

*Wolfhard Zahlten*

*Lecture Series:*  
**Structural Dynamics**

*Lecture 11:*  
**Earthquake Excitation:**  
**Part C: Pushover Method**



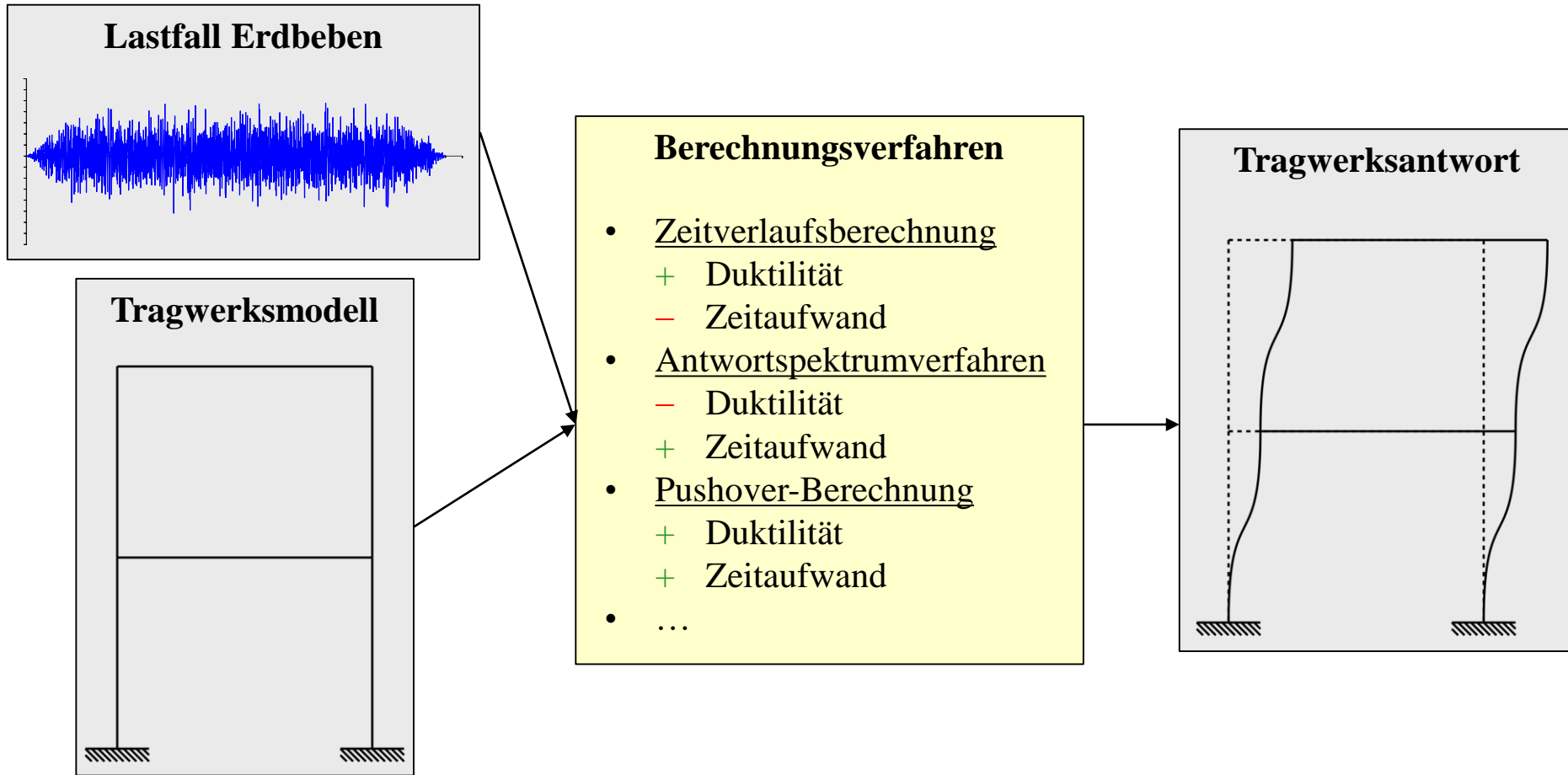
menum

# Übersicht

- **Motivation**
- **Zeitverlaufsberechnung**
- **Antwortspektrumverfahren**
  - Vereinfachtes Verfahren
  - Modales Verfahren
- **Duktilität**
- **Traglastverfahren**
  - Handrechenverfahren
  - Computergestützte Berechnung
- **Pushover-Verfahren**
  - Pushover-Analyse
  - Kapazitätsspektrum-Methode

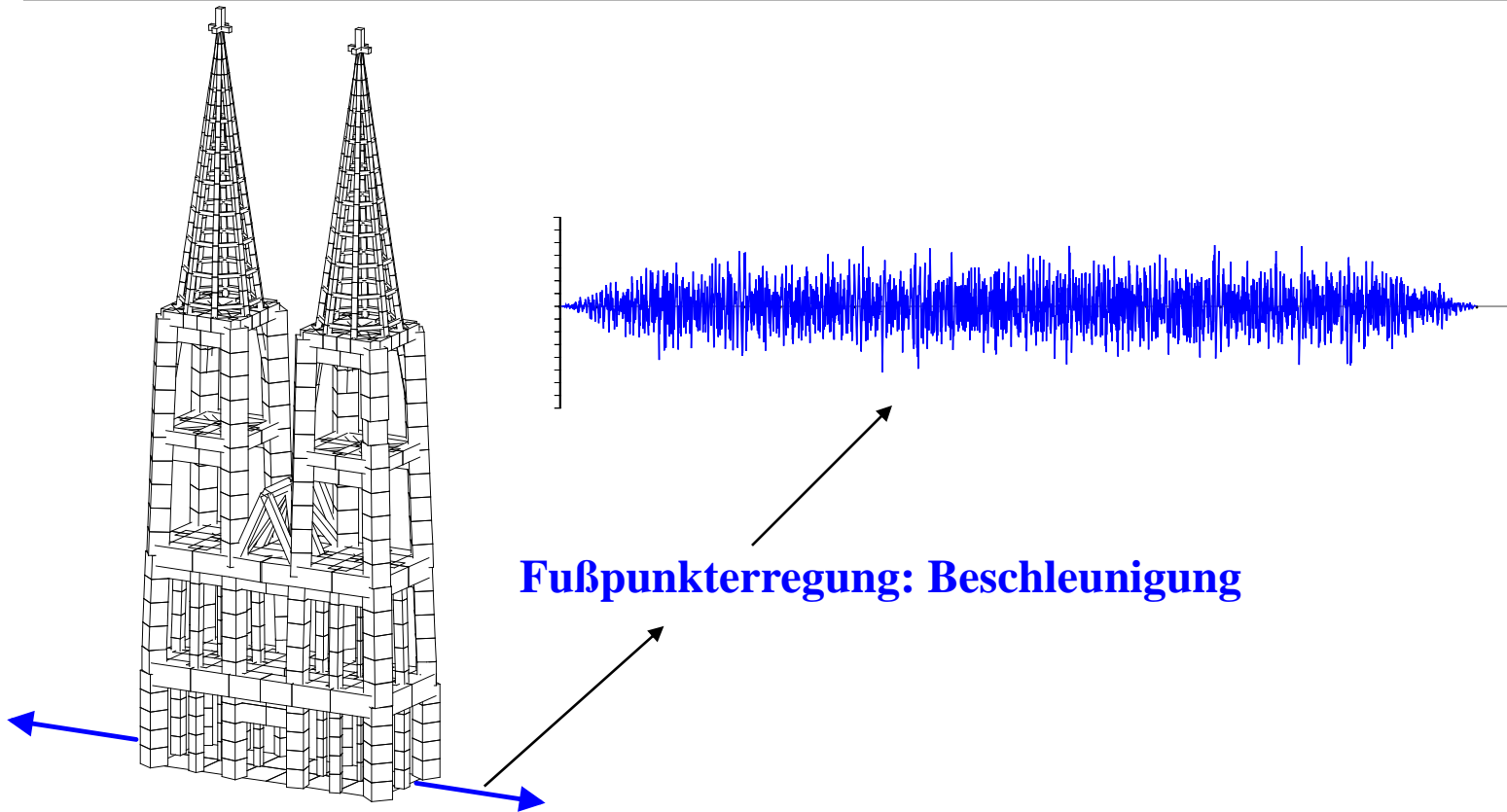


# Motivation



# Zeitverlaufsrechnung

Erdbeben stellen eine zeitveränderliche Fußpunkterregung dar. Der Zeitverlauf ist nicht formelmäßig gegeben, sondern bildet einen instationären stochastischen Prozess, welcher sehr schwierig zu erfassen ist. Obwohl die Normung Berechnungsverfahren mit Zeitreihen explizit gestattet, rät der Leitfaden „Der Lastfall Erdbeben im Anlagenbau“ davon im Abschnitt 6.2 ab: *„Eine Bemessung auf der Grundlage von Zeitverlaufsrechnungen wird nicht empfohlen“*.



# Antwortspektrumverfahren

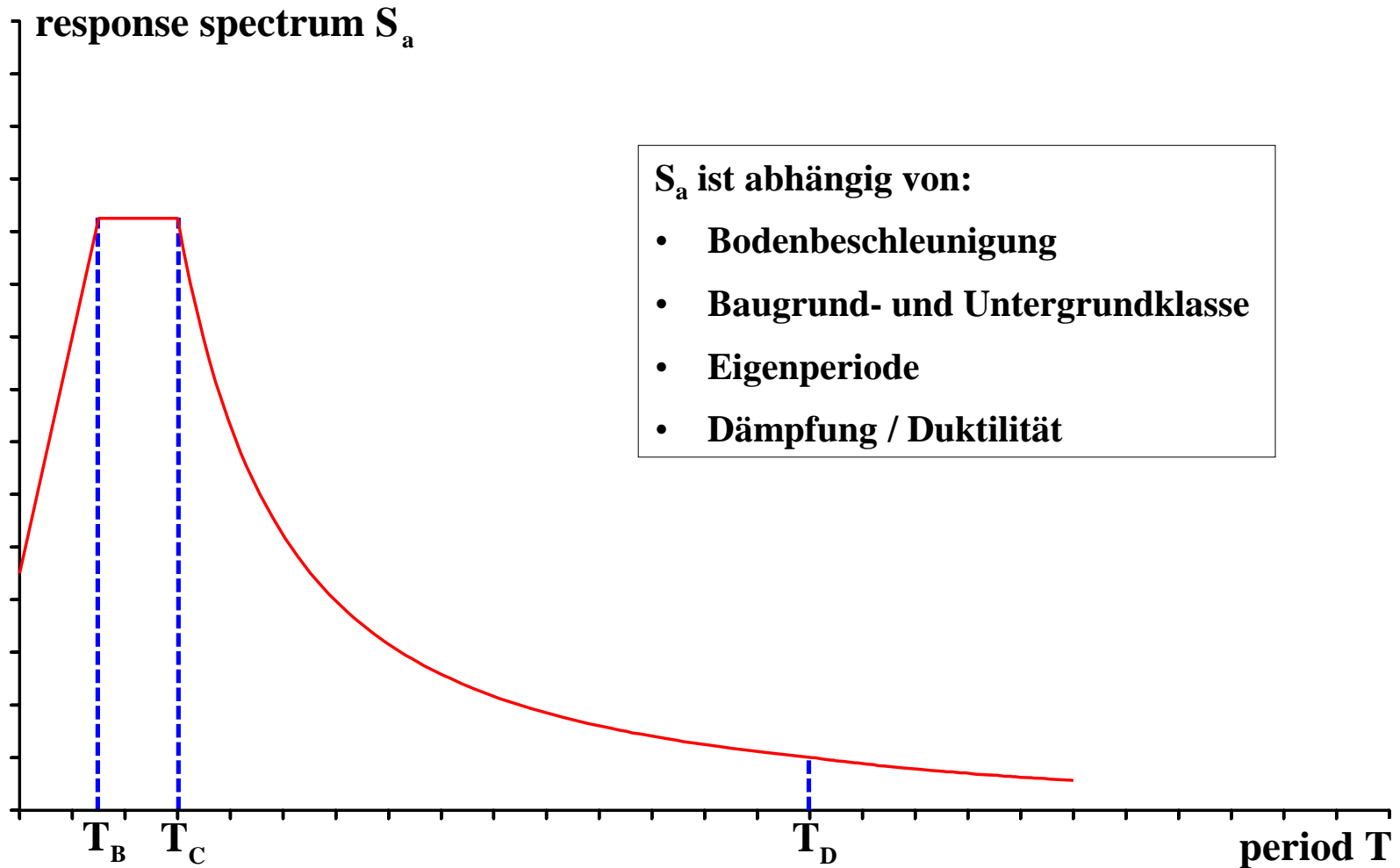
Das Standardverfahren der Erdbebenberechnung ist das Antwortspektrumverfahren. Antwortspektren sind zunächst nur für Einmassenschwinger definiert. In einem Antwortspektrum sind maximale Tragwerksantworten (Beschleunigung, Geschwindigkeit, Verschiebung) des Einmassenschwingers infolge eines bestimmten Erdbebens über der Eigenperiode des Einmassenschwingers aufgetragen. In der Regel wird, wenn nichts weiteres gesagt wird, unter einem Antwortspektrum das Beschleunigungsantwortspektrum verstanden.

Die Bemessung erfolgt nicht für ein bestimmtes Erdbeben, sondern für “alle” denkbaren während der Nutzungsdauer möglicherweise auftretenden Erdbeben. Auf der Basis von Aufzeichnungen und theoretischen Überlegungen stellen deshalb die Normen elastische Antwortspektren zur Verfügung, die Umhüllendencharakter haben und damit “alle” Fälle abdecken. Über standortspezifische Parameter können diese Spektren an die lokalen Verhältnisse angepasst werden.

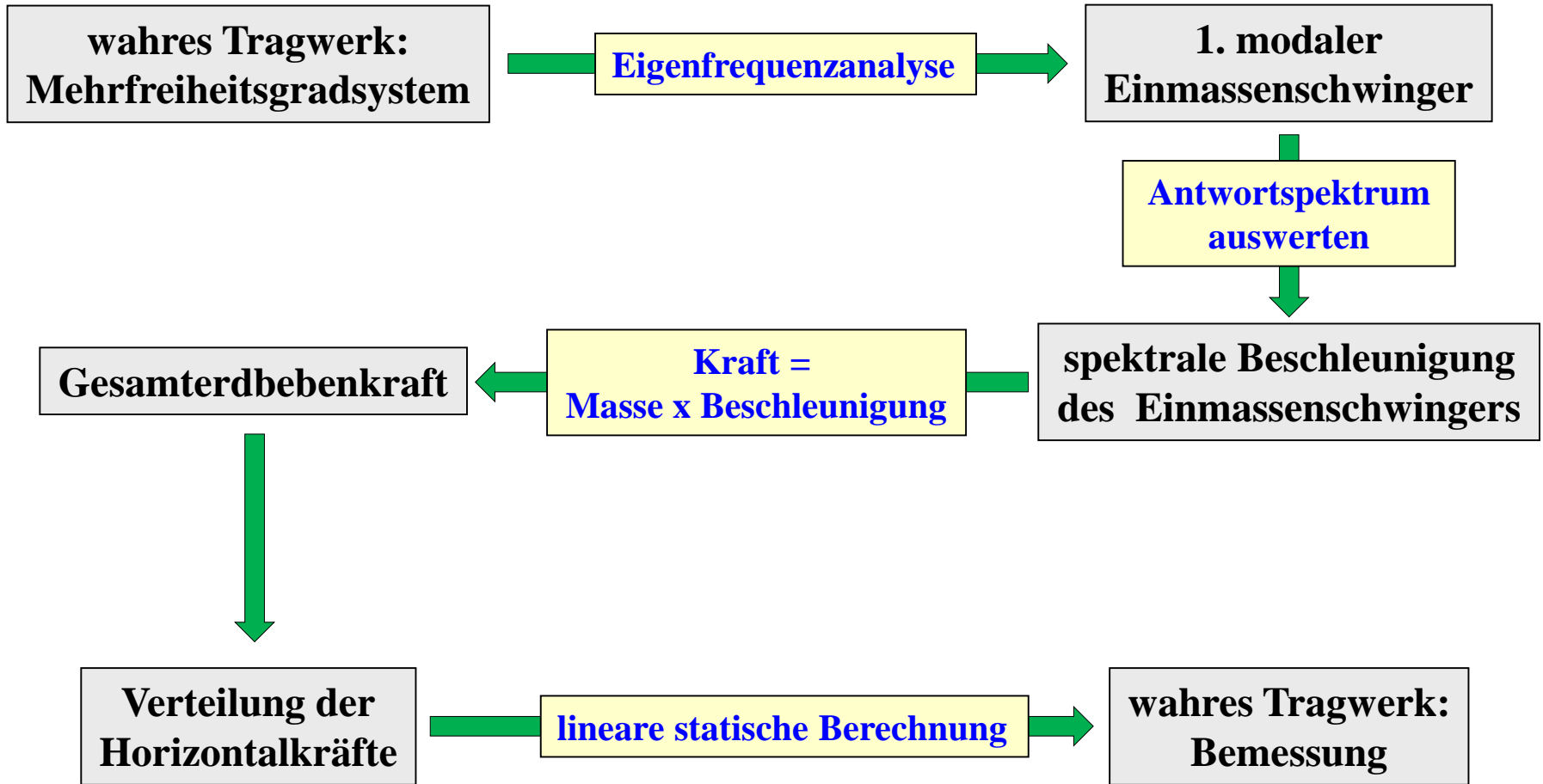
Im Antwortspektrum stellt jedes Wertepaar das Ergebnis einer linearen, insbesondere linear-elastischen dynamischen Zeitverlaufsberechnung dar.



# Antwortspektrum



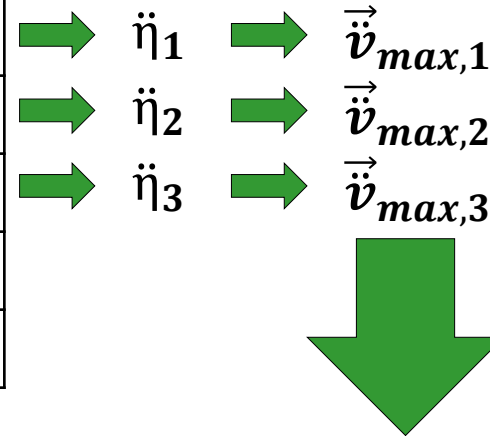
# Vereinfachtes Antwortspektrumverfahren



# Multimodales Antwortspektrumverfahren

Das einfache Antwortspektrumverfahren setzt voraus, dass die Gesamttragwerksantwort praktisch vollständig von der 1. Eigenform dominiert wird. Ist das nicht der Fall, müssen mehrere (ausreichend viele) Eigenformen berücksichtigt werden.

Nr.	Effektive Modalmasse	Anteil an Gesamtmasse	Massen-summe	Eigen-periode
1	...	75 %	75 %	$T_1 = \dots$
2	...	18 %	93 %	$T_2 = \dots$
3	...	5 %	98 %	$T_3 = \dots$
...	...	...	...	...
n	...	... %	... %	$T_n = \dots$



Gesamtlösung durch Überlagerung (z. B. nach der SRSS- oder CQC-Methode)





# Duktilität I

**Grundsätzlich gilt: Wenn alle Querschnitte, Bauteile und Anschlüsse eines Tragwerks elastisch bleiben, ist die Standsicherheit gegeben. Der Umkehrschluss, dass zur Sicherstellung der Standsicherheit alles elastisch bleiben muss, ist jedoch falsch. Bei statisch unbestimmten Tragwerken können punktuelle Schädigungen auftreten, solange diese keinen Teilkollaps bzw. Systemkollaps nach sich ziehen. Die Ausnutzung dieser Reserven erfolgt im klassischen Traglastverfahren der Statik.**

**Dieses wurde zunächst für den Stahlbau entwickelt. Der Werkstoff Stahl erlaubt die Ausbildung größerer plastischer Dehnungen, verhält sich also duktil. Somit kann ein Querschnitt sukzessive durchplastizieren, ohne dass er bricht, bis er im Grenzfall seine vollplastische Schnittgröße, bei Biegung sein vollplastisches Moment  $M_{pl}$ , erreicht.**

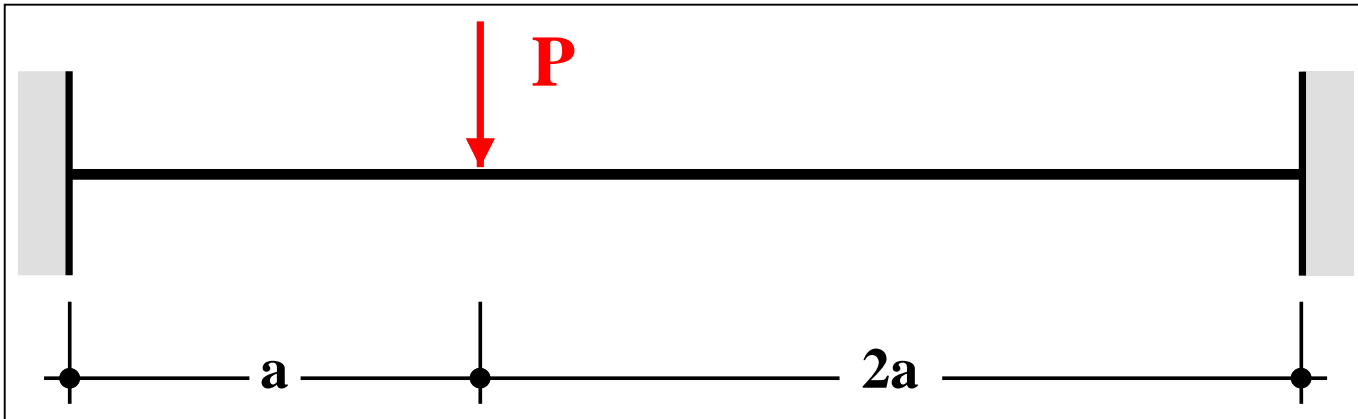
**Im Traglastgrenzzustand haben sich gerade so viele plastische Gelenke gebildet, dass sich eine kinematische Kette ausbildet und das Teilsystem oder gar das Gesamtsystem kollabiert.**



# Traglastverfahren - Handrechnung I

Die klassische Vorgehensweise besteht darin, eine kinematische Kette anzunehmen und den damit verknüpften Gleichgewichtszustand mittels des Prinzips der virtuellen Verschiebungen zu ermitteln.

Beispiel: Zweifach statisch unbestimmter Biegeträger (bez. ebener Biegung)



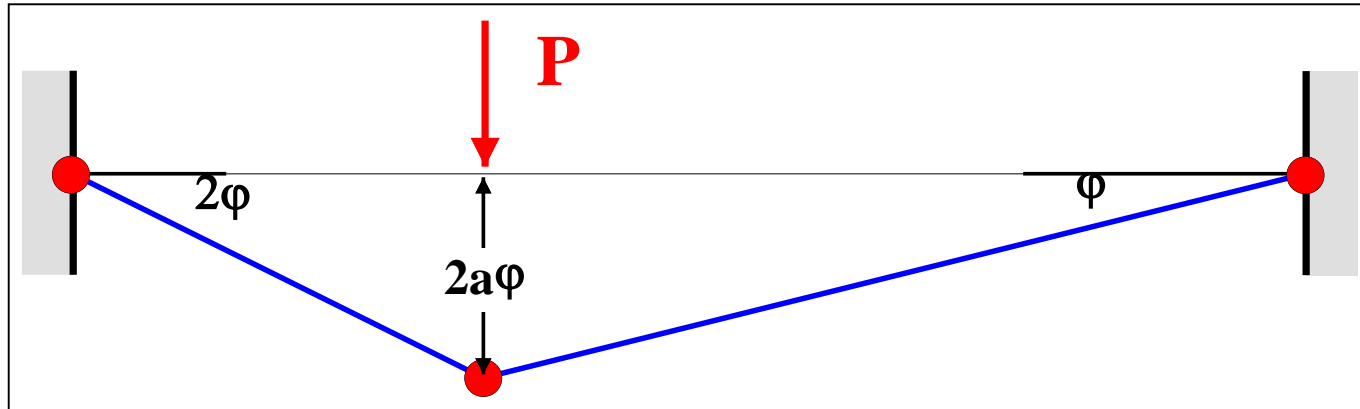
$$M_{pl} = 400 \text{ kNm}$$

$$a = 1,0 \text{ m}$$



# Traglastverfahren - Handrechnung II

Kinematische Kette



Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$M_{pl} \cdot 2\varphi + M_{pl} \cdot 3\varphi + M_{pl} \cdot \varphi = P_{pl} \cdot 2\varphi a$$



$$P_{pl} = \frac{6M_{pl}}{2a} = 1200 \text{ kN}$$

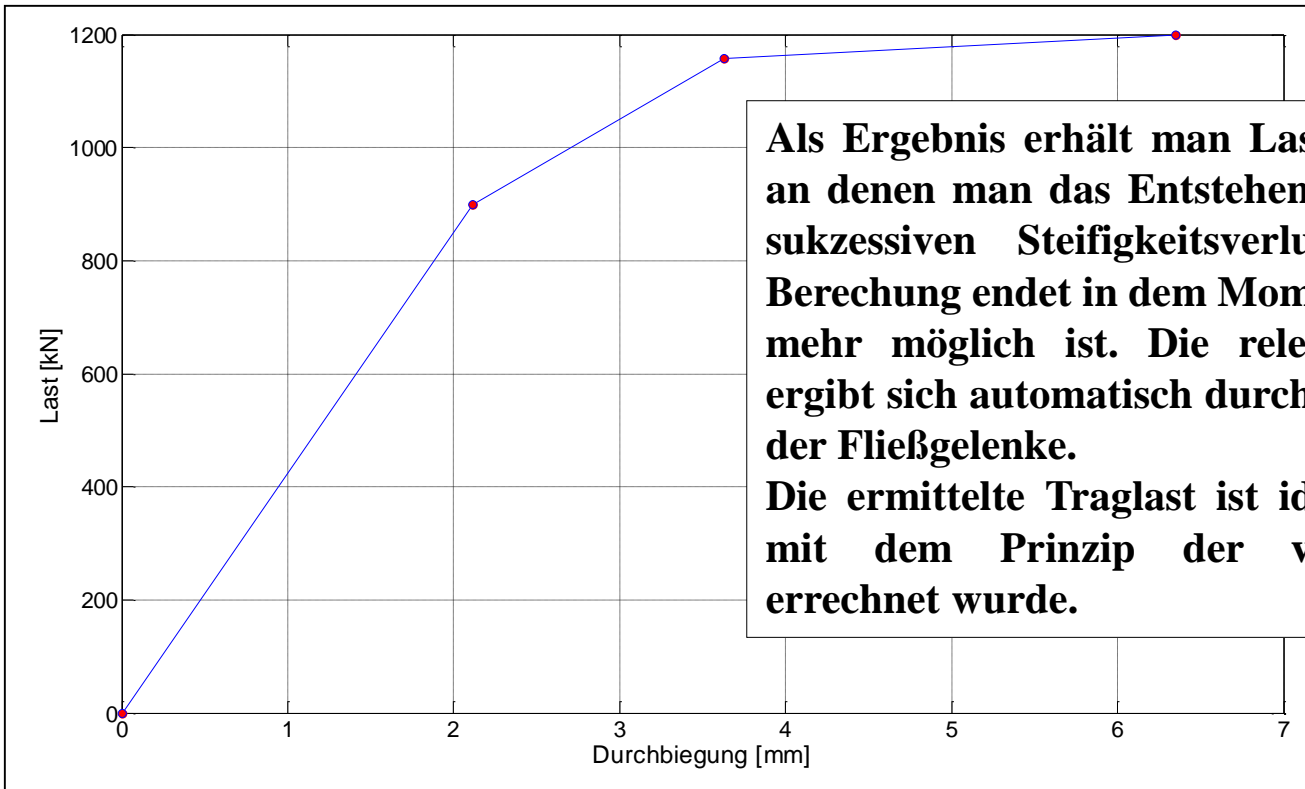
Die Traglast ist durch die kinematische Kette gegeben, welche die geringste plastische Grenzlast  $P_{pl}$  ergibt. Hierfür müssen i. Allg. eine Reihe von sinnvollen kinematischen Ketten untersucht werden. Die Rechnung liefert ausschließlich den finalen Traglastgrenzzustand – Zwischenzustände werden nicht ermittelt.



menum

# Traglastverfahren - computergestützt

Bei einer computergestützten Berechnung wird ein numerisches Modell erstellt, welches die Fähigkeit besitzt, im Verlaufe der Rechnung das Tragwerk dahingehend zu modifizieren, dass bei Erreichen der plastischen Querschnittstragfähigkeit automatisch plastische Gelenke eingeführt werden. Die äußere Last wird schrittweise gesteigert, wobei in jedem Schritt eine Systemkontrolle erfolgt.



Als Ergebnis erhält man Last-Verformungsdiagramme, an denen man das Entstehen der Fließgelenke und den sukzessiven Steifigkeitsverlust erkennen kann. Die Berechnung endet in dem Moment, wo kein Gleichgewicht mehr möglich ist. Die relevante kinematische Kette ergibt sich automatisch durch die sukzessive Einführung der Fließgelenke.

Die ermittelte Traglast ist identisch zu derjenigen, die mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen errechnet wurde.



menum

# Zusätzliche lokale Nachweise: Rotationskapazität

Das Traglastverfahren liefert zunächst eine globale Aussage über das Tragvermögen der Gesamtstruktur. Wie das Last-Verformungsdiagramm zeigt, treten durch den sukzessiven Steifigkeitsverlust deutlich größere Verformungen auf als im elastischen Bereich. Insbesondere stellen sich größere, durch plastische Dehnungen verursachte Rotationen in den Fließgelenken ein. Die Traglastberechnung besitzt nur dann Gültigkeit, wenn diese plastischen Rotationen auch möglich sind. Sind sie das nicht, versagt der Querschnitt spröde, indem er das plastische Moment nicht mehr aufnehmen kann, und das System kollabiert. Ein Beispiel hierfür wäre das lokale Ausbeulen eines Querschnitts, wenn dessen Blechdicken zu dünn sind.

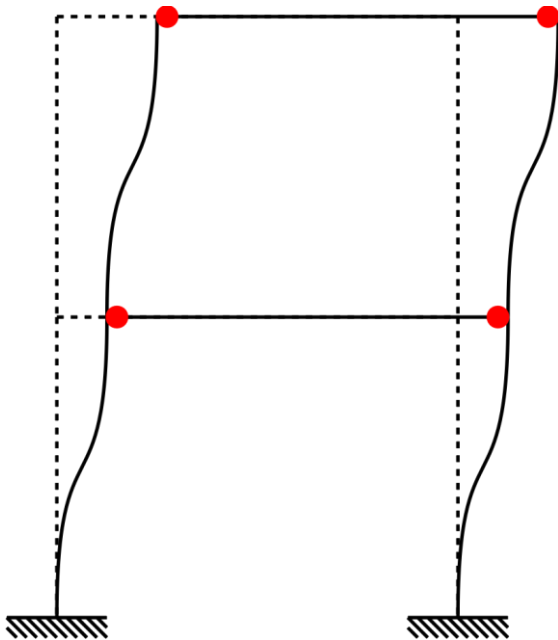
Deshalb reicht eine reine Ermittlung der plastischen Grenztragfähigkeit nicht aus. Zwingend sind nachgelagert weitere lokale Nachweise erforderlich, in denen die notwendige Rotationskapazität nachgewiesen wird.

Erst die Kombination der globalen Traglastberechnung mit lokalen Nachweisen der vorhandenen Duktilität liefert einen verwertbaren Nachweis.



# Duktilität II

Die Belastung der linearen statischen Berechnungen erwächst aus Trägheitskräften, deren Größen unmittelbar von der Systemsteifigkeit abhängen. Bei entsprechend weichen Tragwerken ( $T > T_c$ ) nehmen die Trägheitskräfte mit fallender Steifigkeit ab. Bei Erdbeben als Katastrophenlastfall sind Schädigungen gestattet, manchmal sogar erwünscht. Diese führen zum Aufweichen des Systems und damit zum Abbau der Belastung. Somit liegt ein komplexer nichtlinearer dynamischer Prozess vor, in dessen Verlauf eine permanente gegenseitige Beeinflussung von Belastung und Tragwerksantwort vorliegt.



Bei diesen Schädigungen handelt es sich um Bereiche im Tragwerk, in denen die elastische Tragfähigkeit überschritten wurde und sich plastische Verformungen einstellen (Fließgelenk). Diese plastischen Bereiche sind räumlich begrenzt. Das bedeutet, dass an dieser Stelle kein reales Gelenk vorliegt, sondern vielmehr eine definierte Verdrehung bzw. Krümmung infolge plastischer Verformung. Im Gegensatz zu einem Gelenk kann aber weiterhin das vollplastische Grenzmoment übertragen werden. Die dabei auftretenden Verformungen können nach Entlastung nur um den elastischen Anteil reduziert werden, die plastischen Verformungsanteile sind irreversibel. Durch die Ausbildung von Fließbereichen sind statisch unbestimmte Tragwerke in der Lage, Schnittgrößen umzulagern.



# Duktilität III

Im Rahmen des Antwortspektrumverfahrens wird das nichtlineare Tragverhalten und der komplexe Wechselwirkungsprozess zwischen Tragwerksantwort und Bebenwirkung vereinfacht durch einen Faktor, den Duktilitätsfaktor  $q$ , erfasst, mit dem die Ordinaten des Antwortspektrums reduziert werden. Diese Reduktion wirkt sich auf alle Bauteile des gesamten Tragwerks gleichermaßen aus, da die Schnittgrößen in allen Bauteilen entsprechend kleiner werden. Im Umkehrschluss heißt das, dass eine räumliche Verteilung örtlich begrenzter plastischer Mechanismen, die potentiell Duktilität hervorrufen, nicht berücksichtigt werden kann. Stattdessen wird unterstellt, dass das Tragwerk an jeder Stelle gleichermaßen Energie dissipiert. Dies stellt eine sehr grobe Näherung des nichtlinearen Tragverhaltens dar. Bei Pushover-Verfahren wird die Duktilität genauer berücksichtigt. Dadurch können auch lokale Schädigungen erfasst und bei der Ermittlung der Tragwerksantwort berücksichtigt werden. Hierbei wird die lineare statische Berechnung durch eine nichtlineare ersetzt. Diese nichtlineare Berechnung ist identisch zum computergestützten Traglastverfahren. Dennoch bleibt die Rechenzeit weit hinter dem, was von nichtlinearen Zeitverlaufsberechnung bekannt ist.



# Pushover-Verfahren

In den „letzten Jahren“ hat sich, vor allem in den angelsächsischen Ländern, das Konzept von Pushover-Verfahren etabliert. Freeman et al. (1975) sowie Fajfar und Fischinger (1987) haben sich erstmals mit der Thematik befasst. Verankert ist es im ATC 40 (1996, „Applied Technology Council“), FEMA 273 (1997, „Federal Emergency Management Agency“), FEMA 356 (2000, ASCE „American Society of Civil Engineers“) und im Eurocode 8 (2004, CEN „Comité Européen de Normalisation“).

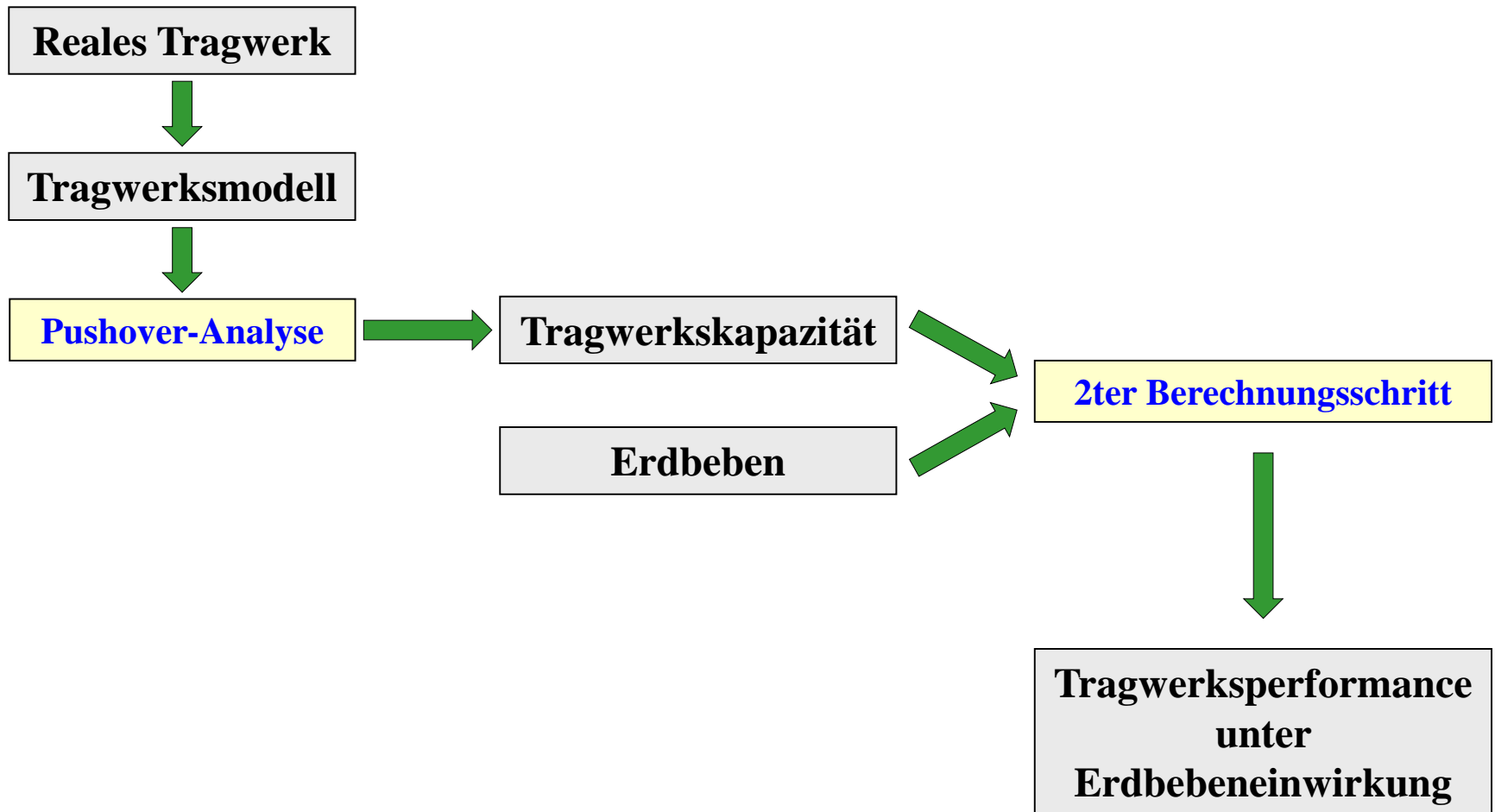
Pushover-Verfahren gehören zu den verformungsbasierten Verfahren („performance-based“). Das Konzept von Pushover-Verfahren beruht auf zwei grundlegenden Elementen: die Beanspruchung des Tragwerks infolge Erdbeben und einer Abbildung der Beanspruchbarkeit des Tragwerks. Ziel aller Pushover-Verfahren ist es, diese globale Tragwerksperformance unter Berücksichtigung aller plastischen Mechanismen infolge Erdbeben zu beschreiben.

Vorab ist festzuhalten, dass es nicht „das Pushover-Verfahren“ gibt. In Literatur und Norm sind zahlreiche Pushover-Verfahren beschrieben. Grundlegend lässt sich jedes Pushover-Verfahren in zwei Schritte aufteilen: eine Pushover-Analyse und einen weiteren Berechnungsschritt, in dem ein Zustand des Gleichgewichts zwischen Erdbebeneinwirkung und Tragwerksreaktion gesucht wird.





# Pushover-Verfahren: Grundlegende Schritte



# Tragwerksmodellierung

**Grundlage jeder computergestützten Berechnung ist die (ggf. aufwendige) Modellierung des Tragwerkes. Im Falle von Pushover-Berechnungen sind darüber hinaus besondere Aspekte, wie z. B. die Abbildung der Duktilität, zu berücksichtigen.**

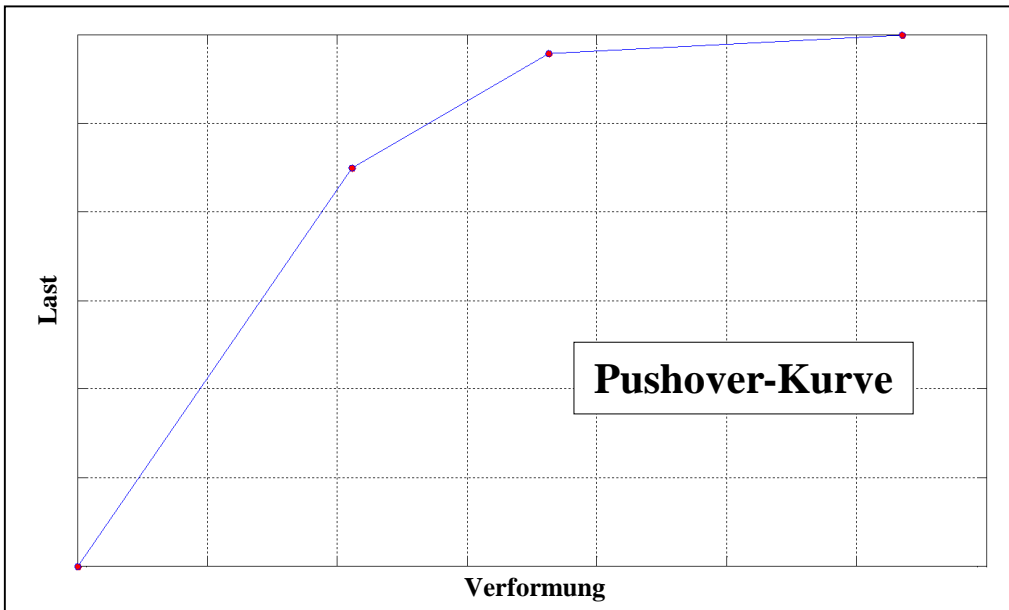
**Mögliche Fragestellungen bei der Tragwerksmodellierung:**

- **Aus welchen Elementen soll das Tragwerk zusammengesetzt werden?**  
(Stäbe, Scheiben, Platten, Schalen, Kontinua)
- **Wie sollen die Lasten angesetzt werden?**  
(Lasten verteilen/zusammenfassen)
- **Wie soll die Duktilität berücksichtigt werden?**  
(Gar nicht, konzentriert, verteilt)
- **Wie werden ggf. Fließgelenke modelliert?**  
(Schnittgrößeninteraktion)
- **Wie soll das Materialgesetz modelliert werden?**  
(linear/nichtlinear, axial/biaxial/triaxial)
- **Ist das mit dem vorliegenden Softwarepaket überhaupt möglich?**
- ...



# Pushover-Analyse: Allgemein

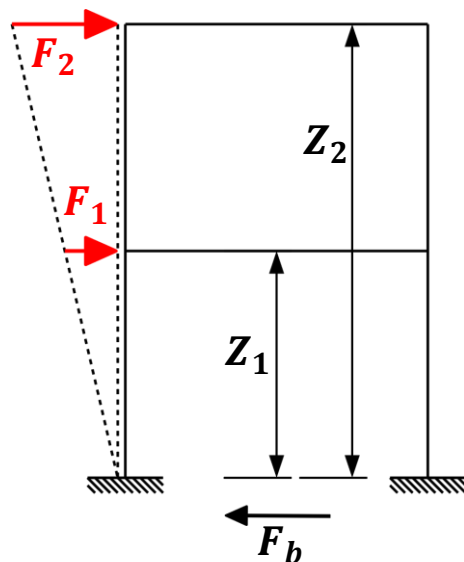
Das Ziel einer Pushover-Analyse ist die Abbildung der Tragwerkskapazität. Dabei ist festzuhalten, dass es nicht die eine Tragwerkskapazität gibt, da die Ermittlung dessen auf unterschiedlichen Ansätzen beruhen kann. Das Konzept hinter jeder Pushover-Analyse ist aber dasselbe: ein computergestütztes Traglastverfahren. Die Belastung wird inkrementell gesteigert und die Verformung des Tragwerkes aufgezeichnet. Die Berechnung erfolgt dabei nichtlinear statisch. Als Ergebnis erhält man ein Last-Verformungs-Diagramm (Tragwerkskapazität), welches auch Pushover-Kurve genannt wird.



# Pushover-Analyse: Hochbau

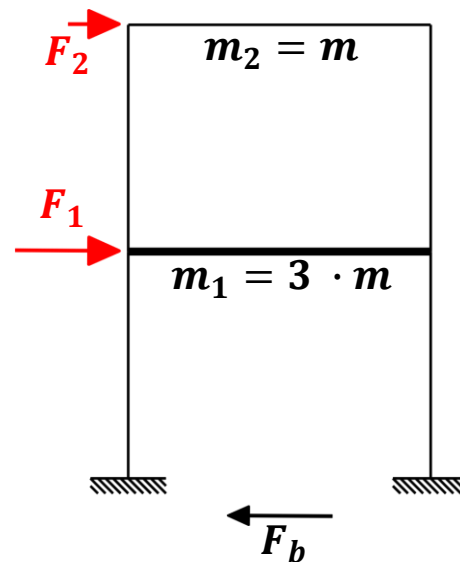
„Die pushover-Berechnung ist eine nichtlineare statische Berechnung, die unter konstanten Gewichtslasten und monoton wachsenden Horizontalkräften durchgeführt wird“ (DIN EN 1998-1:2010-12).

Höhenproportional



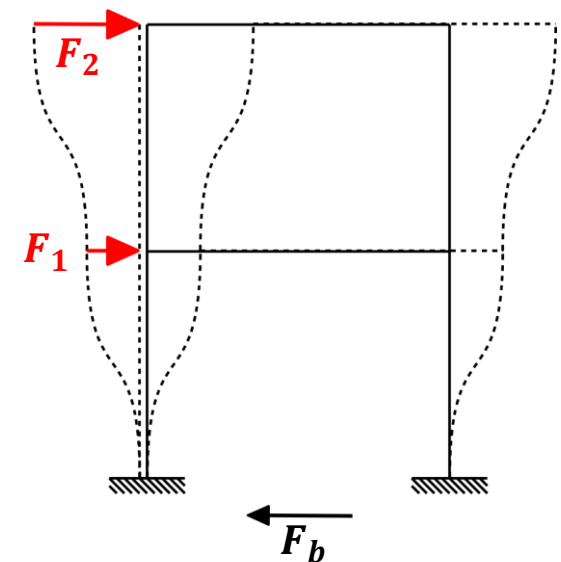
$$F_i = \frac{Z_i}{\sum_i Z_i} \cdot F_b$$

Massenproportional



$$F_i = \frac{m_i}{\sum_i m_i} \cdot F_b$$

Modalformproportional

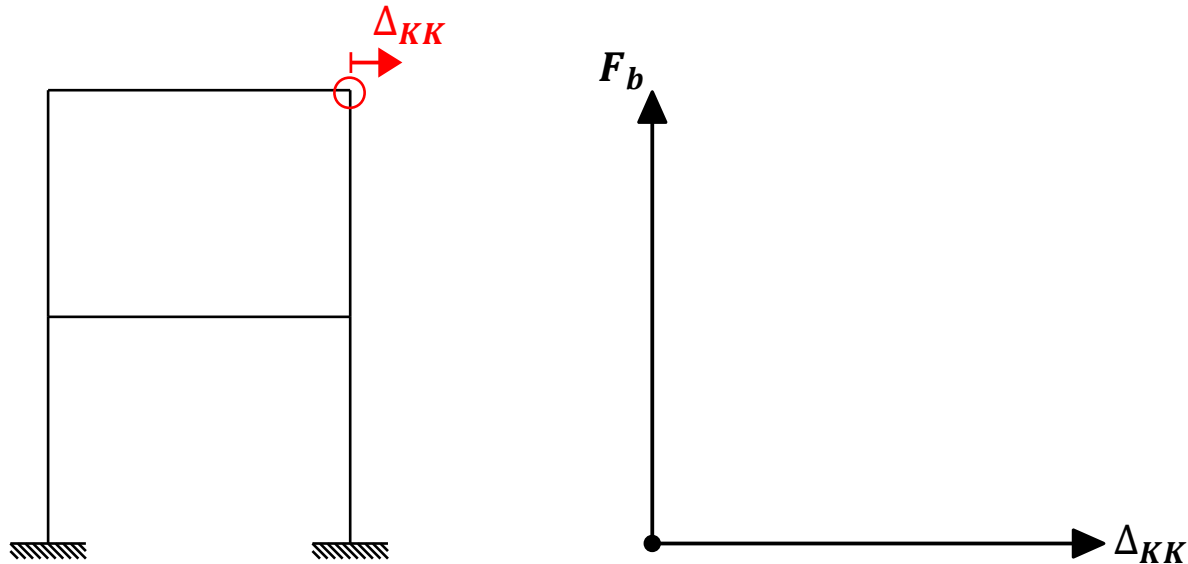


$$F_{i,k} = \frac{\Phi_k(i)}{\sum_i \Phi_k(i)} \cdot F_b$$



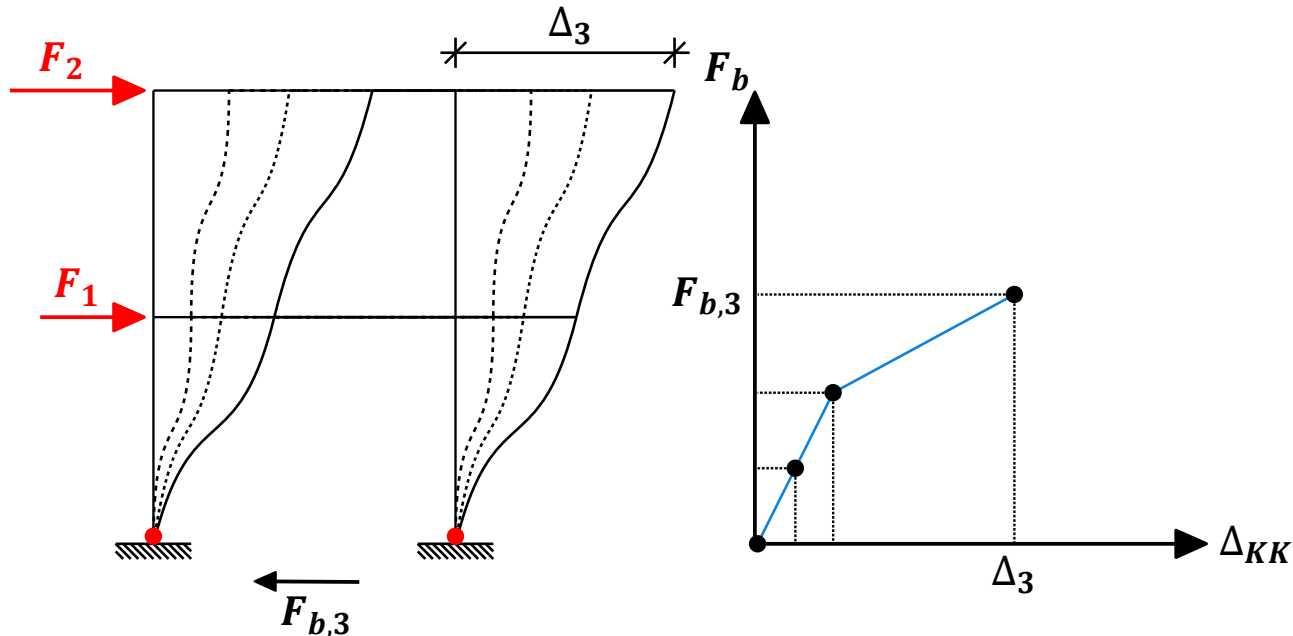
# Pushover-Analyse: Ablauf

Ein Last-Verformungs-Diagramm trägt immer eine bestimmte Belastung gegenüber einer bestimmten Tragwerksverformung auf. Im Fall einer Pushover-Kurve handelt es sich bei der Belastung um den resultierenden Fundamentalschub  $F_b$ . Für die Tragwerksverformung wird im Hochbau in der Regel die Verformung eines Punktes auf Dachniveau herangezogen. Dieser Punkt wird Kontrollknoten genannt.

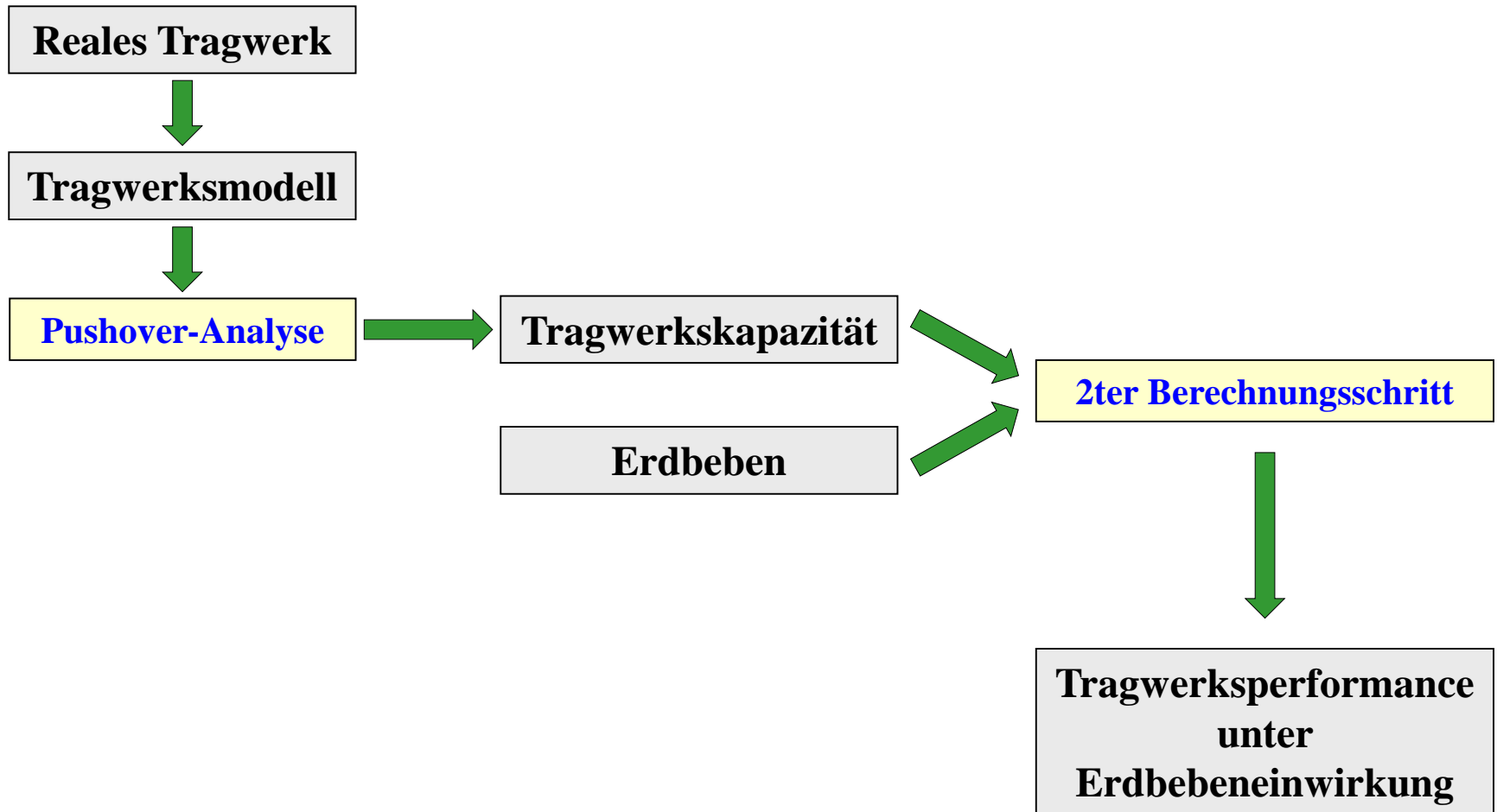


# Pushover-Analyse: Ablauf

Die nichtlineare Pushover-Analyse wird kraftgesteuert bis zu einer bestimmten Verformung des Tragwerks durchgeführt. Dafür wird eine Grenzverschiebung  $\Delta_{KK}$  definiert, bei der die Ermittlung der Last-Verformungs-Kurve stoppt. Alternativ kann die Ermittlung auch bis zum Systemkollaps durchgeführt werden.



# Pushover-Verfahren: Grundlegende Schritte



# Ermittlung der Tragwerksperformance

Es gibt verschiedene Berechnungsverfahren, um die Tragwerksperformance unter der Erdbebeneinwirkung zu ermitteln. Allen Verfahren ist jedoch gemein, dass sie sich an eine Pushover-Analyse anschließen.

**Kategorisierung der Berechnungsverfahren:**

- **Mono-/multimodal**
- **Adaptiv/nicht adaptiv**
- **Mono-/multidirektional**
- ...

**Beispiele für monomodale, nicht adaptive Berechnungsverfahren:**

- **„N2-Methode“ (1987, Fajfar und Fischinger)**
- **Kapazitätsspektrum-Methode (1975, Freeman et al.)**

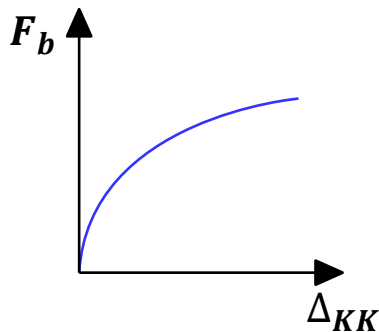




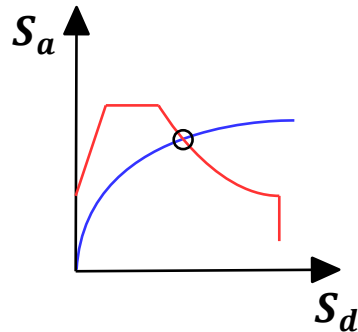
# Kapazitätsspektrum-Methode

Entwickelt wurde die Kapazitätsspektrum-Methode (**C**apacity **S**pectrum **M**ethod CSM) von Freeman et al. im Jahr 1975, um Bestandsgebäude des amerikanischen Militärs auf ihre Erdbebensicherheit zu prüfen. Im Rahmen dieses Verfahrens wird die Tragwerkskapazität durch eine Pushover-Kurve und die seismische Beanspruchung durch ein Antwortspektrum beschrieben. Ein Gleichgewichtszustand liegt vor, wenn die inneren Kraftgrößen den äußeren Einwirkungen entsprechen. Anschaulich entspricht dies dem Schnittpunkt von Pushover-Kurve und Antwortspektrum. Durch die Darstellung beider Kurve in einem gemeinsamen spektralen Diagramm kann dieser Schnittpunkt, auch Performance-Punkt genannt, ermittelt werden. Der Performance-Punkt beschreibt die globale Tragwerksperformance unter der Erdbebeeinwirkung. Gibt es keinen Performance-Punkt, ist kein globaler Gleichgewichtszustand möglich und die Tragwerkskapazität reicht nicht aus, um dem Erdbeben standzuhalten.

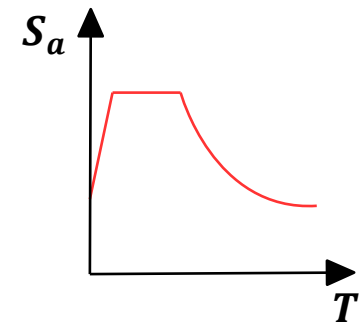
Tragwerkskapazität



Schnittpunkt



Erdbebeeinwirkung



# CSM: Transformation 1

In der Last-Verformungs-Kurve wird der Fundamentalschub über der Verformung des Tragwerkes aufgetragen. Ziel der ersten Transformation ist es, die reale Verformung  $\Delta_{KK}$  des Tragwerkes in eine spektrale Verschiebung  $S_d$  und den Fundamentalschub  $F_b$  in eine Spektrale Beschleunigung  $S_a$  zu überführen. Der Lösungsansatz ist durch die Rücktransformation aus dem Modalraum in den Originalraum im Rahmen des Antwortspektrumverfahrens gegeben. Durch die Transformation wird das Tragwerk auf einen äquivalenten (spektralen) Einmassenschwinger reduziert.



# CSM: Transformation 1

Tragwerksverformung

Fundamentschub

Ermittlung des i-ten Modalbeitrags

$$\eta_{max,i} = \beta_i \cdot S_{d,i} \rightarrow \vec{v}_{max,i} = \vec{\Phi}_i \cdot \beta_i \cdot S_{d,i}$$

$$F_{b,max,i} = \tilde{\beta}_i \cdot \beta_i \cdot S_{a,i} = m_{i,eff} \cdot S_{a,i}$$

Reduzieren auf den ersten Modalbeitrag

$$v_{ges}(k) = \Phi_1(k) \cdot \beta_1 \cdot S_{d,1}$$

$$F_{b,ges} = \tilde{\beta}_1 \cdot \beta_1 \cdot S_{a,1} = m_{1,eff} \cdot S_{a,1}$$

Identifikation

$$v_{ges}(k) = \Delta_{KK} \quad \text{bzw.} \quad S_{d,1} = S_d$$

$$F_{b,ges} = F_b \quad \text{bzw.} \quad S_{a,1} = S_a$$

Gleichung umstellen

$$S_d = \frac{\Delta_{KK}}{\Phi_1(k) \cdot \beta_1}$$

$$S_a = \frac{F_b}{m_{1,eff}}$$



menum

# CSM: Transformation 2

Im Antwortspektrum wird die spektrale Beschleunigung  $S_a$  über der Eigenperiode aufgetragen. Da auf der Ordinate bereits die richtige spektrale Größe vorliegt, besteht das Ziel der zweiten Transformation lediglich darin, die Eigenperiode  $T$  in eine spektrale Verschiebung  $S_d$  zu überführen. Der Lösungsansatz ist durch die Beziehung zwischen Beschleunigungs- und Verschiebungsspektren gegeben.

Eigenperiode

Beziehung der Antwortspektren

$$S_d \cdot \omega^2 = S_a$$

Beziehung zwischen Eigenkreisfrequenz und -periode

$$\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$$

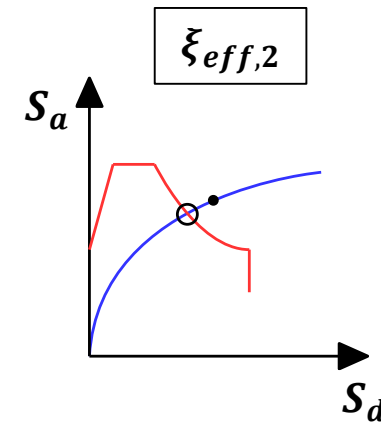
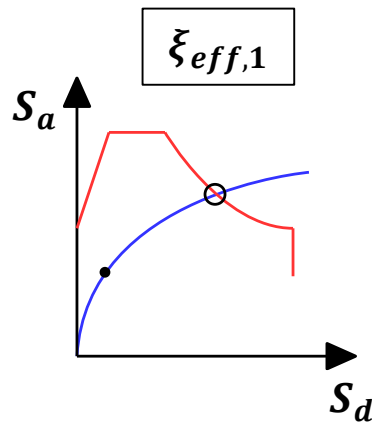
Einsetzen und Gleichung umstellen

$$S_d = S_a \cdot \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2}$$



# CSM: Energiedissipation

Das nichtlineare Tragverhalten wurde auf der Seite des Widerstandes schon durch die nichtlineare Ermittlung der Pushover-Kurve berücksichtigt. Um das nichtlineare Tragverhalten auch auf der Belastungsseite im Sinne der komplexen Wechselwirkung zwischen Tragwerksduktilität und Tragwerksbeanspruchung zu berücksichtigen, wird das transformierte Antwortspektrum vor der Ermittlung des Performance-Punktes abgemindert. Diese Abminderung erfolgt auf Basis eines effektiven Dämpfungsmaßes  $\xi_{\text{eff}}$ . Dieses Dämpfungsmaß spiegelt den Effekt wider, dass das Tragwerk durch Verformung in der Lage ist, Energie zu dissipieren und sich gewissermaßen dem Erdbeben entziehen kann. Da dieser Effekt vom Tragwerkszustand abhängig ist, ergibt sich zu jedem Punkt auf der Pushover-Kurve ein anderer Wert für  $\xi_{\text{eff}}$ . Damit korrespondiert im Allgemeinen zu jedem Punkt der Pushover-Kurve ein anderes abgemindertes Antwortspektrum und ebenso ein anderer Performance-Punkt, womit die Ermittlung dessen iterativ erfolgen muss.



# CSM: Effektives Dämpfungsmaß I

Das effektive Dämpfungsmaß  $\xi_{eff}$  setzt sich aus dem Grunddämpfungsmaß  $\xi_0$  des Tragwerks und einem äquivalenten viskosen Dämpfungsmaß  $\xi_{eq}$  zusammen. Der Wert  $\xi_0$  ist jenes Dämpfungsmaß, welches dem Tragwerk von Anfang an innewohnt und unter anderem von den Bauteilen und Verbindungen sowie von Lagerung und Baugrund abhängt. Das äquivalente viskose Dämpfungsmaß  $\xi_{eq}$  hingegen hängt vom aktuellen Tragwerkszustand  $j$  ab und ändert sich im Verlauf der Tragwerksverformung ständig. Damit ist auch das effektive Dämpfungsmaß vom Tragwerkszustand abhängig.

$$\xi_{eff,j} = \xi_0 + \xi_{eq,j}$$

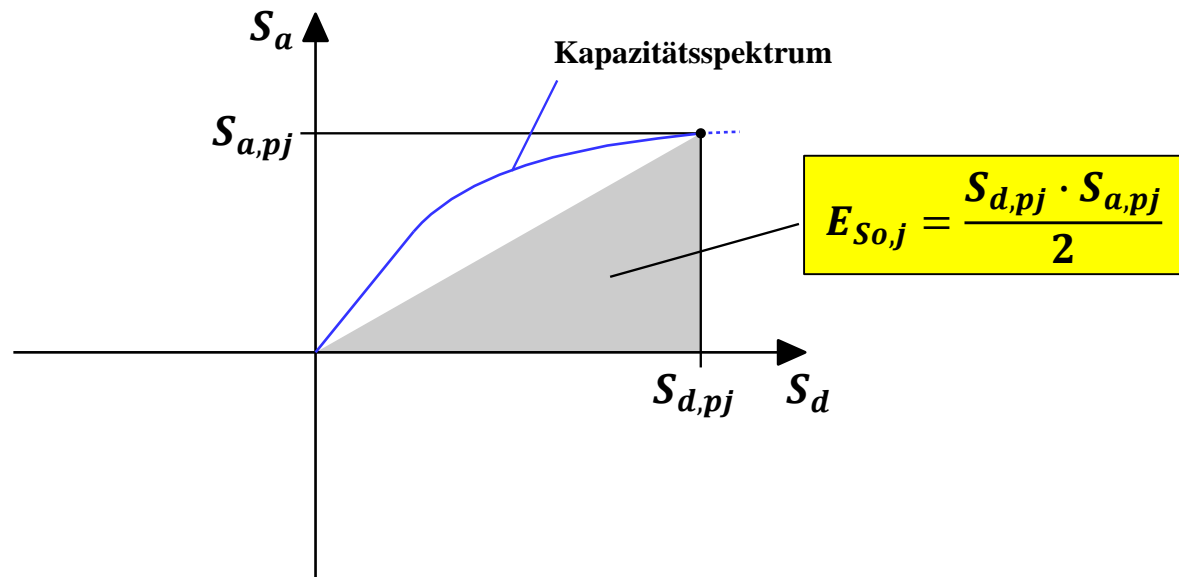
Das äquivalente viskose Dämpfungsmaß  $\xi_{eq,j}$  korrespondierend zu einem bestimmten Tragwerkszustand  $j$  ergibt sich aus dem faktorisierten Verhältnis von Hystereseenergie  $E_{D,j}$  zu maximaler elastischer (Formänderungs-) Energie  $E_{S0,j}$ .

$$\xi_{eq,j} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{E_{D,j}}{E_{S0,j}}$$



# CSM: Maximale elastische Energie $E_{S_{0,j}}$

Die Ermittlung der maximalen elastischen (Formänderungs-) Energie  $E_{S_{0,j}}$  ist zunächst trivial. Diese kann anschaulich folgendermaßen interpretiert werden: Könnte man den Tragwerkszustand  $j$  unmittelbar „auf kürzestem Weg“ einprägen, würde dazu eine effektive Sekantensteifigkeit korrespondieren (Sekante: Ursprung bis  $(S_{d,pj}|S_{a,pj})$ ). Die Fläche unter dieser Sekante entspricht dann der maximalen elastischen (Formänderungs-) Energie  $E_{S_{0,j}}$ .

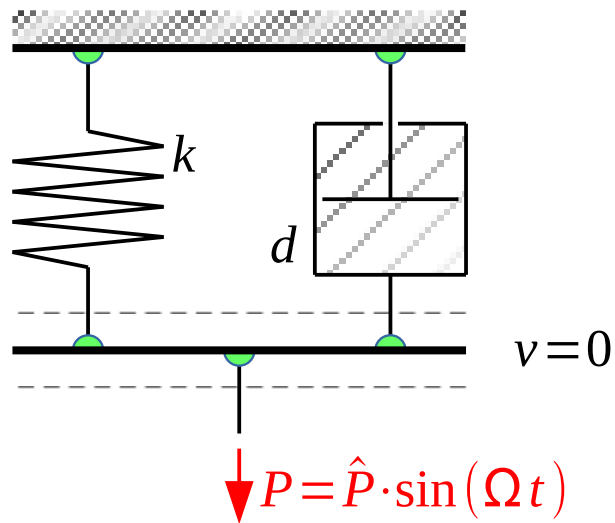


Die Ermittlung der Hystereseenergie  $E_{D,j}$  hingegen ist etwas anspruchsvoller. Um diese bestimmen zu können, ist ein gewisses Hintergrundwissen zum Thema „Hysterese“ notwendig.

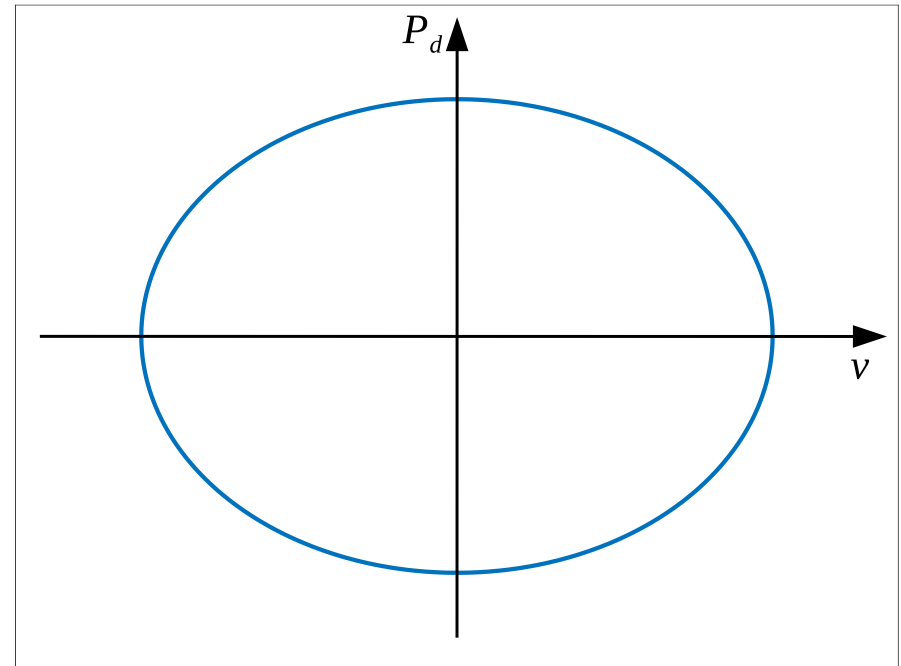
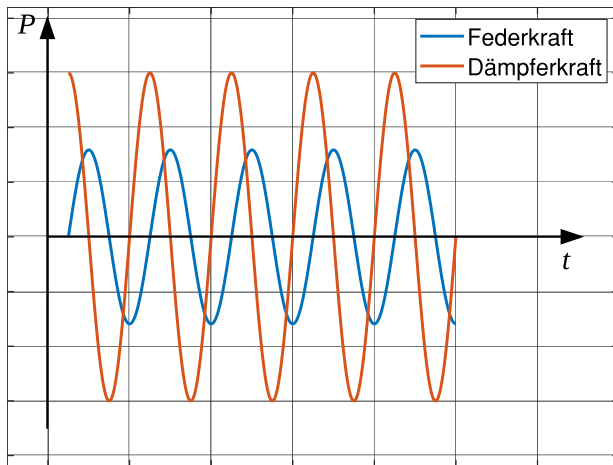


# CSM: Hysterese I

Voigt-Kelvin-Modell



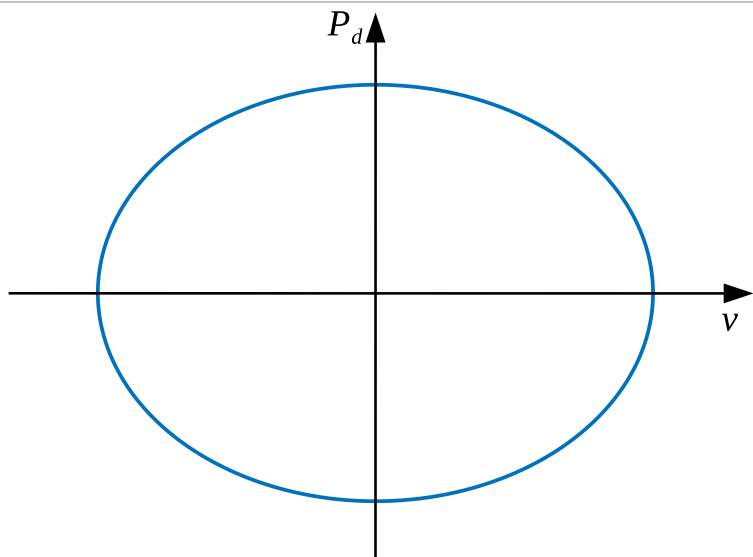
Wird das Voigt-Kelvin-Modell mit einer harmonischen Kraft beaufschlagt, tauschen sich die Feder- und Dämpfungskraft fortlaufend aus. Trägt man die harmonische Dämpfungskraft  $F_d$  einer Periode nicht über die Zeit, sondern über die Verformung  $v$  auf, ergibt sich eine geschlossene Kurve in Form einer Ellipse. Diese wird als Hystereseschleife bezeichnet.





# CSM: Hysterese II

Hysterese bzw. Hysteresis („Nachwirkung“; griech. *hysteros* „hinterher, später“) kann in vielen natürlichen und technischen Vorgängen vorgefunden werden. In der Werkstofftechnik z. B. unterliegt das elastisch-plastische Verformungsverhalten eines Werkstoffs einer Hysterese. Es wird dann von hysteretischem Verhalten gesprochen, wenn bezogen auf eine Eingangsgröße eine Ausgangsgröße variant verzögertes Verhalten aufweist. Mit „variant“ ist gemeint, dass eine gleiche Eingangsgröße nicht zu der selben Ausgangsgröße führen muss. Dies heißt konkret, dass ein Systemverhalten nicht ausschließlich von einer Eingangsgröße abhängig ist, sondern auch die Vorgeschichte des Systems eine entscheidende Rolle spielt. Ein System kann also je nach vorherigem Zustand bei gleicher Einwirkung mehrere mögliche Zustände einnehmen.

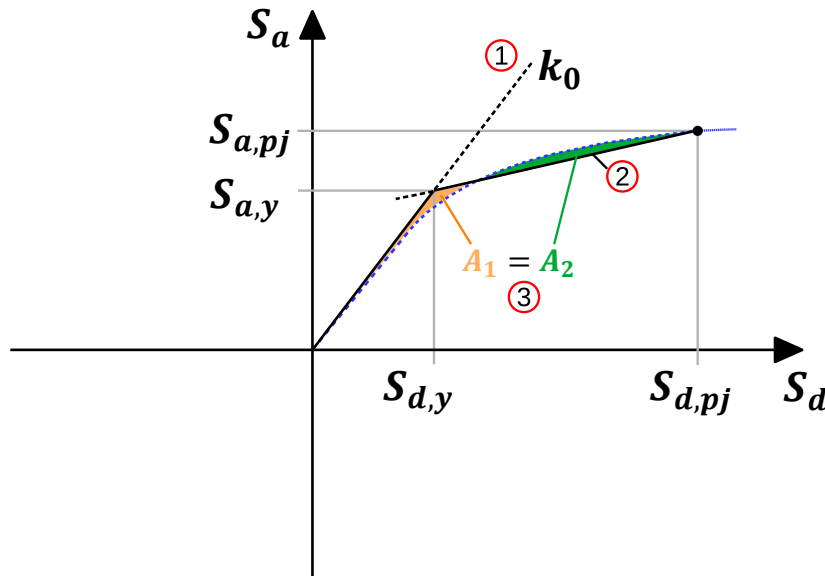


Typisch für hysteretisches Verhalten ist das Auftreten einer Hystereseschleife. Diese entsteht, wenn die Einwirkung zwischen zwei verschiedenen Werten schwankt und für einen Zyklus Einwirkung und Systemreaktion gemeinsam grafisch dargestellt werden. Die in einem Schwingzyklus dissipierte Energie entspricht der Fläche der Hystereseschleife und wird Hystereseenergie genannt.



# CSM: Linearisierung des Kapazitätsspektrums

Das Kapazitätsspektrum wird (nur) für die Ermittlung der Hystereseenergie mit zwei Segmenten linearisiert. Dies vereinfacht später die Identifikation der Hystereseschleife und die Ermittlung der Hystereseenergie.



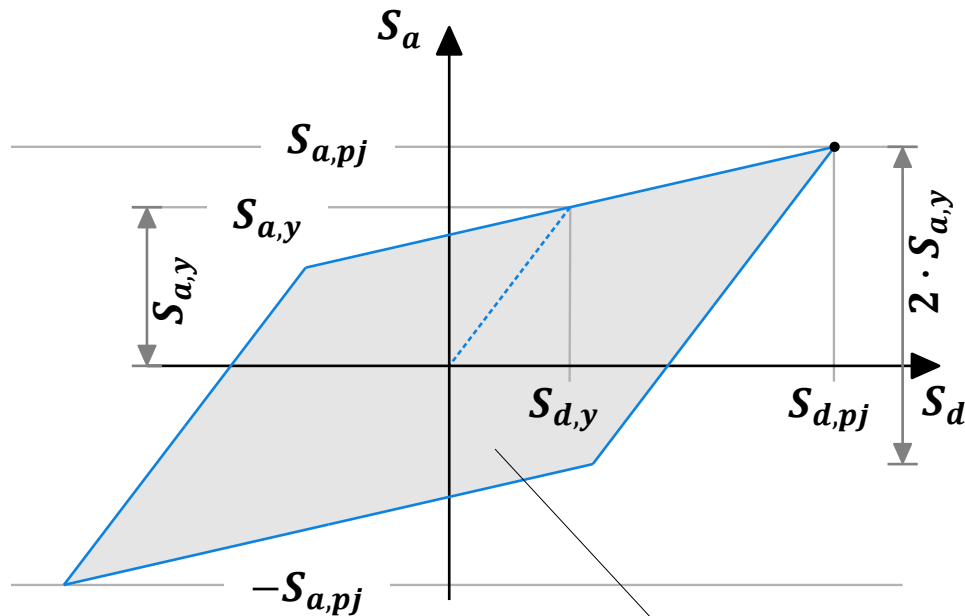
1. Gerade mit Anfangssteifigkeit durch den Ursprung
2. Zweite Gerade durch den Punkt  $(S_{d,pj} | S_{a,pj})$
3. Zweite Gerade so „neigen“, dass die Schnittflächen  $A_1$  und  $A_2$  zwischen Linearisierung und Spektrum gleich groß sind

Linearisierung des Kapazitätsspektrums bis zum Punkt  $j$  durch folgende Punkte eindeutig bestimmt: Ursprung,  $(S_{d,y} | S_{a,y})$ ,  $(S_{d,pj} | S_{a,pj})$



# CSM: Hystereseenergie $E_{D,j}$

Durch die Linearisierung des Kapazitätsspektrums mit zwei Segmenten ergibt sich die Hystereseschleife zu einem Parallelogramm. Dessen Flächeninhalt entspricht der Hystereseenergie  $E_{D,j}$ .



$$E_{D,j} = 4 \cdot (S_{a,y} \cdot S_{d,pj} - S_{d,y} \cdot S_{a,pj})$$



# CSM: Effektives Dämpfungsmaß II

Auf Grundlage von Hystereseenergie  $E_{D,j}$  und maximaler elastischer (Formänderungs-) Energie  $E_{S0,j}$  ergibt sich das äquivalente viskose Dämpfungsmaß  $\xi_{eq,j}$  zu:

$$\xi_{eq,j} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{4 \cdot (S_{a,y} \cdot S_{d,pj} - S_{d,y} \cdot S_{a,pj})}{\frac{S_{d,pj} \cdot S_{a,pj}}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{S_{a,y} \cdot S_{d,pj} - S_{d,y} \cdot S_{a,pj}}{S_{d,pj} \cdot S_{a,pj}}$$

Die Hystereseschleife in Form eines Parallelogramms ergibt sich lediglich aus der Linearisierung des Kapazitätsspektrums. Im Allgemeinen bildet sich jedoch in der Wirklichkeit kein perfektes Parallelogramm aus. Aufgrund dieser Tatsache wird ein Korrekturfaktor  $\kappa = \kappa(\xi_{eq,j})$  eingeführt, um abweichende Hystereseschleifen berücksichtigen zu können. Dieser Korrekturfaktor hängt vom äquivalenten viskosen Dämpfungsmaß  $\xi_{eq,j}$  und der Energiedissipationsfähigkeit des Tragwerks ab. Dadurch ermittelt sich das effektive Dämpfungsmaß  $\xi_{eff}$  zu:

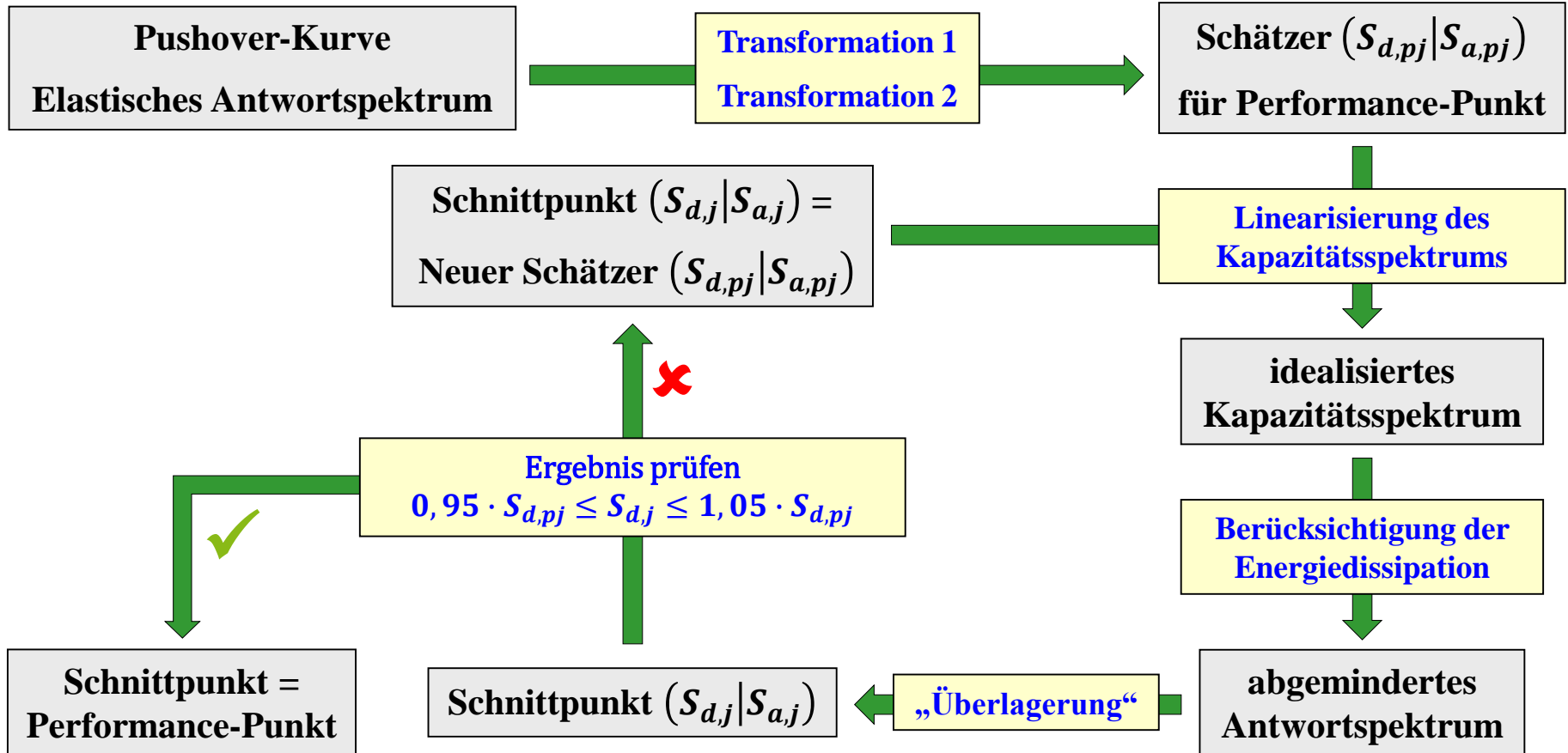
$$\xi_{eff,j} = \xi_0 + \kappa(\xi_{eq,j}) \cdot \xi_{eq,j}$$

Mit dem effektiven Dämpfungsmaß  $\xi_{eff}$  kann dann z. B. ein neues Antwortspektrum ermittelt werden.



# CSM: Ermittlung des Performance-Punktes

Es ist nun bekannt, wie zu einem Tragwerkszustand  $j$  (Punkt im Kapazitätsspektrum) das korrespondierende abgeminderte Antwortspektrum ermittelt wird. Wie läuft jedoch die iterative Ermittlung des Performance-Punktes konkret ab?



# CSM: Rücktransformation

Wird ein Performance-Punkt gefunden, können über eine Rücktransformation („inverse“ Transformation 1) die zur Tragwerksperformance korrespondierenden Größen – reale Tragwerksverformung  $\Delta_{KK,PP}$  am Kontrollknoten und der Fundamentschub  $F_{b,PP}$  – ermittelt werden.

Tragwerksverformung

$$S_{d,j} \cdot \Phi_1(k) \cdot \beta_1 = \Delta_{KK,PP}$$

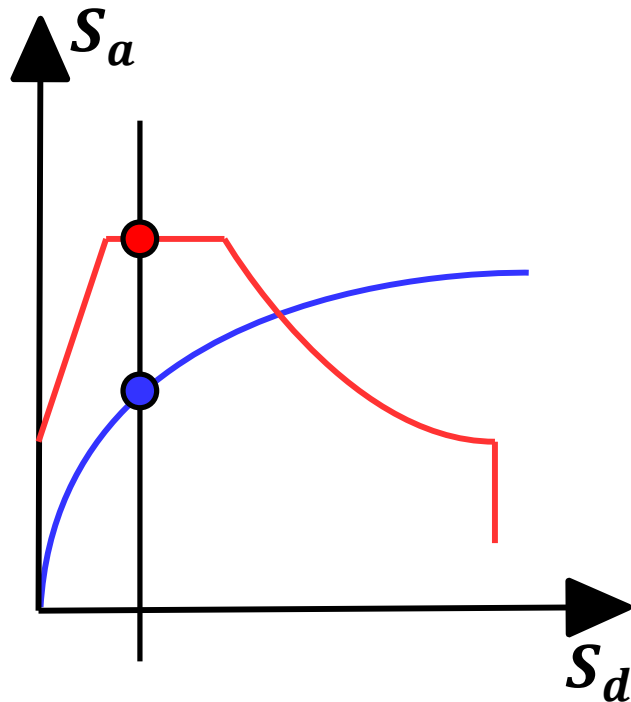
Fundamentschub

$$S_{a,j} \cdot m_{1,eff} = F_{b,PP}$$

Da zu exakt dieser Tragwerksverformung  $\Delta_{KK,PP}$  i. Allg. keine Berechnungsergebnisse vorliegen, muss diese in einem weiteren notwendigen Berechnungsschritt eingepreßt werden, um z. B. Bemessungsschnittgrößen oder –spannungen infolge der Erdbebenbelastung zu berechnen.



# Gleichgewicht muss sein, über alles andere kann man reden!



Die blaue Kurve stellt das Kapazitätsspektrum dar, auf dem alle Punkte Gleichgewichtszustände abbilden. Das Antwortspektrum wird durch die rote Kurve dargestellt. Alle Punkte auf dieser Kurve repräsentieren „Einwirkungs-zustände“.

Zu den beiden markierten Zuständen korrespondiert dieselbe spektrale Verschiebung. Die spektrale Beschleunigung des roten „Einwirkungs-zustandes“ hingegen ist deutlich größer als die des blauen Gleichgewichtszustandes. Aufgrund dieser Inkonsistenz ist der blaue Gleichgewichtszustand nicht der gesuchte Performance-Punkt.

Der Performance-Punkt ist der einzige Punkt, in dem sowohl Gleichgewicht herrscht wie auch Konsistenz zwischen beiden Beschleunigungen. Damit beschreibt dieser Punkt das Tragverhalten infolge des Erdbebens. Gibt es diesen Punkt nicht, kann das Tragwerk der Erdbebenbeanspruchung nicht standhalten.



# Lokale Nachweise des duktilen Verhaltens

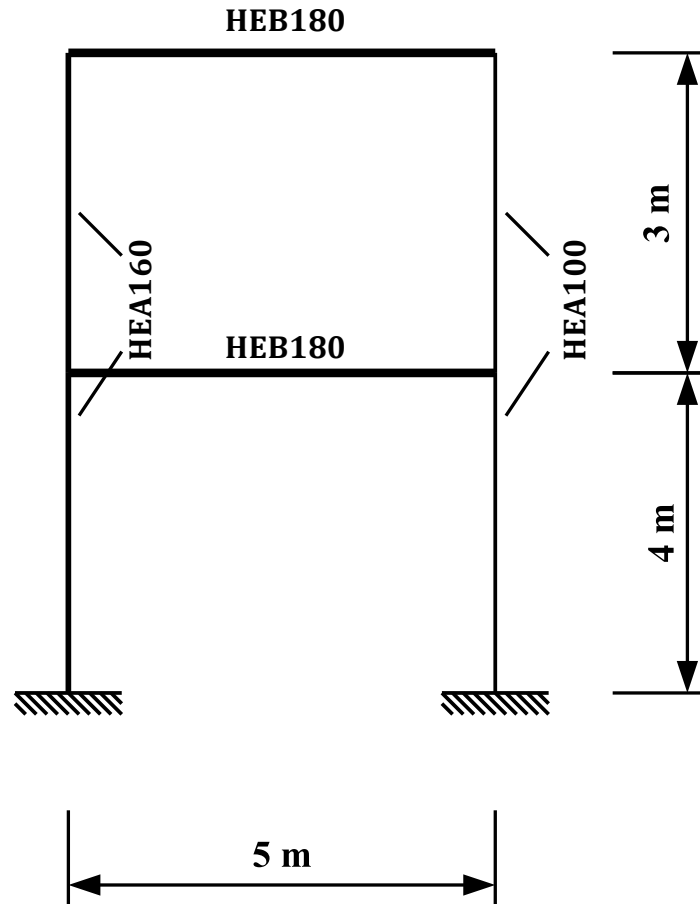
**Gibt es einen Performance-Punkt, so beschreibt dieser das Tragverhalten infolge des Erdbebens. Aus den Spektralordinaten kann auf den korrespondierenden Punkt der Pushover-Kurve (inverse Transformation 1) zurückgeschlossen werden. Genau wie beim klassischen Traglastverfahren muss aber jetzt noch nachgewiesen werden, dass es zu keinem unduktilen Versagen auf lokaler Ebene kommt.**

**Der globale Nachweis der Standsicherheit reicht nicht aus, es müssen zusätzlich die Rotationskapazität oder vergleichbare duktile Verformungsmechanismen nachgewiesen werden.**





# Anwendungsbeispiel: 2-Stock-Rahmen



## Gegeben:

- Horizontales elastisches Antwortspektrum (nach EC8) Typ 1 mit  $a_g = 0,40 \text{ m/s}^2$
- Verkehrslast im OG:  $60 \text{ kN/m}$
- Schneelast:  $20 \text{ kN/m}$

## Aufgaben:

- I. Pushover-Analyse
- II. Ermittlung des Performance-Punktes mittels der Kapazitätsspektrum-Methode

