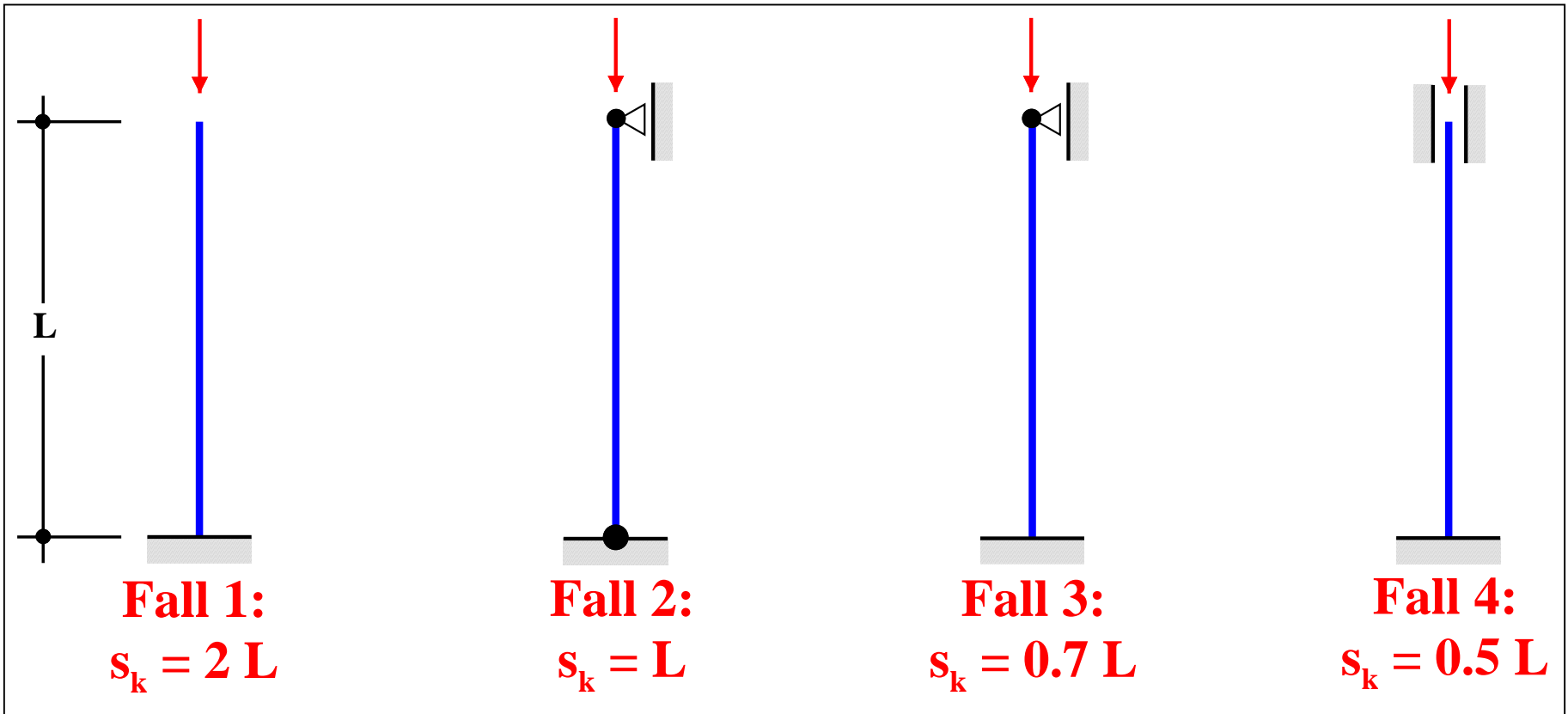
- **Eigenwertuntersuchungen geben nur Aufschluss über das kritische Lastniveau**
  - Es gibt keine Aussage über die Verformungen und Schnittgrößen nach Eintreten des Beulvorgangs.
  - Die Eigenformen beschreiben nur die Form der Beulfigur – die Amplitude bleibt unbestimmt.
- **Die Beullasten sind nur realistisch, wenn die Annahmen erfüllt sind:**
  - Normalkräfte dominieren das Tragverhalten vor dem Stabilitätsverlust.
- **Die Beullasten liegen auf der unsicheren Seite!**



menum



# Beispiel: die klassischen EULER-Fälle



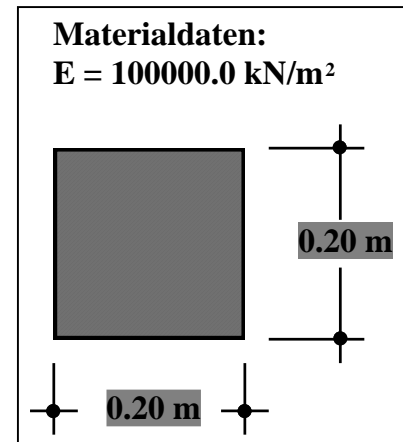
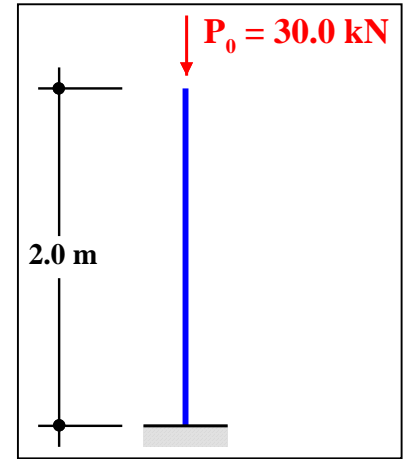
$$P_{\text{crit}} = \frac{EI \cdot \pi^2}{s_k^2}$$



menum

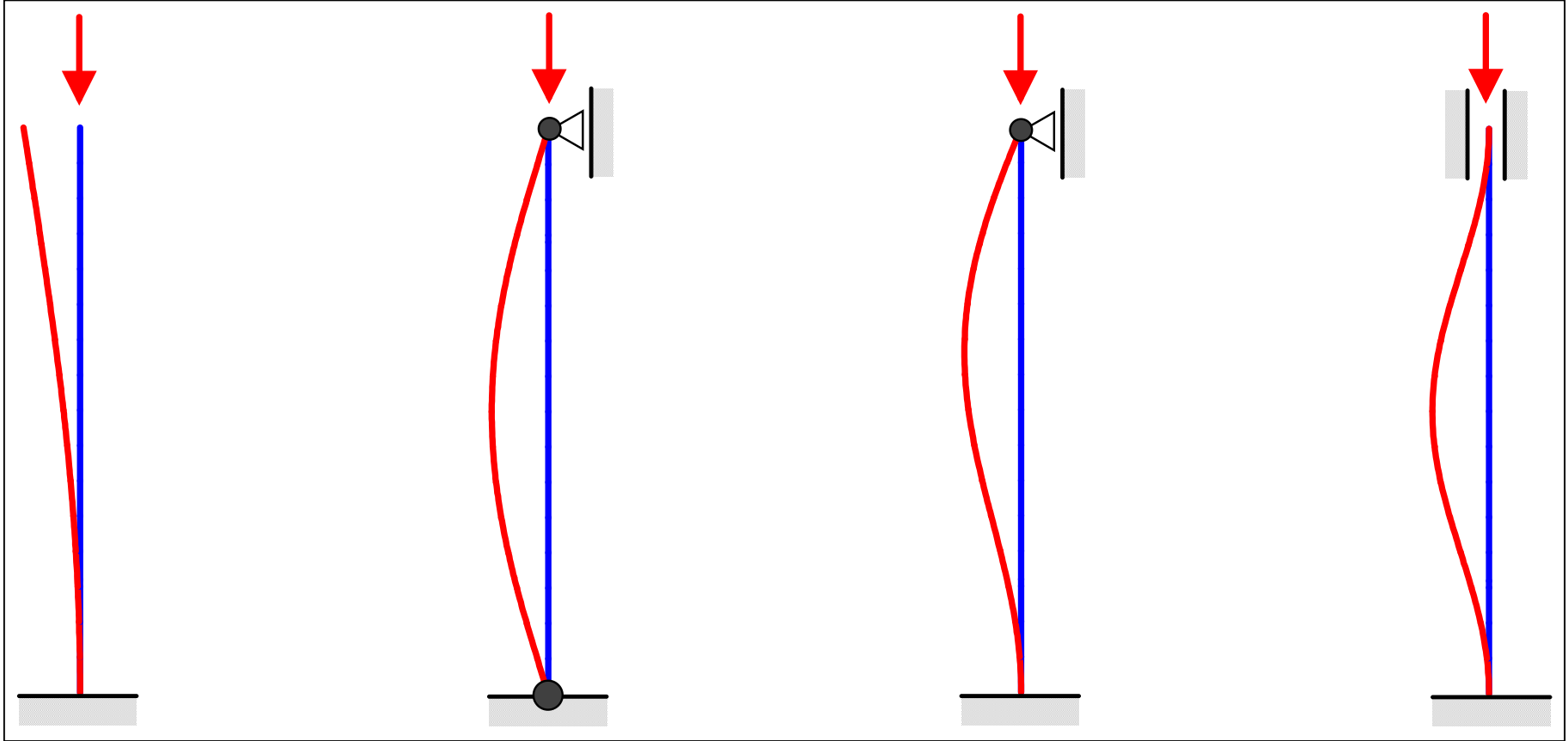
# EULER-Fälle: FE-Lösung

	Knicklast [kN]			
Elemente	Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4
1	8.2845	39.990	99.975	---
2	8.2268	33.138	69.012	133.30
4	8.2229	32.907	67.424	132.55
8	8.2226	32.892	67.295	131.63
16	8.2226	32.891	67.286	131.57
<b>EULER</b>	<b>8.2226</b>	<b>32.891</b>	<b>67.123</b>	<b>131.56</b>



menu

# EULER-Fälle: Knickfiguren



menum

# EULER-Fälle: Fazit

Die FE-Lösung der klassischen Stabilitätstheorie liefert im Prinzip identische Ergebnisse zu der klassischen Lösung von EULER. Somit entspricht die theoretische Formulierung genau der Formulierung von EULER. Allerdings führt eine FE-Modellierung immer einen *Diskretisierungsfehler* in die Lösung ein.

Im vorliegenden Fall müssen die kubischen Ansätze der Balkenelemente sinusförmige Knickfiguren abbilden, wozu sie grundsätzlich nicht in der Lage sind. Erst in der Grenze unendlich vieler Element werden FE-Lösung und analytische Lösung identisch. Je nach Komplexität des abzubildenden Knickmusters sind zur Erzielung eines gewissen Fehlerniveaus unterschiedliche Elementzahlen notwendig (der Eulerfall 1 ist der gutmütigste, der Eulerfall 3 der am schwersten zu modellierende).

Der Diskretisierungsfehler bildet das Tragwerk grundsätzlich zu steif ab – als Folge der Steifigkeitsüberschätzung liegen die kritischen Lasten der FE-Rechnung immer auf der unsicheren Seite.

Bei einer linearen Rechnung wäre ein Element pro Stab ausreichend gewesen, im Nichtlinearen werden mehr Elemente benötigt. Es kann also eine Diskretisierung, die für eine lineare Berechnung angefertigt wurde, nicht ohne Weiteres für eine nichtlineare Berechnung bzw. eine Stabilitätsuntersuchung verwendet werden – hier ist Vorsicht geboten.



# Zusammenfassung

- Die klassische Stabilitätstheorie erlaubt eine Abschätzung der Stabilitätslast unter den folgenden Voraussetzungen:
  - elastisches Verhalten,
  - keine Imperfektionen,
  - Dominanz von Normalkräften.
- Die Visualisierung der Beulfiguren gestattet einen Einblick in die dem Stabilitätsversagen zugrunde liegenden *Versagensmechanismen*.
- Die Methode erlaubt keine Aussage hinsichtlich der sich *nach dem Beulen* einstellenden *Verformungen* oder *Schnittgrößen*, gestattet damit keine *lokale Bemessung* von Querschnitten.

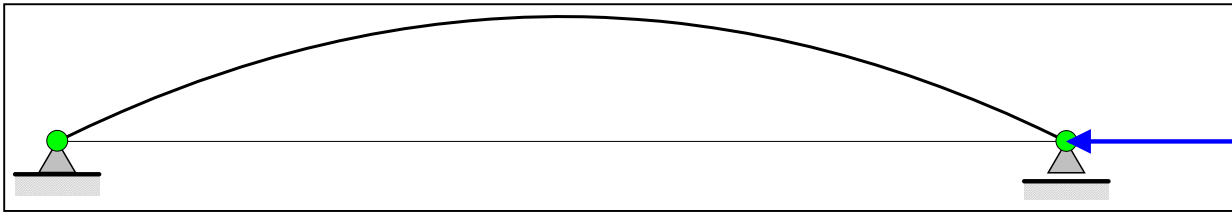


menum

# Nächster Schritt: Theorie II. Ordnung

Alle *realen Tragwerke* weisen mehr oder weniger große *Imperfektionen* auf. Im Falle der Eulerstäbe beträfe das die Stabachse, die niemals exakt gerade wäre, sondern eine gewisse *Vorkrümmung* besäße. Damit läge kein gerader Stab, sondern ein *Bogen mit schwacher Krümmung* vor.

Eulerfall 2 des imperfekten Stabs



Es ist unmittelbar klar, dass das oben stehende Tragwerk nicht stabilitätsgefährdet ist: die Horizontalkraft erzeugt von Beginn an Biegemomente, die zu einer immer größeren Krümmung des Stabes führen. Die durch die parallel auftretende Normalkraft entstehende geometrische (negative) Steifigkeit hat kein direktes Knicken zur Folge – das ursprüngliche *Verzweigungsproblem* hat sich in ein *Spannungsproblem* verwandelt, bei dem in der Nähe der EULER-Last die Verformungen und Schnittgrößen sehr stark anwachsen und damit ein Spannungsversagen evozieren. Benötigt wird zur Berechnung dieser Verformungen und Spannungen eine Theorie, die konsistent zur klassischen Stabilitätstheorie und genauso einfach in der Handhabung ist. Dies ist die sog. *Theorie II. Ordnung*.



menum